Лекція №3.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (продовження, для самостійного опрацювання)

План.

1.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

2.2. Матричний метод розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

3.3. Ранг матриці.

Сумісність і визначеність системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системою n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Розв'язком системи (1.1) є впорядкований набір з n чисел $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, при підстановці яких в (1.1) замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно кожне з рівнянь системи перетвориться на правильну рівність.

2.2. Матричний метод розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

Матрицю A^{-1} називають *оберненою до квадратної матриці* A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

(2.1)

Щоб з'ясувати, чи правильно знайдено матрицю A^{-1}, потрібно перевірити справедливість рівності $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Систему (1.1) можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді система (1.3) набере вигляду

$$A \cdot X = B. \tag{2.3}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи є таким:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.4}$$

Отже, щоб розв'язати систему (1.1) матричним методом, потрібно:

1. Знайти матрицю A^{-1} (за умови, що $|A| \neq 0$).
2. Виконати множення $A^{-1} \cdot B$; одержаний вектор-стовпчик і буде вектором-стовпчиком розв'язків заданої системи.

Приклад. Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді і розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язок. Матричний вигляд заданої системи є таким:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести позначення:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

то цей вигляд буде таким: $A \cdot X = B$.

Розв'яжемо задану систему матричним методом. Спочатку знайдемо матрицю A^{-1}, обернену матрицю до матриці A. Для цього використаємо алгоритм знаходження оберненої матриці, наведений вище.

1. $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 8 - 6 - 12 + 5 - 8 = -3.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця.

2. $$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. $A_{11}^T=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 5-(-2)\cdot(-2)=1;$

$$A_{12}^T=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-(-5+6)=-1;$$

$$A_{13}^T=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2-3=-1;$$

$$A_{21}^T=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-(5+8)=-13;$$

$$A_{22}^T=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10-12=-2;$$

$$A_{23}^T=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-4-3)=7;$$

$$A_{31}^T=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-4=-6;$$

$$A_{32}^T=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-(-4+4)=0;$$

$$A_{33}^T=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2+1=3.$$

4. Запишемо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T\\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T\\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -13 & -2 & 7\\ -6 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб знайти вектор-стовпчик X розв'язків заданої системи, виконаємо множення $A^{-1} \cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ \frac{13}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 7 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, звідки маємо: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1$.

Відповідь: $(2;3;1)$.

3.3. Ранг матриці.
Сумісність і визначеність системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Існує ще один спосіб дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність і визначеність. За допомогою рангу матриці.

Розглянемо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці A у довільний спосіб зафіксувати k рядків і k стовпчиків ($k \le n$, $k \le m$), то елементи, які стоять на їх перетині, утворять квадратну матрицю k-го порядку.

Визначник цієї матриці буде мінором k –го порядку матриці A.

У матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

існує 12 мінорів першого порядку (це визначники першого порядку, які збігаються з елементами матриці), 18 мінорів другого порядку і 4 мінори третього порядку.

Рангом матриці A називають найвищий порядок мінорів, що відмінні від нуля. Ранг матриці A позначають $r(A)$. За означенням ранг матриці шукати важко. Існує інший спосіб, який ґрунтується на таких теоремах.

Теорема 1. При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Теорема 2. Ранг матриці ступінчастого вигляду дорівнює кількості ненульових рядків.

Звідси випливає алгоритм знаходження рангу матриці A.

1. Елементарними перетвореннями рядків або стовпчиків звести матрицю до ступінчастого вигляду.
2. Ранг матриці A дорівнює кількості ненульових рядків відповідної матриці ступінчастого вигляду.

Приклад 3. Знайти ранг матриці

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-3)+III \\ I\cdot(-4)+IV \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ III:(-2) \\ IV:(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II+III \\ IV+III \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(B)=2$.

Теорема 3 (Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранги основної і розширеної матриці збігалися.

Теорема 4. (критерій визначеності). Для того, щоб сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь була визначеною, необхідно й достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих, що входять у цю систему.

На основі цих двох теорем можна сформулювати алгоритм дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність та визначеність.

