Лекція 5
Вступ до математичного аналізу

Застосування функцій в економічній теорії.

Тема 1.1. Функція та послідовність. Границя послідовності

Мета. Дати поняття функції та послідовності як функції на множинні натуральних чисел. Розглянути їх властивості та застосування.

План.

1. Поняття про функцію. Область визначення та область існування функції.
2. Способи задання функції.
3. Обернена та складена функції.
4. Класи елементарних функцій.
5. Числові послідовності та їх границі.
6. Основні теореми про границю числових послідовностей.

1. Нехай задано дві множини E та F. Якщо відоме правило (закон), за яким елементам множини E ставляться у відповідність елементи множини F, то кажуть, що *множина E відображається у множину F*. Якщо кожному елементові множини E ставиться у відповідність один і лише один елемент множини F, то кажуть, що задано *взаємнооднозначне відображення множини E у множину F*.

Нехай дано множину E дійсних чисел. *Якщо кожному числу $x \in E$ за певним законом потавлено у відповідність одне дійсне число y, то кажуть, що на множині E задана (визначена) функція, і записують $y=f(x)$* (ігрек дорівнює еф від ікса). x називають *незалежною змінною* або *аргументом,* а *y - залежною змінною*, або *функцією*. Множина E при цьому називається *областю існування,* або *областю визначення* функції $y=f(x)$.

Щоб задати функцію, треба мати , по-перше, область визначення функції (конкретну множину, скінчену чи нескінчену), і, по-друге, закон відповідності.

Дві функції вважаються рівними або тотожними, якщо в них одна і та сама область визначення і один закон відповідності. Наприклад, функції $f(x)=lgx^2, x\in(0;+\infty)$, і $\varphi(x)=2lgx, x\in(0;+\infty)$ є тотожними. Проте функція $f(x)=lgx^2,\ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, і функція $\varphi(x)=2lgx, x\in(0;+\infty)$ не тотожні, бо мають різну область визначення.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині E і x_0 - довільна точка множини E, то число y_0, якому функція f поставила у відповідність точку x_0 ($y_0=f(x_0)$) називається значенням функції в точці x_0. Множина всіх таких значень заданої функції називається множиною значень або областю існування функції і традиційно позначається E(f).

Ін'єкцією (*ін'єктивним відображенням, ін'єктивною функцією*) називається таке співвідношення між елементами двох множин, яке різним елементам з першої множини (області визначення) ставить у відповідність **різні** елементи з другої множини (області значень).

Сюр'єкція (*сюр'єктивне відображення, сюр'єктивна функція, відображення на…*) — це відповідність між двома множинами, в якій кожному елементу другої множини (області значень) ставиться у відповідність один (або більше) елементів першої множини (області визначення).

Бієкція (*бієктивна функція, бієктивне відображення, взаємно однозначна відповідність*) — це відображення, яке є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним.

Розглянемо прямокутну декартову систему координат на площині. На осі абсцис відкладемо множину, що відповідає множині E і побудуємо точку M($x,f(x)$). При переміщені точки *x* вздовж множини Е точка М описує деяку лінію. Ця лінія називається *графіком функції f(x).*

Основними характеристиками функції є її *парність чи непарність, періодичність чи неперіодичність, монотонність на проміжках області визначення* (пригадайте ці поняття з шкільного курсу).

2. Функція може бути задана багатьма способами. Розглянемо деякі з них.

1). Аналітичний спосіб. Як правило, функція задається за допомогою формули. У цьому випадку областю визначення є множина всіх точок *x*, при яких математичний вираз має зміст.

Наприклад, $y=\sqrt{\lg\frac{7x-x^2}{10}}$. Знайдемо область визначення

$$\begin{cases}\lg\frac{7x-x^2}{10}\ge 0;\\ \frac{7x-x^2}{10}>0.\end{cases}$$

Після розв'язання першого рівняння системи отримаємо $x\in[2;5]$, а після розв'язання другого - $x\in(0;7)$. Остаточний розв'язок $x\in[2;5]$.

