Національний університет біоресурсів
і природокористування України

Кафедра вищої та прикладної математики

Методичні вказівки та завдання для самостійного опрацювання з лінійної алгебри
СЛАР

(денна форма навчання)

Київ – 2020

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Обернена матриця. Ранг матриці.

Системою n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Розв'язком системи (3.1) є впорядкований набір з *n* чисел $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, при підстановці яких в (3.1) замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно кожне з рівнянь системи перетвориться на правильну рівність.

3.1. Метод Крамера розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ .... & ..... & ..... & ... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– основний визначник системи; Δ_1, Δ_2,…, Δ_n – визначники, які одержують із Δ шляхом заміни відповідно 1, 2, …, *n*-го стовпчиків на стовпчик вільних членів.

Теорема Крамера. Якщо основний визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (3.1) має єдиний розв'язок $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, де $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$. Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_i \neq 0$, то система (1.1) розв'язків не має. Якщо $\Delta = 0$ і кожен з визначників $\Delta_i = 0$, то система (1.1) або має безліч розв'язків, або розв'язків не має.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}.$$

<u>*Розв'язок.*</u> Використаємо метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30 + 3 - 10 - 4 + 25 + 9 = -7 \neq 0.$$

Оскільки основний визначник системи не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок. Знайдемо його.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 9 - 2 - 12 + 5 - 3 = 7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 3 + 30 - 2 - 25 - 27 = -42;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 1 - 5 - 2 + 15 - 3 = -14;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-42}{-7} = 6; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Відповідь: $(-1; 6; 2)$.

3.2. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

Матрицю A^{-1} називають *оберненою до квадратної матриці* A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Не для кожної матриці існує обернена матриця. Якщо $|A| = 0$, то для матриці A не існує оберненої матриці.

Якщо $|A| \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} і її можна знайти за таким алгоритмом:

1. Обчислити $|A|$.
2. Знайти матрицю A^T, транспоновану до матриці A.
3. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij}^T всіх елементів матриці A^T.
4. Записати обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Щоб з'ясувати, чи правильно знайдено матрицю A^{-1}, потрібно перевірити справедливість рівності $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Систему (3.1) можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Введемо позначення:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots & \ldots.. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді система (3.3) набере вигляду

$$A\cdot X=B. \tag{3.4}$$

Якщо $|A|\neq 0$, то розв'язок системи (1.4) є таким:

$$X=A^{-1}\cdot B. \tag{3.5}$$

Отже, щоб розв'язати систему (3.1) матричним методом, потрібно:

1. Знайти матрицю A^{-1} (за умови, що $|A|\neq 0$).
2. Виконати множення $A^{-1}\cdot B$; одержаний вектор-стовпчик і буде вектором-стовпчиком розв'язків заданої системи.

Приклад 2. Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді і розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=4; \\ x_1+x_2-2x_3=3; \\ 4x_1-2x_2+5x_3=7. \end{cases}$$

<u>Розв'язок.</u> Матричний вигляд заданої системи є таким:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести позначення:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

то цей вигляд буде таким: $A \cdot X = B$.

Розв'яжемо задану систему матричним методом. Спочатку знайдемо матрицю A^{-1}, обернену матрицю до матриці A. Для цього використаємо алгоритм знаходження оберненої матриці, наведений вище.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 8 - 6 - 12 + 5 - 8 = -3$.

Оскільки $|A| \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 1;$

$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-5 + 6) = -1;$

$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1;$

$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 8) = -13;$

$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2;$

$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 3) = 7;$

$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6;$

$$A_{32}^{T}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-(-4+4)=0;$$

$$A_{33}^{T}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2+1=3.$$

4. Запишемо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}^{T} & A_{12}^{T} & A_{13}^{T}\\ A_{21}^{T} & A_{22}^{T} & A_{23}^{T}\\ A_{31}^{T} & A_{32}^{T} & A_{33}^{T}\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -13 & -2 & 7\\ -6 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Для того, щоб знайти вектор-стовпчик X розв'язків заданої системи, виконаємо множення $A^{-1}\cdot B$:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 7\\ \frac{13}{3}\cdot 4+\frac{2}{3}\cdot 3+\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot 7\\ 2\cdot 4+0\cdot 3+(-1)\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отже, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$, звідки маємо: $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=1$.