1. Знайти $r(A)$ та $r(\overline{A})$. ($\overline{A}$ – розширена матриця системи). Якщо $r(A)\neq r(\overline{A})$, то система несумісна і алгоритм завершено. Якщо ж $r(A)=r(\overline{A})$, то система сумісна і переходимо до другого кроку.
2. Якщо $r(A)=n$, де n – кількість невідомих, то система визначена. Якщо $r(A)\neq n$, то система невизначена.

Приклад4 **.** Дослідити систему на сумісність та визначеність:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв’язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ I\cdot(-2)+II \\ I-III \\ I\cdot(-3)+IV \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ II\cdot 2+III\cdot 3 \\ II\cdot(-3)+IV \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) III + IV \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=3$ і $r(\overline{A})=3\,r$, то система сумісна. Кількість невідомих $n=3$ і $r(A)=3$, тобто $r(A)=n$. Це означає, що система визначена.

Приклад5 Перевірити сумісність лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1-6=5\neq 0$$

Rank A = 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

Rank A^* = 3.

Система несумісна.

Приклад 6 Перевірити сумісність лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1-4x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases}$$

Розв'язок.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{Rank } A = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad \text{Rank } A^* = 2.$$

Система сумісна. Розв'язок: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

3.3. Ранг матриці.
Сумісність і визначеність системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Існує ще один спосіб дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність і визначеність. За допомогою рангу матриці.

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці A у довільний спосіб зафіксувати k рядків і k стовпчиків ($k \le n$, $k \le m$), то елементи, які стоять на їх перетині, утворять квадратну матрицю k-го порядку. Визначник цієї матриці буде мінором k –го порядку матриці A.

У матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

існує 12 мінорів першого порядку (це визначники першого порядку, які збігаються з елементами матриці), 18 мінорів другого порядку і 4 мінори третього порядку.

Рангом матриці А називають найвищий порядок мінорів, що відмінні від нуля. Ранг матриці A позначають $r(A)$. За означенням ранг матриці шукати важко. Існує інший спосіб, який ґрунтується на таких теоремах.

Теорема 1. При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Теорема 2. Ранг матриці ступінчастого вигляду дорівнює кількості ненульових рядків.

Звідси випливає алгоритм знаходження рангу матриці A.

3. Елементарними перетвореннями рядків або стовпчиків звести матрицю до ступінчастого вигляду.

4. Ранг матриці A дорівнює кількості ненульових рядків відповідної матриці ступінчастого вигляду.

Приклад 3. Знайти ранг матриці

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-3)+III \\ I\cdot(-4)+IV \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ III:(-2) \\ IV:(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II+III \\ IV+III \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(B)=2$.

Теорема 3 (Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранги основної і розширеної матриці збігалися.

Теорема 4. (критерій визначеності). Для того, щоб сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь була визначеною, необхідно й достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих, що входять у цю систему.

На основі цих двох теорем можна сформулювати алгоритм дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність та визначеність.

3. Знайти $r(A)$ та $r(\overline{A})$. ($\overline{A}$ – розширена матриця системи). Якщо $r(A)\neq r(\overline{A})$, то система несумісна і алгоритм завершено. Якщо ж $r(A)=r(\overline{A})$, то система сумісна і переходимо до другого кроку.
4. Якщо $r(A)=n$, де n – кількість невідомих, то система визначена. Якщо $r(A)\neq n$, то система невизначена.

Приклад4 **.** Дослідити систему на сумісність та визначеність:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ I\cdot(-2)+II \\ I-III \\ I\cdot(-3)+IV \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ II\cdot 2+III\cdot 3 \\ II\cdot(-3)+IV \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)_{III+IV} \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=3$ і $r(\overline{A})=3\,r$, то система сумісна. Кількість невідомих $n=3$ і $r(A)=3$, тобто $r(A)=n$. Це означає, що система визначена.

Приклад5 Перевірити сумісність лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1-6=5\neq 0$$

Rank A = 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

Rank A^* = 3.

Система несумісна.

Приклад 6 Перевірити сумісність лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1-4x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases}$$

Розв'язок.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{Rank } A = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{Rank } A^* = 2.$$

Система сумісна. Розв'язок: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Птання до Лекції 3

1. Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Метод Гауса.
3. Сумісність СЛАР.