2). Графічний спосіб. У цьому випадку відповідність між значеннями *x* та *y* встановлюється за допомогою заданого графіка, по якому для кожного значення *x* можна визначити значення *y* і навпаки (проте – тыльки наближено!!). Графічне зображення відтворює загальний процес проходження модельованого процесу в його розвиткові.

На практиці графічне подання функції спостерігаємо під час роботи приладів-самописців (наприклад електрокардіограма, барограф тощо).

3). Алгоритмічний чи машинний спосіб. В цьому випадку задається алгоритм чи програма, яка для кожного значення *x* обраховує відповідне йому значення *y=f(x).* Часто така програма закладена в пам'ять ПК чи калькулятора і обчислює значення функції автоматично (наприклад, калькулятор обраховує значення синуса, косинуса, експотенціальної функції і т.д.). Для сучасних мов програмування такий спосіб характерний для модулів (Паскаль) чи бібліотек (C++, Java).

4). Табличний спосіб. Функція задається у вигляді таблиці деяких значень аргументу і відповідних їм значень функції. Відомі чотиризначні таблиці Брадіса, які подають значення для функцій $y=x^2$, $y=lgx$, $y=1/x$, тригонометричних функцій тощо.

На практиці таке задання часто спостерігаємо при проведенні дослідів з фізики, різноманітних спостереженнях.

5). Словесний спосіб. Функція чи її властивості описуються реченнями.

Наприклад, «*f(x)* дорівнює цілому числу, яке не перевищує *x*». З слів ясно, що *f(2,4)=2; f(4)=4; f(-3,7)=-4* ... Ця функція позначається *f(x)*=[*x*] (ціла частина від *x*) і має назву функції Антьє.

Якщо функція задана аналітичним рівнянням *y=f(x),* то вона називається **явно заданою**: $y=3x-4$, $y=x^2-sinx$.

Якщо функція задана аналітичним рівнянням виду *F(x,y)=0,* то вона називається **неявно заданою**: $2y+3x-4=0$, $y^2-sinx+xy=0$.

3. Означення. Функція, задана у вигляді *y=f(g(x)),* називається **складеною функцією**, утвореною з функцій *f* і *g*, або суперпозицією функцій *g* і *f*. Складену функцію часто записують у вигляді

y=f(u), де u=g(x).

При цьому аргумент x називають незалежною змінною, а u - проміжним аргументом. Наприклад, $y=cos(3x+2)$ є складеною функцією, утвореною з функцій $f(u)=cosu$ і $u=g(x)=3x+2;$ функція $y=2lg(3x-1)^2+6$ можна розписати як $y=f(u)=2u+3,\ u=g(v)=lgv,\ v=h(m)=m^2,\ m=k(x)=3x-1.$

Нехай задано функцію $y=f(x).$

Якщо кожному значенню функції y з множини значень E(f) відповідає одне і тільки одне значення аргументу x з області D(f), таке, що $y=f(x),$ то кажуть, що функція $y=f(x)$ є **оборотною**.

Якщо функція $y=f(x)$ є оборотною, то функція $x=g(y),$ де y - аргумент, а x - функція є **оберненою** до функції $y=f(x).$ Причому область значень функції співпадає з областю визначення функції, оберненої до неї, і навпаки.

З означення слідують тотожності: $y=f(g(y))$, $x=g(f(x))$. Якщо для позначення використовувати для аргументу символ x, а для функції символ y, то отримаємо формулу $y=g(x)$. Обернена функція часто позначається символом f^{-1}. Зрозуміло, що функції f та f^{-1} взаємнообернені. Графіки взаємнообернених функцій симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів.

4. Функції

- степенева $y=x^{\alpha};$
- показникова $y=a^x,\ (a>0,\ a\neq 1);$
- логарифмічна $y=log_a x,\ (a>0,\ a\neq 1);$
- тригонометричні $y=sinx;\ y=cosx;\ y=tgx;\ y=ctgx;$
- обернені тригонометричні $y=arcsinx;\ y=arccosx;\ y=arctgx;\ y=arcctgx;$
- стала функція $y=c$

називаються *основними елементарними функціями*.

