

Тема 5

Оглавление

| | |
|--|----|
| Динаміка обертального руху | 6 |
| Момент сили | 6 |
| плече сили..... | 7 |
| момент інерції..... | 7 |
| прикладні моменти інерції | 8 |
| теорема Штейнера | 9 |
| Основне рівняння динаміки обертального руху..... | 9 |
| Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу | 10 |

Динаміка обертального руху

Основний закон динаміки обертального руху

Обертання твердого тіла, при якому тільки одна точка залишається нерухомою, називається обертанням навколо нерухомої точки. Таке обертання тіла можна розглядати в будь-який момент часу як обертання тіла навколо миттєвої осі обертання.

Обертальну дію сили характеризують фізичною величиною—**моментом сили**. Момент сили—це вектор, напрямком якого в просторі зв'язаний з обертанням — аксіальний вектор.

Момент сили

Моментом сили відносно нерухомої точки O називається фізична величина, що визначається векторним добутком радіуса-вектора \vec{r} , проведеного з точки O в точку A прикладання сили, на вектор сили \vec{F} (рис. 7):

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (14)$$

Вектор моменту сили \vec{M} направлений перпендикулярно до площини векторів \vec{r} і \vec{F} . Його напрямком визначається правилом правого гвинта при його обертанні від \vec{r} до \vec{F} . Модуль моменту сили дорівнює добутку сили F на плече l :

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (15)$$

де α —гострий кут між векторами \vec{r} і \vec{F} ;

плече сили

$l = r \sin \alpha$ – найкоротша відстань між лінією дії сили F і точкою O – плече сили.

Моментом сили відносно нерухомої осі Z називається скалярна величина M_z , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили \vec{M} , визначеного відносно довільної точки O , вибраної на цій осі (рис.8).

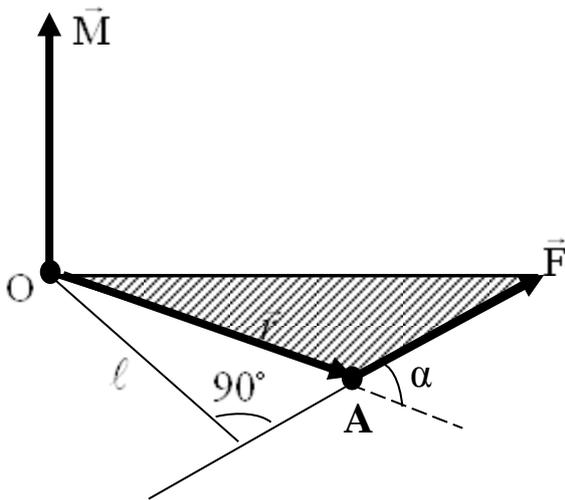


Рис.7

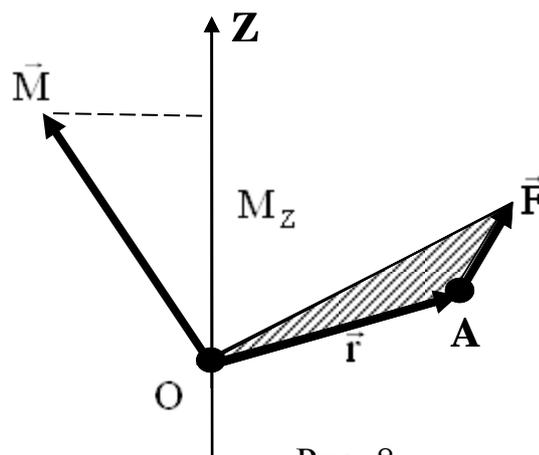


Рис. 8

момент інерції

Мірою інертності тіла при обертальному русі є динамічна характеристика обертання – **момент інерції J** .

Моментом інерції тіла (система матеріальних точок) відносно даної осі називається фізична скалярна величина, яка дорівнює сумі моментів інерції всіх матеріальних точок, з яких складається тіло:

$$J = \sum J_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2, \quad (16)$$

де $J_i = m_i r_i^2$ – момент інерції матеріальної точки відносно даної осі.

У випадку неперервного розподілу маси в тілі ця сума зводиться до інтеграла:

$$J = \int r^2 dm , \quad (17)$$

де інтегрування виконується по всьому об'єму тіла.