Відповідь: $(2;3;1)$.

3.3. Ранг матриці.
Сумісність і визначеність системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Існує ще один спосіб дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність і визначеність. За допомогою рангу матриці.

Розглянемо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці A у довільний спосіб зафіксувати k рядків і k стовпчиків ($k \le n$, $k \le m$), то елементи, які стоять на їх перетині, утворять квадратну матрицю k-го порядку. Визначник цієї матриці буде мінором k –го порядку матриці A.

У матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

існує 12 мінорів першого порядку (це визначники першого порядку, які збігаються з елементами матриці), 18 мінорів другого порядку і 4 мінори третього порядку.

Рангом матриці A називають найвищий порядок мінорів, що відмінні від нуля. Ранг матриці A позначають $r(A)$. За означенням ранг матриці шукати важко. Існує інший спосіб, який ґрунтується на таких теоремах.

Теорема 1. При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Теорема 2. Ранг матриці ступінчастого вигляду дорівнює кількості ненульових рядків.

Звідси випливає алгоритм знаходження рангу матриці A.

1. Елементарними перетвореннями рядків або стовпчиків звести матрицю до ступінчастого вигляду.
2. Ранг матриці A дорівнює кількості ненульових рядків відповідної матриці

ступінчастого вигляду.

Приклад 3. Знайти ранг матриці

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-3)+III \\ I\cdot(-4)+IV \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ III:(-2) \\ IV:(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ II+III \\ IV+III \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(B)=2$.

Теорема 3 (Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранги основної і розширеної матриці збігалися.

Теорема 4. (критерій визначеності). Для того, щоб сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь була визначеною, необхідно й достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих, що входять у цю систему.

На основі цих двох теорем можна сформулювати алгоритм дослідження системи лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність та визначеність.

1. Знайти $r(A)$ та $r(\overline{A})$. ($\overline{A}$ – розширена матриця системи). Якщо $r(A)\neq r(\overline{A})$, то система несумісна і алгоритм завершено. Якщо ж $r(A)=r(\overline{A})$, то система сумісна і переходимо до другого кроку.
2. Якщо $r(A)=n$, де n – кількість невідомих, то система визначена. Якщо $r(A)\neq n$, то

система невизначена.

Приклад4 **.** Дослідити систему на сумісність та визначеність:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ I\cdot(-2)+II \\ I-III \\ I\cdot(-3)+IV \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ II\cdot 2+III\cdot 3 \\ II\cdot(-3)+IV \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ III+IV \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A) = 3$ і $r(\overline{A}) = 3\,r$, то система сумісна. Кількість невідомих $n = 3$ і $r(A) = 3$, тобто $r(A) = n$. Це означає, що система визначена.

Приклад5 Перевірити сумісність лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 11\end{vmatrix} = 1-6=5\neq 0 \qquad \text{Rank } A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{pmatrix} \quad \text{Rank } A^* = 3.$$

Система несумісна.

Приклад 6 Перевірити сумісність лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1\\ 3x_1 + 2x_2 = 4\\ 7x_1 + 10x_2 = 12\\ 5x_1 + 6x_2 = 8\\ 3x_1 - 16x_2 = -5\end{cases}$$

Розв'язок.

$$A = \begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\\ 7 & 10\\ 5 & 6\\ 3 & -16\end{pmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \qquad \text{Rank } A = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 4\\ 7 & 10 & 12\\ 5 & 6 & 8\\ 3 & -16 & -5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 14 & 7\\ 0 & 38 & 19\\ 0 & 26 & 13\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad \text{Rank } A^* = 2.$$

Система сумісна. Розв'язок: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Аудиторна робота

Виконайте завдання:

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

2. Визначити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Дослідити систему рівнянь на сумісність і визначеність і у випадку сумісності знайти її розв’язки:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

Домашня робота

Гл І №№ 151,154,162,181

Додаткові завдання

Гл І №№ 153,155,164,186

Продовження теми 3

3.4. Метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса, будемо виконувати три типи елементарних перетворень:

1. перестановка місцями двох рівнянь системи;
2. множення обох частин будь-якого рівняння на число, відмінне від нуля;
3. додавання до одного з рівнянь системи іншого її рівняння, помноженого на довільне число, відмінне від нуля.