Основні елементарні функції, а також ті, які отримані з допомогою скінченного числа арифметичних дій і суперпозицій елементарних функцій називаються *елементарними функціями.*

Елементарні функції поділяються на такі класи:

1). Цілі раціональні функції. Це функції вигляду

$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, де a_k $(k=1,2,...,n)$- сталі дійсні числа. Цілі раціональні функції часто називають алгебраїчними многочленами, числа - їх коефіцієнтами, а якщо $a_n\neq 0,$ то число n- степенем многочлена.

2). Раціональні (дробово-раціональні) функції. Функції вигляду $y=f/g$, де $f=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,$ а $g=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m$ - цілі раціональні функції, тобто є часткою цілих раціональних функцій. Якщо $m=0$ і $b_0\neq 0$, то раціональна функція є ціла раціональна функція. Якшо функція не є цілою, то вона називається дробово - раціональною.

3). Ірраціональні функції. Це функції, задані за допомогою суперпозицій раціональних функцій, степеневих функцій з раціональними показниками і чотирьох арифметичних дій, застосованих скінчене число раз.

4). Алгебраїчні функції. Функція y від x називається алгебраїчною, якщо вона задовольняє рівняння

$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+...+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0,$ де $P_k(x)$- алгебраїчні многочлени від x.

Всі раціональні та ірраціональні функції є алгебраїчними.

5). Функції, які не є алгебраїчними називаються трансцендентними. Можна показати, що тригонометричні, обернено тригонометричні, показникова і логарифмічна функції, а також їх суперпозиції і функції, утворені з них за допомогою дій є трансцендентними.

5. *Нескінченною числовою послідовністю* називається числова функція *f*, задана на множині натуральних чисел (*N*). Позначають. як правило, $a_n=f(n)$. $a_1, a_2, ..., a_n,...$ a_1- перший член послідовності, a_n- n-ий або загальний член послідовності.

Послідовність можна задати

- формулою: $a_n = \dfrac{3n}{n^2}$; тоді $a_1=3$, $a_2=6/4$, $a_3=6/9$...

- рекурентно (індуктивно), тобто задати кілька початкових значень і рекурентне співвідношення, за допомогою якого кожен наступний член виражається через попередні:

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_n= a_{n-1}+ a_{n-2}.$$

Отримаємо послідовність чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... Така послідовність називається числами Фібоначчі.

Послідовність називається *зростаючою* (*спадною*), якщо кожен наступний її член більший (менший) від попереднього.

Послідовність називається *неспадною* (*незростаючою*), якщо кожен наступний її член більший чи рівний (менший чи рівний) від попереднього.

Послідовність називається *обмеженою зверху*, якщо існує таке число М, що $\forall n$: $a_n \le M$.

Послідовність називається *обмеженою знизу*, якщо існує таке число m, що $\forall n$: $a_n \ge m$.

Послідовність називається *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

Число А називається *границею послідовності* a_n ($\{a_n\}$), якщо для будь- якого $\varepsilon>0$, існує номер N_0, що для всіх номерів, більших за N_0 справджується нерівність:$|a_n - A|<\varepsilon$. Записують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. Послідовність, яка має границю називається *збіжною*; яка не має границі- *розбіжною.*

Приклад:

Довести, що границею послідовності (2n+5)/n є число 2.

Розв'язок:

Для доведення досить показати, що існує номер N, що для всіх номерів, що його перевищують модуль різниці (2n+5)/n і числа 2 менший за ε.

(2n+5)/n - 2= (2n+5-2n)/n=5/n; 5/n<ε, то n>5/ε. Таким номером, наприклад, для числа ε =0,0001 ,буде n=50000.

6. Для числових послідовностей справедливі наступні твердження.

Теорема 1. Якщо послідовність має границю, то вона обмежена.

