Лекція 7.

ОПТИМІЗАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Зміст

1. Завдання оптимізації

Після виявлення факторів і вибору вихідних величин формують *факторний простір досліджуваної системи* – встановлюють область визначення і деякі найвірогідніші (середні) значення рівня варіювання факторів, які підлягають зміні параметрів об'єкта, вихідних величин і критеріїв ефективності.

Область визначення факторів обмежується можливими крайніми їх значеннями (x_{min}., x_{max}), а *рівні варіювання* отримують шляхом розбиття інтервалу на деяке число рівних підінтервалів (зазвичай від 2 до 6 ... 12) залежно від розміру інтервалу і цілей дослідження.

Обмеження рівнів факторів обумовлені їх фізичною природою, техніко-економічними міркуваннями, обладнанням та приладами що застосовують, а також наявною інформацією про дослідження, які раніше виконувалися.

Основний рівень (нульова точка) являє собою центр досліджуваної області зміни даного фактора. Якщо завданням експерименту є оптимізація деякого параметра, то нульову точку розміщують якомога ближче до положення, що забезпечує оптимум параметра. Якщо завдання експерименту – отримання моделі даного процесу, то за нульову точку приймають середину інтервалу зміни даного фактору.

Рівні фактора, як правило, вибирають симетричними відносно нульової точки. Для спрощення запису умов експерименту і оброблення даних масштаби по осях вибирають так, щоб верхній рівень фактора відповідав +1, нижній –1, а основний – нулю.

Точність фіксування рівнів фактора визначають стабільністю їх у ході досліду і точністю приладів: висока точність, якщо вимірювання проводиться з похибкою не більше 1%, середня – не більше 5% і низька – більше 10%.

На *вибір інтервалів варіювання рівня фактора* накладають обмеження «згори» і «знизу». Інтервал варіювання не може бути менше тієї помилки, з якою експериментатор фіксує рівень фактора, інакше його верхній і нижній рівні виявиться неможливим розрізнити. З іншого боку, інтервал не може включати такі рівні фактора, при яких його верхній і нижній рівні опиняються за границями області визначення. Якщо інтервал становить не більше 10% від області визначення фактора, його вважають вузьким, не більше 30% – середнім і в решту випадках – широким.

При вирішенні задачі оптимізації для першої серії дослідів прагнуть вибрати таку підобласть зміни рівня фактора, яка давала б можливість найшвидшого руху до оптимуму. У задачах інтерполяції (описи процесу) інтервал варіювання рівнів факторів охоплює всю область експериментування.

Факторний простір може мати при цьому будь-яку конфігурацію. У разі однофакторного експерименту факторний простір є відрізком прямої на числовій осі фактора x_i. Для двофакторного експерименту воно має вигляд прямокутника, а для трифакторного – прямокутного паралелепіпеда і т.д. У загальному випадку факторний простір являє собою K-мірний паралелепіпед.

Після перенесення координат системи факторів x_i, в центр експерименту, фактори переводять із натуральних змінних, що мають зазвичай фізичну розмірність, в безрозмірні, тобто в кодований

$$x_i' = \frac{x_i - x_{0i}}{\Delta x_i},$$

де $\Delta x_i = 0{,}5\ (x_{max} - x_{min})$ – півдіапазон змін i-го фактора.

Кодування призводить до того, що всі фактори можуть змінитися в діапазоні –1 $\le x_i \le +1$, що перетворює K-мірний паралелепіпед в K-мірний куб (гіперкуб), а еліпсоїд розсіяння вихідних показників – у сферу.

При плануванні експериментів для побудови моделей в обмеженій області визначення факторів і параметрів об'єкта фактори найчастіше варіюють на двох (+1 і –1) або на трьох (+1; 0; +1) рівнях через однакові інтервали (проміжки). При необхідності можна застосовувати багаторівневе варіювання змінних.

