Лекція №1.

Тема: Визначники.Матриці.СЛАР.

План

1.1. Визначники другого і третього порядків.

Означення. Властивості визначників. Теорема про розклад.

1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.3 Метод Крамера розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими.

2.1. Матриці.

2.2. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

1.1. Визначники другого і третього порядків.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тоді число $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ називають *визначником другого порядку матриці* A. Замість Δ також використовують такі позначення визначника матриці A:

$$\det A,\ |A|,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Приклад. Обчислити визначник матриці $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 5 + 6 = 11$.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Тоді число

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

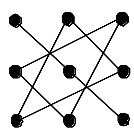
називають *визначником третього порядку матриці A*. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Для запам'ятовування цієї формули використовують правило Саррюса. Зі знаком "+" беруться три доданки, кожен з яких є добутком трьох чисел. Перший доданок містить добуток трьох елементів головної діагоналі. Другий і третій доданки містять добуток трьох елементів, що є вершинами рівнобедреного трикутника з основою, паралельною головній діагоналі (мал.1.1).

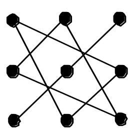
"+"



Мал.1.1

Зі знаком "–" так само беруть три доданки, кожен з

"–"



Мал.1.2

яких є добутком трьох чисел. Перший доданок містить добуток трьох елементів побічної діагоналі. Другий і третій доданки містять добуток трьох елементів, що є вершинами рівнобедреного трикутника з основою, паралельною побічній діагоналі (мал.1.2).

Приклад. Обчислити визначник матриці $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язок.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 4\cdot(-2) + 3\cdot 0\cdot 5 -$$

$$-3\cdot 1\cdot(-2) - (-1)\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 5 = 2+8+0+6+0-40 = -24.$$

Мінором M_{ij} *елементу* a_{ij} *визначника* Δ *n-го порядку* називають визначник (*n*–1)-го порядку, що одержують із визначника Δ шляхом вилучення його *i*-го рядка та *j*-го стовпчика, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}.

Приклад. Записати і обчислити мінори елементів a_{12} і a_{22} визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Щоб записати мінор елемента a_{12} визначника Δ потрібно з цього визначника вилучити перший рядок і другий стовпчик. У результаті одержимо мінор $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Аналогічно одержуємо мінор елемента a_{22}:

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислимо знайдені мінори:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -5, \; M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -9.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} *елементу* a_{ij} *визначника* Δ називають число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для попереднього прикладу:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-5) = 5, \; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-9) = -9$$

Властивості визначників

1). Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) визначника дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю.

2). Якщо два рядки (стовпчики) визначника поміняти місцями, то визначник змінить знак на протилежний.

3). Якщо всі елементи деякого рядка (стовчика) домножити на деяке дійсне число α, то значення визначника зміниться в α разів.

Наслідок. Спільний множник елементів певного рядка (стовпчика) можна виносити за знак визначника.

4). Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) домножити на число α і додати почленно до елементів іншого рядка (стовпичка), то значення визначника не зміниться.

5). При транспонуванні матриці значення відповідного визначника не змінюється, тобто $|A|=|A^T|$.

6). Якщо визначник містить два однакових рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

7). Якщо визначник містить пропорційні рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

8). Визначники трикутної і діагональної матриць дорівнюють добутку елементів головної діагоналі.

Розглянемо приклад на обчислення визначника, використовуючи деякі з наведених властивостей.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ I\cdot(-3)+II \\ I\cdot(-4)+III \\ I+IV \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -10 & 11 \\ 0 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & -10 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ II\cdot(-5)+III \\ II\cdot(-2)+IV \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -22 & 33 \\ 0 & 0 & -16 & 21 \end{vmatrix} = 11\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 21 \end{vmatrix} =$$

$$=11\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 21 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ III\cdot(-8)+IV \end{matrix} = 11\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\cdot(-2)\cdot(-3) = 66.$$

1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системою n *лінійних алгебраїчних рівнянь з* n *невідомими* називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Розв'язком системи (1.1) є впорядкований набір з n чисел $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, при підстановці яких в (1.1) замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно кожне з рівнянь системи перетвориться на правильну рівність.

1.3 Метод Крамера розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– основний визначник системи; Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ – визначники, які одержують із Δ шляхом заміни відповідно 1, 2, …, n-го стовпчиків на стовпчик вільних членів.

Теорема Крамера. Якщо основний визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (1.1) має єдиний розв'язок $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, де $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ $\left(i = 1,2, \ldots, n\right)$. Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_i \neq 0$, то система (1.1) розв'язків не має. Якщо $\Delta = 0$ і кожен з визначників $\Delta_i = 0$, то система (1.1) або має безліч розв'язків, або розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}.$$

Розв'язок. Використаємо метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30 + 3 - 10 - 4 + 25 + 9 = -7 \neq 0.$$

Оскільки основний визначник системи не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок. Знайдемо його.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 9 - 2 - 12 + 5 - 3 = 7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 3 + 30 - 2 - 25 - 27 = -42;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 1 - 5 - 2 + 15 - 3 = -14;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-42}{-7} = 6;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Відповідь: $(-1; 6; 2)$.

Лекція №1.2.