Теорема 2. Кожна послідовність має не більш як одну границю.

<u>Означення</u>. Послідовність називають *нескінченно малою*, якщо її границя дорівнює нулю.

Теорема 3. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

<u>Доведення</u>.

Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$- нескінченно малі послідовності. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ існують N_1, N_2, такі, що

$$\forall n>N_1:\ |a_n|<\varepsilon/2 \qquad (1)$$

$$\forall n>N_2:\ |b_n|<\varepsilon/2 \qquad (2)$$

взявши $N=\max\{N_1, N_2\}$маємо, що $\forall n>N$ виконуються нерівності (1) і (2) одночасно. Тому $|a_n+ b_n|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. Отже, $\lim (a_n+ b_n)=0$.

Теорему доведено.

Теорема 4. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно мала послідовність**.**

Теорема 5. Нехай задано послідовність $\{a_n\}$. тоді, якщо $\lim_{n\to\infty} a_n$ =a, то $a_n=a+\alpha_n$, де $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ =0. І навпаки, якщо $a_n=a+\alpha_n$, то $\lim_{n\to\infty} a_n$ =a.

Теорема 6. Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$- збіжні, то їх сума $\{a_n+b_n\}$- також збіжна послідовність і $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Теорема 7. Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$- збіжні, то їх добуток $\{a_nb_n\}$- також збіжна послідовність і $\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)$.

Наслідок 1. Сталий множник можна винести за знак границі: $c\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(ca_n)$.

Наслідок 2. Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$- збіжні, то їх різниця $\{a_n-b_n\}$- також збіжна послідовність і $\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$.

Теорема 8. Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, де $b_n\neq0$ для всіх n, збіжні і $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$, то їх частка $\{a_n/b_n\}$- також збіжна послідовність і $\lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$.

Означення. Послідовність називається *нескінченно великою*, якщо для кожного додатнього A знайдеться таке N, що для всіх n>N виконується нерівність $|a_n|>A$. Границю такої послідовності вважають рівною нескінченності.

Надалі при формулюванні та доведенні теорем будемо застосовувати спеціальні позначення, які називають *кванторами.* Так, символ $\forall$ позначає поняття «для всіх», його ще називають *квантором загальності*, а символ $\exists$ позначає поняття «знайдеться», і його називають *квантором існування*. Символ $\exists!$ позначає поняття «існує, причому єдине».

Теорема 9. Якщо послідовність $\{a_n\}$, де $a_n\neq0$ для всіх n- нескінченно велика, то послідовність $\{1/a_n\}$- нескінченно мала і навпаки.

Доведення.

Нехай $\{a_n\}$- нескінченно велика послідовність. Тоді $(\forall A>0)\ \exists N(\forall n>N): |a_n|>A$. (1)

Приймемо $\varepsilon=1/A$, тоді з (1) випливає, що $1/|a_n|<1/A=\varepsilon$. Отже, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ =0 і послідовність є нескінченно малою.

Доведення другої частини проводиться в зворотному порядку. (Проведіть його).

Теорема (Вейєрштраса). Якщо числова послідовність зростає (спадає) і обмежена зверху (знизу) то вона має скінченну границю.

Контрольні запитання

1. Що таке відображення, функція, взаємнооднозначне відображення?
2. Що таке область визначення та множина значень функції?
3. Які є способи задання функції, їх основні характеристики?
4. Яка функція називається оберненою?
5. Яка функція називається складеною, що таке проміжний аргумент?
6. Які функції називаються основними елементарними, елементарними?
7. Назвати основні класи елементарних функцій.
8. Що називається числовою послідовністю?
9. Дати означення границі числової послідовності.
10. Яка послідовність є нескінченно малою, нескінченно великою?
11. Сформулювати основні теореми про границю числової послідовності.
12. Сформулювати і довести теорему про взаємозв’язок між нескінченно великими та нескінченно малими послідовностями.