При елементарних перетвореннях система лінійних алгебраїчних рівнянь переходить у рівносильну їй.

Зміст методу Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь проілюструємо на прикладах. Зауважимо, що цей метод по-іншому називають *методом послідовного виключення невідомих*.

Приклад 1**.** Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язок. Використовуючи метод Гауса, бажано зробити так, щоб у першому рівнянні системи коефіцієнт при невідомому x_1 дорівнював 1 або –1. Це дозволить уникнути виконання арифметичних операцій із дробами. З цією метою переставимо місцями перше і друге рівняння системи (це є елементарне перетворення під номером 1). Одержимо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_1 з другого і третього рівнянь системи. Для цього помножимо перше рівняння на (–2) і додамо до другого рівняння, помножимо перше рівняння на (–4) і додамо до третього рівняння (це є елементарне перетворення під номером 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; & I \cdot (-2) + II \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; & I \cdot (-4) + III \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2; \\ \quad -3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_2 з третього рівняння системи. Для цього помножимо друге рівняння на (–1) і додамо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2; \\ \quad -3x_2 - 4x_3 = 2; & II \cdot (-1) + III \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2; \\ \qquad -2x_3 = 4. \end{cases}$$

Задана система зведена до трикутного вигляду. Тому вона має єдиний розв’язок. Щоб його знайти використовують так звану обернену процедуру Гауса. З останнього рівняння знайдемо x_3 і, підставивши його у друге рівняння, знайдемо x_2. Підставивши знайдені значення x_3 і x_2 у перше рівняння, знайдемо x_1:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2; \\ \qquad -2x_3 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ \quad -3x_2 - 2 \cdot (-2) = -2; \\ \qquad x_3 = -2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + 2 \cdot (-2) = -1; \\ \qquad x_2 = 2; \\ \qquad x_3 = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Отже, $(1; 2; -2)$ – розв’язок заданої системи.

Відповідь: $(1; 2; -2)$.

Перетворення, які здійснюють при використанні методу Гауса, зручно виконувати не з рівняннями, а з розширеною матрицею, що містить коефіцієнти всіх рівнянь та стовпчик вільних членів.

Приклад 2. Розв’язати методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = -6; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю заданої системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Щоб уникнути громіздких обчислень зробимо перетворення, яке дозволить у першому рядку на місці елемента, що дорівнює 7, одержати елемент, що дорівнює 1. Для цього третій рядок помножимо на (–2) і додамо до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} III\cdot(-2)+I \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Далі будемо над рядками виконувати перетворення, вказані поруч з кожною матрицею. Тоді послідовно одержуватимемо такі матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-3)+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 7 & -5 & 29 \\ 0 & 8 & -10 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III:2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 7 & -5 & 29 \\ 0 & 4 & -5 & 23 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II\cdot 4+III\cdot(-7) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 7 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 15 & -45 \end{array}\right).$$

Запишемо і розв'яжемо систему рівнянь, яка відповідає останній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14; \\ 7x_2 - 5x_3 = 29; \\ 15x_3 = -45; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14; \\ 7x_2 - 5\cdot(-3) = 29; \\ x_3 = -3; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2\cdot 2 + 3\cdot(-3) = -14; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Відповідь: $(-1; 2; -3)$.

Аудиторна робота

Виконайте завдання:

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці, методом Крамера та методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса:

а) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 17; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -4; \\ 4x_1 - x_3 + 2x_4 = -3; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 = -1; \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + 9x_4 - x_5 = -4; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Домашня робота

Гл. I №№187,189,193

Додаткові завдання

Гл. I №№188,190,192

Тема 4 Елементи матричного аналізу. Приклади розв’язування прикладних задач

Задача 1 Лісопилка виготовляє чотири види продукції - А, В, С і D, використовуючи для виробництва кожної з них різну кількість двох видів матеріалів та відповідну кількість робочого часу. Кількісні показники занесені в таблицю:

Вироби	A	B	C	D
Одиниць матеріалу виду І	420	340	150	300
Одиниць матеріалу виду ІІ	210	180	0	85
Кількість робочих годин	90	100	110	70

За умовою задачі скласти матрицю. Указати розмір матриці. Пояснити її економічний зміст, а саме зміст кожного рядка і стовпця матриці.