2.1. Матриці

Прямокутну таблицю вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають *матрицею розмірності* $m \times n$. Числа a_{ij} $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \right)$ називають *елементами матриці*. Для позначення матриць використовують великі літери латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots$, а для позначення її елементів – малі літери з подвійною нижньою індексацією. Перше число в індексації вказує на номер рядка, а друге – на номер стовпчика, де розміщений елемент. Наприклад, елемент a_{12} розміщений у першому рядку і другому стовпчику матриці.

Крім зазначеного позначення матриці A розмірності $m \times n$ використовують простіші:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|,\ A = \left| a_{ij} \right|,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\ \text{, або}\ \underset{m\times n}{A} = \left\| a_{ij} \right\|.$$

Приклади матриць:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\ \text{(розмірність } 2\times 3\text{)},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}\ \text{(розмірність } 3\times 2\text{)}.$$

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпчиків, то матрицю називають *квадратною*. Наприклад,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уявний відрізок, що сполучає верхній лівий кут і нижній правий кут квадратної матриці називають *головною діагоналлю матриці.* Іншу діагональ називають *побічною*.

Квадратну матрицю називають *діагональною*, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицю називають *одиничною*, якщо вона діагональна і всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1. Позначають E. Наприклад,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонування матриці. Заміну рядків матриці на стовпчики і навпаки називають *транспонуванням матриці*. Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Множення двох матриць. Для того, щоб матрицю A помножити на матрицю B, потрібно, щоб вони були узгоджені для множення: кількість стовпців матриці A повинна дорівнювати кількості рядків матриці B.

Добутком двох матриць $\underset{m\times k}{A}$ *і* $\underset{k\times n}{B}$ називають матрицю $\underset{m\times n}{C} = \left\| c_{ij} \right\|$, елементи якої знаходять за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + +a_{i3}b_{3j} \ldots + a_{ik}b_{kj},$$

тобто елемент c_{ij} є сумою добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A і j-го стовпчика матриці B.

Приклад. Знайти добуток $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Кількість стовпчиків матриці A дорівнює 3 і кількість рядків матриці B дорівнює 3. Тому добуток $C = A \cdot B$ можна знайти, причому $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} = \underset{2\times 2}{C}$, тобто матриця C матиме розмірність 2×2. Знайдемо елементи матриці C:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = -3;$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = -1;$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -3;$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = -2.$$

Отже,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти добутки: $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Оскільки кількість стовпчиків матриці A дорівнює 3 і кількість рядків матриці B дорівнює 3, то добуток $C = A \cdot B$ можна знайти. Причому $\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{B} = \underset{3\times 1}{C}$, тобто матриця C матиме розмірність 3×1.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток $B \cdot A$. Оскільки кількість стовпчиків матриці B дорівнює 1, а кількість рядків матриці A дорівнює 3, то добуток $B \cdot A$ не існує.

2.2. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

Матрицю A^{-1} називають *оберненою до квадратної матриці* A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Не для кожної матриці існує обернена матриця. Якщо $|A| = 0$, то для матриці A не існує оберненої матриці.

Якщо $|A| \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} і її можна знайти за таким алгоритмом:

1. Обчислити $|A|$.
2. Знайти матрицю A^T, транспоновану до матриці A.
3. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij}^T всіх елементів матриці A^T.
4. Записати обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Щоб з'ясувати, чи правильно знайдено матрицю A^{-1}, потрібно перевірити справедливість рівності $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Систему (1.1) можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді система (1.3) набере вигляду

$$A \cdot X = B. \tag{2.3}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв’язок системи (1.4) є таким:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.4}$$

Отже, щоб розв’язати систему (1.1) матричним методом, потрібно:

1. Знайти матрицю A^{-1} (за умови, що $|A| \neq 0$).

2. Виконати множення $A^{-1} \cdot B$; одержаний вектор-стовпчик і буде вектором-стовпчиком розв’язків заданої системи.

Приклад. Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді і розв’язати матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв’язок. Матричний вигляд заданої системи є таким:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести позначення:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

то цей вигляд буде таким: $A \cdot X = B$.

Розв'яжемо задану систему матричним методом. Спочатку знайдемо матрицю A^{-1}, обернену матрицю до матриці A. Для цього використаємо алгоритм знаходження оберненої матриці, наведений вище.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 8 - 6 - 12 + 5 - 8 = -3$.

Оскільки $|A| \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 1;$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-5 + 6) = -1;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1;$$

$$A_{21}^T=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-(5+8)=-13;$$

$$A_{22}^T=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10-12=-2;$$

$$A_{23}^T=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4-3)=7;$$

$$A_{31}^T=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-4=-6;$$

$$A_{32}^T=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-(-4+4)=0;$$

$$A_{33}^T=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2+1=3.$$

4. Запишемо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T\\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T\\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -13 & -2 & 7\\ -6 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Для того, щоб знайти вектор-стовпчик X розв’язків заданої системи, виконаємо множення $A^{-1}\cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ \frac{13}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 7 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, звідки маємо: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

Відповідь: $(2;3;1)$.

Питання до Лекції 1.

1. Визначники 2-го порядку.
2. Визначники 3-го порядку.
3. Мінор M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ.
4. *Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ.*
5. Властивості визначників.
6. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. Метод Крамера розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
8. Матриці: означення, одиничні, квадратні, діагональні матриці.
9. Дії над матрицями. Додавання, віднімання, множення матриць.
10. Обернена матриця.
11. Матричний метод розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.