Тема 1.2. Границя функції та її властивості. Перша та друга важливі границі

Мета. Розширити знання з теми «Границя функції», доповнити їх поняттям чудових границь та прикладами їх застосування. Дати основні теореми для обчислення границь елементарних функцій.

План.

1. Поняття границі функції. Односторонні границі.
2. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.
3. Основні теореми про границю функції.
4. Перша та друга важливі границі.

1. Розглянемо поняття околу точки *x*.

Околом точки x_0 називається будь- який проміжок (α, β), що містить цю точку.

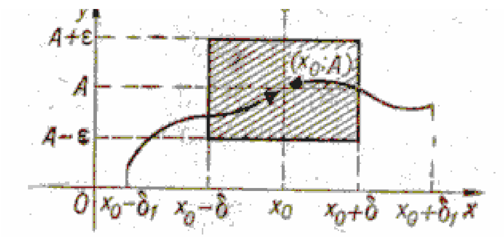
δ- околом точки x_0 називається інтервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, де $\delta>0$.

Околом плюс нескінченно віддаленої точки на прямій (позначатимемо її $+\infty$), називатимемо всякий інтервал $(\beta;+\infty)$, де $\beta>0$.

Околом мінус нескінченно віддаленої точки на прямій (позначатимемо її $-\infty$), називатимемо всякий інтервал $(-\infty; -\alpha)$, де $\alpha>0$.

Нехай функція f(x) визначена в деякому околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0.

Означення: Число А називається *границею* функції *f(x)* в точці x_0 (при $x\to x_0$), якщо для довільно вибраного $\varepsilon>0$ можна вказати таке $\delta>0$, що для всіх *x*, що задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначаємо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.



З геометричної точки зору це означає, що для будь - якого ε можна вказати такий δ-окіл, що якщо всі *x* з цього околу графік цієї функції буде лежати в стрічці шириною 2ε, від A-ε до A+ε.

Нехай функція f(x)визначена в околі $(\beta;+\infty)$ плюс нескінченно віддаленої точки. Число А називається *границею функції f(x) в плюс нескінченно віддаленій точці*, коли для довільно вибраного $\varepsilon>0$ можна вказати таке $x(\varepsilon)\geq\beta$, що для всіх x, що задовольняють умову $x(\varepsilon)<x<+\infty$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначаємо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ або $f(x)\to A$ $(x\to+\infty)$.

Аналогічно, нехай функція f(x)визначена в околі $(-\infty;-\alpha)$ мінус нескінченно віддаленої точки. Число А називається *границею функції f(x) в мінус нескінченно віддаленій точці*, коли для довільно вибраного $\varepsilon>0$ можна вказати таке $x(\varepsilon)\leq-\alpha$, що для всіх *x*, що задовольняють умову $-\infty< x< x(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначаємо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ або $f(x)\to A$ $(x\to-\infty)$.

Якщо функція f(x) має у плюс і мінус нескінченно віддалених точках однакові границі, то в цьому випадку символічний запис має вигляд $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Нехай функція f(x) визначена на проміжку $(x_0; x_0+\delta_1)$ (на проміжку $(x_0-\delta_1; x_0)$), де $\delta_1>0$. Число А називається *правою (лівою) границею* функції f(x) в точці x_0, якщо для довільно вибраного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що з нерівностей $0<x-x_0<\delta$ $(0<x_0-x<\delta)$, випливає нерівність |

f(x)-A|<ε. Позначаємо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$). Запис $x \to x_0-0$ ($x \to x_0+0$) означає, що точка x прямує до точки x_0 справа (зліва). Права та ліва границі функції називаються *односторонніми* границями функції в точці. Наступна теорема встановлює залежність між правою і лівою та границею функції в точці.

Теорема. Для того, щоб функція f(x) мала границю в точці x_0, необхідно і досить, щоб у цій точці функція f(x) мала праву і ліву границю і щоб права границя дорівнювала лівій.