прикладі моментів інерції

Наведемо приклади моментів інерції деяких однорідних тіл правильної геометричної форми (вісь обертання проходить через центр мас).

1. Момент інерції матеріальної точки (рис. 9):

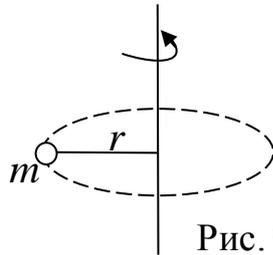


Рис. 9

$$J = m r^2 . \quad (18)$$

2. Момент інерції обруча (тонкостінного циліндра) відносно осі, що проходить перпендикулярно площині обруча в центрі кола (вісь збігається з віссю циліндра):

$$J = mR^2 ;$$

де R —радіус обруча (циліндра);

3. Момент інерції однорідного диска (або циліндра) радіусом R відносно осі, яка перпендикулярна площині диска (або циліндра), та збігається з геометричною віссю (віссю симетрії) (рис. 10):

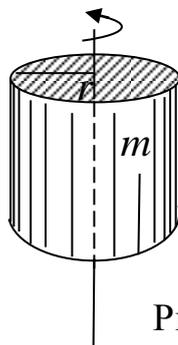
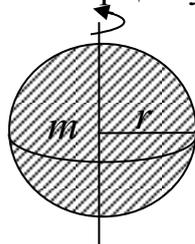


Рис. 10

$$J = \frac{1}{2} m r^2 . \quad (19)$$

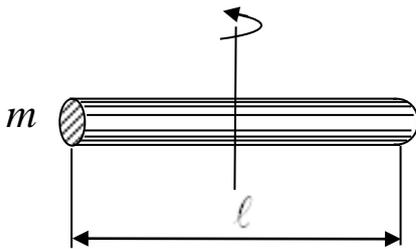
3. Момент інерції кулі (рис 11):



$$J = \frac{2}{5}mr^2 . \quad (20)$$

Рис. 11

4. Момент інерції стержня довжиною l відносно осі, що проходить перпендикулярно стержню, посередині його рис. 12:



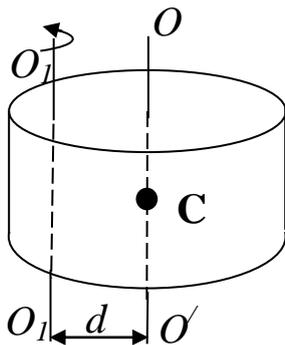
$$J = \frac{1}{12}ml^2 . \quad (21)$$

Рис. 12

теорема Штейнера

Якщо відомий момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, то момент інерції відносно будь-якої паралельної осі визначається **теоремою Штейнера**:

момент інерції J тіла відносно довільної осі дорівнює його моменту інерції J_c відносно паралельної осі, що проходить через центр мас C тіла плюс добуток маси тіла на квадрат відстані d між осями (рис. 13)



$$J = J_c + md^2 . \quad (22)$$

Рис. 13

Основне рівняння динаміки обертального руху

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі записується так:

$$M_z = J_z \beta , \quad (23)$$

де M_z – момент сили відносно осі Z ; J_z – момент інерції тіла відносно осі Z ; $\beta = d\omega/dt$ – кутове прискорення тіла.

Якщо вісь Z збігається з головною віссю інерції тіла, яка проходить через центр мас, то має місце векторна рівність

$$\vec{M} = J\vec{\beta} . \quad (24)$$

Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Момент імпульсу твердого тіла L_z відносно нерухомої осі Z – фізична величина, яка дорівнює добутку моменту інерції тіла на його кутову швидкість:

$$L_z = J_z \omega . \quad (25)$$

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, що проходить через його центр мас, момент імпульсу обчислюється за формулою:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} . \quad (26)$$

Введення вектора моменту імпульсу дозволяє записати **основне рівняння** динаміки обертального руху у більш загальній формі, подібній до рівняння Ньютона для поступального руху:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \quad (27)$$

Для замкненої системи момент зовнішніх сил $\vec{M} = 0$, тоді $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, звідки

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = const . \quad (28)$$

Цей вираз являє собою **закон збереження моменту імпульсу**: момент імпульсу замкненої системи є величина стала, тобто не змінюється з часом.