2. Виробничі функції

Виробнича функція кількох змінних описує залежності обсягу продукції, яку випускають, від витрачених або використаних ресурсів, тобто в записі $y = f(x_1, x_2, \ldots, xn)$ випуск y одиниць продукції визначають обсягами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ витрачених ресурсів.

Якщо виробнича функція описує технологію діючого підприємства, то в якості ресурсів можуть бути витрати робочого часу, сировини, комплектуючих виробів, енергії, основного капіталу.

Розглянемо виробничу функцію двох змінних $Q = f(K, L)$, що описує залежність випуску продукції Q від вкладеного капіталу K і затраченої праці L.

Лінія рівня виробничої функції, тобто лінія, в кожній точці якої обсяг випуску при різних значеннях K і L один і той же, *називається ізоквантою* або *кривою байдужості* виробництва. Рівняння ізокванти має вигляд $f(K, L) = \text{const}$.

Рівняння дотичної до ізокванти $f(K, L) = Q_o$ в точці (K_o, L_o)

$$f(K_0, L_0) = Q_0\!: \ (K - K_0)\frac{\partial}{\partial K} f(K_0, L_0) + (L - L_0)\frac{\partial}{\partial L} f(K_0, L_0) = 0\,.$$

Ізокванти не перетинаються; більшому обсягу виробництва відповідають ізокванти, віддаленіші від початку координат; дотичні до ізокванти мають негативний кутовий коефіцієнт.

При дослідженні властивостей виробничої функції використовують *граничні величини*.

Граничним продуктом капіталу називається границя відношення приросту кількості виробленої продукції до приросту вкладеного капіталу, що викликав цей приріст.

$$Q_K' = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{f(K + \Delta K, L) - f(K, L)}{\Delta K} = \frac{\partial}{\partial K} f(K, L).$$

Аналогічно *граничним продуктом праці* називають границю відношення приросту кількості виробленої продукції до приросту вкладеної праці, що викликала цей приріст.

$$Q_L' = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{f(K, L+\Delta L) - f(K, L)}{\Delta L} = \frac{\partial}{\partial L} f(K, L).$$

При одночасній зміні вкладеної праці й капіталу приріст випуску продукції можна наближено обчислювати за формулою

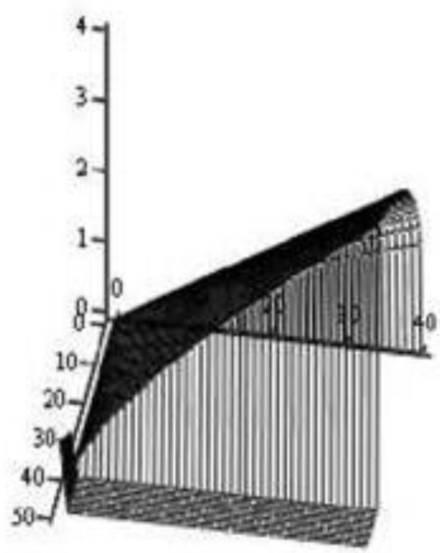
$$\Delta Q \approx Q_K' \Delta K + Q_L' \Delta L.$$