2. Функція α(x) називається *нескінченно малою* при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 1. Якщо α(x) і β(x) нескінченно малі функції при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то їх сума (α(x)+β(x)) теж нескінченно мала функція при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

<u>Доведення.</u>

Нехай при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$. Для будь- якого $\frac{\varepsilon}{2}$>0 знайдеться δ_1 таке, що при $0<|x-x_0|<\delta_1$, випливає $|\alpha(x)|< \frac{\varepsilon}{2}$. Для цього ж $\frac{\varepsilon}{2}$>0 знайдеться δ_2 таке, що при $0<|x-x_0|<\delta_2$, випливає $|\beta(x)|< \frac{\varepsilon}{2}$. Позначимо δ- менше з двох чисел δ_1, δ_2. Тоді з нерівності $0<|x-x_0|<\delta$, випливає $|\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)|+ |\beta(x)|< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. А це означає, що сума двох нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Теорема справедлива і для скінченного числа доданків.

Аналогічно доводяться теореми.

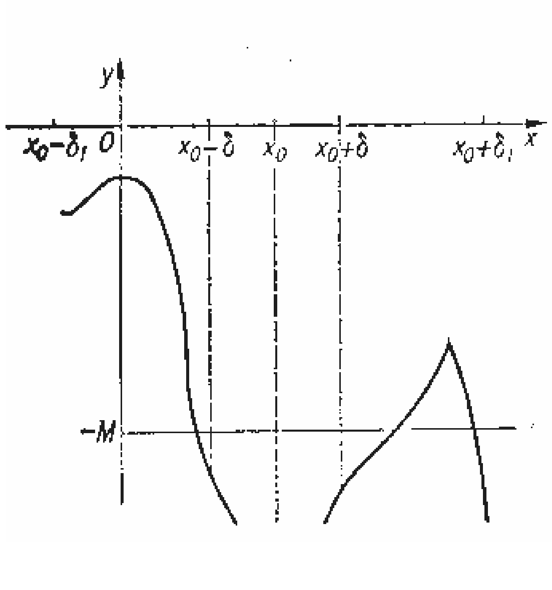
Теорема 2. Добуток нескінченно малої функції α(x) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), на функцію, обмежену при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) є функція нескінченно мала при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

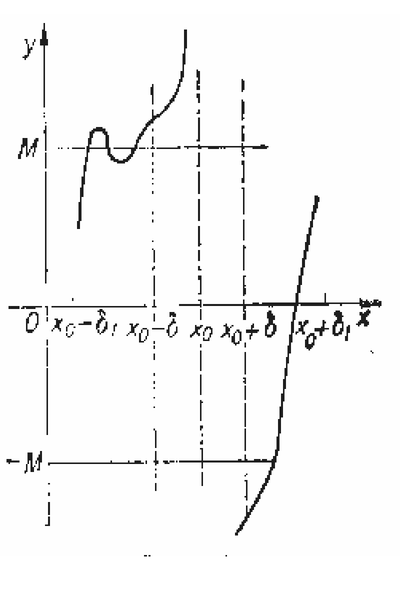
<u>**Наслідок 1**</u>. Добуток двох нескінченно малих функцій при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) є функція нескінченно мала при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Наслідок справедливий і для скінченного числа множників.

<u>**Наслідок 2**</u>. Добуток нескінченно малої функції α(x) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), на сталу функцію є функція нескінченно мала при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Теорема 3. Частка від ділення нескінченно малої функції α(x) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), на функцію f(x), границя якої не дорівнює нулю при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), є функція нескінченно мала при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).





Функція f(x) називається *нескінченно великою* при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), якщо для будь- якого як завгодно великого числа M можна вказати таке число $\delta>0$, що для всіх x, які задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>M$. Позначаємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Якщо функція є нескінченно великою при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) і набуває лише додатніх значень, то використовуємо позначення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, якщо ж функція є нескінченно великою при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) і набуває лише від'ємних значень, то використовуємо позначення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Справедлива наступна **теорема.**

Якщо функція f(x) є нескінченно великою при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функція 1/f(x) є функцією нескінченно малою при $x \to x_0$ ($x \to \infty$). І навпаки, якщо функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) і не перетворюється в нуль, то функція $1/\alpha(x)$ є функцією нескінченно великою при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

3. Основні теореми про границю.