Задача 2 За програмою будівельно-монтажних робіт буде споруджено:

- у галузі x_1 10 одиниць об’єктів типу І і 15 одиниць типу ІІ;
- у галузі x_2 20 одиниць об’єктів типу ІІІ;
- у галузі x_3 100 одиниць об’єктів типу IV.

Визначити витрати будівельних матеріалів типу p і q у кожній галузі, якщо норми витрат матеріалів наведені в таблиці:

Тип об’єкта	Норми витрат матеріалів	
	p	q
I	2	15
II	10	20
II	10	100
IV	5	50

Задача 3 (Модель міжгалузевого планування потреб і пропозицій)

У таблиці задані показники взаємних потреб і пропозицій між різними галузями промисловості

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	72	180
Витрати праці	20	24	72		

1) Визначити матрицю потреб-пропозицій A.

2) Припускаючи, що через 3 роки потреби інших галузей зростуть до 24, 33 та 75 (показники для галузей 1, 2, 3 відповідно), визначити скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

Розв'язок:

1) Елементи шуканої матриці потреб-пропозицій *A* дорівнюють відношенню потреб *i*-тої галузі до загальної кількості пропозицій цієї галузі. Тому для знаходження елементів *i*-го стовпця (i =1, 2, 3) матриці *A* треба поділити потреби *i*-тої галузі, вказаної в таблиці на загальну кількість пропозицій цієї галузі.

Таким чином, одержуємо матрицю потреб-пропозицій вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

2) Нехай E – одинична матриця третього порядку, D – матриця-стовпець нових потреб, X – матриця нових пропозицій, що відповідають новим потребам:

$$D = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{pmatrix}; \quad X = B^{-1} \cdot D, \text{ де } \; B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Для обчислення майбутніх пропозицій *X* залишилося знайти B^{-1}.

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix},$$

де $\det B = 0{,}336$, а алгебраїчні доповнення елементів матриці В: $B_{11} = 0{,}63$, $B_{12} = 0{,}33$; $B_{13} = 0{,}36$; $B_{21} = 0{,}35$; $B_{22} = 0{,}61$; $B_{23} = 0{,}36$; $B_{31} = 0{,}21$; $B_{32} = 0{,}27$; $B_{33} = 0{,}6$ – пропонується самостійно впевнитись в тому , що останні обчислення виконані вірно.

Отже, обернена матриця має вигляд

$$B^{-1} = \frac{1}{0{,}336} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}35 & 0{,}21 \\ 0{,}33 & 0{,}61 & 0{,}27 \\ 0{,}36 & 0{,}36 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Визначаємо *X* – матрицю нових пропозицій. $X = B^{-1} \cdot D$

$$X=\frac{1}{0{,}336}\cdot\begin{pmatrix}0{,}63 & 0{,}35 & 0{,}21\\ 0{,}33 & 0{,}61 & 0{,}27\\ 0{,}36 & 0{,}36 & 0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24\\33\\75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}126{,}25\\143{,}75\\195\end{pmatrix}$$

Відповідь: таким чином першій галузі треба виробити 126,25 одиниць продукції, другій галузі – 143,75, а третій потрібно виробити 195 одиниць продукції.

Завдання для самостійного опрацювання

Завдання1:

Для наступних матриць:

$$A=\begin{pmatrix}n+1 & n-2 & n+3\\ 2n-1 & 3n-1 & 4n\\ 2n & 0 & n+2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}n+2 & 3n+2 & 6n\\ -n & -n+3 & 5n-2\\ n & n-4 & 5-n\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}7-n & 4+n & 7-n\\ 3n+3 & 2n-4 & 2-3n\\ 2n-2 & 3n & 6n\end{pmatrix},$$

де n - номер варіанту студента за списком, знайти:

1. $3A-2C+4B$;
2. $A^{-1};B^{-1}$;
3. $A^{-1}-2B^{-1}$;
4. $C\cdot B$;
5. $(A-C)\cdot B$.