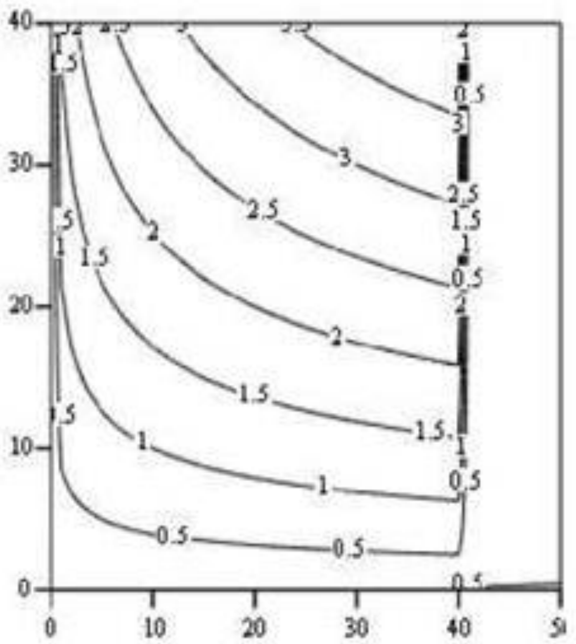
Величина $R = \Delta K / \Delta L$ обчислена в точках ізокванти, називається *коефіцієнтом замінності ресурсів*. Вона показує, наскільки одиниць потрібно збільшити вкладення капіталу при зменшенні на одиницю вкладеної праці при умові, щоб випуск не змінився. Геометричний зміст коефіцієнта замінності ресурсів – кутовий коефіцієнт дотичної до ізокванти.

Нижче наведено фрагмент робочого документа Mathcad з графіком виробничої функції $Q = K^{1/4}L^{3/4}$ та її ізокванта.

$$Q(K,L) := K^{\frac{1}{4}} \times L^{\frac{3}{4}}$$

$$i := 0..40 \quad j := 0..40 \quad k_i := i \times 0.1 \quad l_j := j \times 0.1 \quad y_{i,j} := Q(k_i, l_j)$$





y y

3. Оптимізація технологічних процесів з використанням планування експерименту

Завдання оптимізації можна вирішувати двома способами графічним і аналітичним.

При графічному способі вирішення будують двомірні перетину однієї поверхні відгуку, які суміщають з двомірними січеннями іншої поверхні відгуку. Аналізуючи суміщені двомірні січення, знаходять умовні екстремуми. Для отримання двомірних перерізів в рівняння регресії підставляють значення (ймовірно близькі до оптимальних) усіх факторів, крім будь-яких двох. При заданому значенні функції відгуку отримують залежність між двома факторами, яку на площині можна представити у вигляді кривої. Задаючи різні значення параметра оптимізації, можна побудувати сукупність кривих рівного відгуку. Цим способом можна отримати наочне уявлення про вплив кожної пари факторів на параметр оптимізації.

Графічний метод досить простий і відрізняється великою наочністю, однак він зручний тільки при малому числі факторів. При числі факторів до $k > 3$ графічний метод виявляється дуже громіздким.

Широко застосовують *симплексний метод оптимізації*.

Для пошуку оптимуму дуже часто використовують кроковий метод, який передбачає виконання двох етапів:

1) вивчення деякої області поверхні відгуку з метою визначення напрямку руху до оптимуму;

2) рух до оптимуму за встановленим напрямом.

Наприклад, *методом стрімкого сходження* необхідно знайти максимум величини y, яка залежить від двох факторів x_1 і x_2. Функція відгуку $y = f(x_1, x_2)$ являє собою рівняння поверхні, яку можна представ-вити лініями рівного відгуку на факторній площині x_1x_2 (рис.1).

Поблизу максимального значення величини y така поверхня має вигляд пагорба, вершина якого представляє собою точку, що відповідає оптимальними умовами протікання процесу. Для пошуку оптимуму проводять повний факторний експеримент 2^2 (досліди 1, 2, 3, 4), визначають коефіцієнти лінійного рівняння регресії і знаходять напрям градієнта. Потім проводять стрімке сходження (досліди 5, 6, 7, 8). Прийнявши точку з найбільшим значенням y (дослід 7) за центр плану, знову проводять повний факторний експеримент 2^2 (досліди 9, 10, 11, 12) і визначають новий напрямок градієнта. Після цього, рухаючись по градієнту (досліди 13, 14, 15, 16) знаходять максимум (дослід 15).

Симплексом називають найпростішу опуклу геометричну фігуру, утворену множиною до $k + 1$ незалежних точок у просторі. Точки, що утворюють симплекс, називають його *вершинами*.