Завдання2: Розв’язати систему рівнянь

а) за формулами Крамера;

б) метод Гауса;

в) матричним способом

№1 $\begin{cases}5x+8y-z=7;\\ x+2y+3z=1,\\ 2x-3y+2z=9.\end{cases}$

№2 $\begin{cases}x+2y+z=4;\\ 3x-5y+3z=1;\\ 2x+7y-z=8.\end{cases}$

№3 $\begin{cases}3x+2y+z=5;\\ 2x+3y+z=1;\\ 2x+y+3z=11.\end{cases}$

№4 $\begin{cases}x+2y+4z=31;\\ 5x+y+2z=29;\\ 3x-y+z=10.\end{cases}$

№5 $\begin{cases}4x-3y+2z=9;\\ 2x+5y-3z=4;\\ 5x+6y-2z=18.\end{cases}$

№6 $\begin{cases}2x-y-z=4;\\ 3x+4y-2z=11;\\ 3x-2y+4z=11.\end{cases}$

№7 $\begin{cases}x+y+2z=-1;\\ 2x-y+2z=-4;\\ 4x+y+4z=-2.\end{cases}$

№8 $\begin{cases}3x-y=5;\\ -2x+y+z=0;\\ 2x-y+4z=15.\end{cases}$

№9 $\begin{cases} 3x - y + z = 4; \\ 2x - 5y - 3z = -17; \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

№10 $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x - y + 6z = -1; \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

№11 $\begin{cases} 2x + y - z = 1; \\ x + y + z = 6; \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$

№12 $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3; \\ 3x + 4y - 5z = 8; \\ 2y + 7z = 17. \end{cases}$

№13 $\begin{cases} x + 5y + z = -7; \\ 2x - y - z = 0; \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$

№14 $\begin{cases} x - y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 16; \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$

№15 $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8; \\ 2x - y - 3z = -1; \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

№16 $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7; \\ x + 3y - 2z = 0; \\ 2y - z = 2. \end{cases}$

№17 $\begin{cases} 2x + y + 4z = 20; \\ 2x - y - 3z = 3; \\ 3x + 4y - 5z = -8. \end{cases}$

№18 $\begin{cases} x - y = 4; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

№19 $\begin{cases} x + 5y - z = 7; \\ 2x - y - z = 4; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

№20 $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2; \\ 2x + 5y - 5z = 0; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

№21 $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18; \\ x - y - z = 3; \\ x + y + 2z = -2. \end{cases}$

№22 $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1; \\ x + z = 0; \\ x - y - z = 2. \end{cases}$

№23 $\begin{cases} x - 2y - 2z = 3; \\ x + y - 2z = 0; \\ x - y - z = 1. \end{cases}$

№24 $\begin{cases} 3x + y - 5z = -7; \\ 2x - 3y + 4z = -1; \\ 5x - y + 3z = 0. \end{cases}$

№25 $\begin{cases} x - 2y + z = 15; \\ 2x + y + 3z = 9; \\ 2x + 3y + 2z = -2. \end{cases}$

№26 $\begin{cases} 2x - y - 2z = 1; \\ 3x + 2y + z = 1; \\ 2x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$

№27 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5; \\ 3x + 4y - z = 3; \\ 4x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$

№28 $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9; \\ x + 2y + z = 3; \\ 3x + y - z = -1. \end{cases}$

№29 $\begin{cases} 3x + y - 2z = 4; \\ 2x - 3y + z = 9; \\ 5x + y + 3z = -4. \end{cases}$

№30 $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4; \\ x + 3y - z = 2; \\ 5x + 2y + z = 5. \end{cases}$

Література

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман / Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 471 с.
2. Данко П.Е., Кожевникова Т.Я., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. – М.: Высшая Школа, 1997. – 304 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
5. Рогов А.Т. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1973. – 248 с.
6. Сулима І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А. Вища математика. Ч.І. – К.:НАУ, 2003. – 216 с.
7. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 288 с.