Особливістю симплекс-планування є суміщення процесу вивчення поверхні відгуку й процесу руху по поверхні відгуку. Це досягається тим, що умови проведення кожного чергового досліду встановлюють на основі оцінки попередніх дослідів, поставлених у вершинах симплекса. Всі досліди ставлять у вершинах симплексів і рух у факторному просторі здійснюють після кожного досліду.

Наприклад, необхідно знайти максимум величини y, яка залежить від змінних x_1 і x_2. У вихідному симплексі 1, 2, 3 (рис. 2) отримані значення $y_3 > y_2 > y_1$. Вершина 1 з найменшим значенням функції відгуку відкинута й замінена вершиною 4. У вершинах 2, 3, 4 отримані значення $y_4 > y_3 > y_2$. Вершину 2 відкинули і побудували новий симплекс 3, 4, 5 і т.д. Загальне число дослідів, необхідних для досягнення області оптимуму визначають тим, що спочатку необхідно поставити $k + 1$ дослід, а потім кожен крок руху супроводжується проведенням тільки одного додаткового досліду.

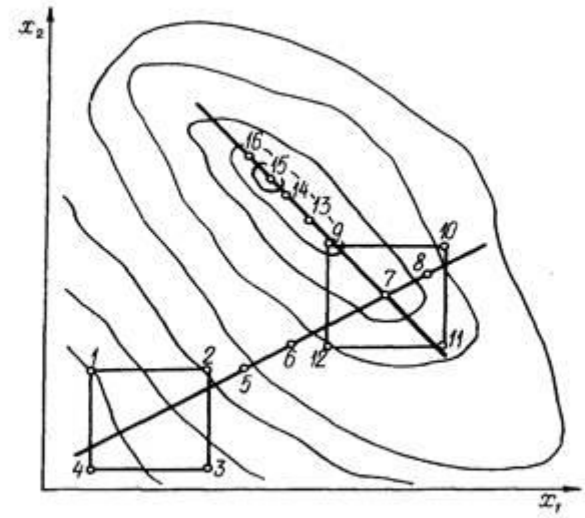


Рисунок 1. Схема руху до оптимуму при стрімкому сходженні

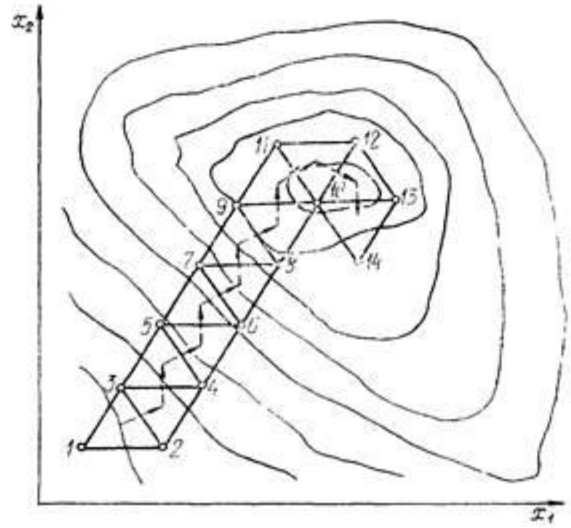


Рисунок 2. Схема руху до області оптимуму при симплексному методі

4. Геометричне вирішення задачі оптимізації

У загальному випадку завдання лінійного програмування формулюють наступним чином. Знайти величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що доставляють мінімум лінійної функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2, + \ldots + c_nx_n$$

і задовольняють умовам, які можуть бути тільки рівностями і нерівностями виду

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i;$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k;$$
$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \ge b_p, i \ne k \ne p.$$

Серед обмежень часто зустрічають умови незаперечності всіх або частини змінних $x_j \ge 0$.

Хоча умови незаперечності є частковим випадком обмеженим загальним виглядом, їх прийнято виділяти в особливу групу.

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *цільовою функцією*.