Теорема 1. Якщо існує границя функції f(x) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то ця границя **єдина**.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то функцію можна записати у вигляді $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$- нескінченно мала функція при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

<u>Доведення.</u>

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тобто для довільно вибраного $\varepsilon>0$ можна вказати таке $\delta>0$, що для всіх x, що задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначимо $f(x)-A=\alpha(x)$, тоді $|\alpha(x)|<\varepsilon$. А це означає, що $\alpha(x)$- нескінченно мала функція при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Справедлива і обернена теорема :

Теорема 3. Якщо функцію можна представити у вигляді $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$- нескінченно мала функція при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема 4. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$; $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$, то існує також границя суми для цих функцій і границя суми дорівнює сумі границь цих функцій: $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$.

<u>Доведення.</u>

На основі теореми 2 можемо позначити $f_1(x)=A_1+\alpha_1(x)$ і $f_2(x)=A_2+\alpha_2(x)$, де $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ - нескінченно малі функції при $x \to x_0$. Тоді $f_1(x) + f_2(x)=A_1+\alpha_1(x)+ +A_2+\alpha_2(x)= A_1+A_2+\alpha_1(x)+ \alpha_2(x)$, останні два доданки є нескінченно малою функцією. а це означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1+A_2$. Теорему доведено.

Теорема справедлива і для скінченного числа доданків.

Теорема 5. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$; $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$, то існує також границя добутку для цих функцій при $x \to x_0$ і границя добутку дорівнює добутку границь цих функцій: $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) f_2(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$.

<u>Доведення</u> аналогічне доведенню теореми 4.

Наслідок 1. Сталий множник можна винести за знак границі: $\lim\limits_{x \to x_0} (c f(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Наслідок 2. Якщо задано функцію виду $(f(x))^n$, де n∈N, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))^n$.

Теорема 6. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A_1$; $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A_2$, причому $A_2 \neq 0$, то існує також границя частки для цих функцій при $x\to x_0$, причому границя частки дорівнює частці границь цих функцій: $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)/f_2(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)/\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$.

Доведення абсолютно аналогічне доведенню теореми 4.

Вище написанні теореми проведенні для випадку границі при $x\to x_0$. Цілком аналогічно доводяться теореми 2-6 для випадку при $x\to\infty$.

Основні теореми про границю спрощують обчислення границь функцій, варто лише звести функцію за їх допомогою до якогось з стандартних виглядів (чи важливих границь, чи границь, які легко обчислюються).

Деколи зручно використовувати наступні властивості (подамо їх без доведення), які спрощують перехід до границь в нерівностях.

Теорема 7. Якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $u(x)\le f(x)\le v(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))=\lim\limits_{x\to x_0}(v(x))=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=A$.

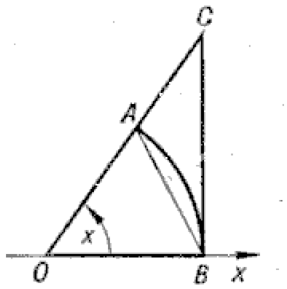
Аналогічна теорема справедлива і для випадку коли $x\to\infty$.

Теорема 8. Якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x)\ge 0$,то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))\ge 0$.

Теорема 9. Якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $u(x)\le v(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))\le\lim\limits_{x\to x_0}(v(x))$.

4. **Теорема 1.** Справедлива рівність $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Доведення. Якщо x - кут, виміряний у радіанах, $0<x<\pi/2$, то для площ трикутника OAB, сектора OAB і трикутника OCB правильні нерівності:



$S_{\Delta OAB}<S_{\text{сект. }OAB}<S_{\Delta OCB}$, або $\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2 tgx$.

Скоротимо на $\frac{1}{2}R^2$ і поділимо почленно на sin x, звідки

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ і $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$. Помножимо на (-1) і додамо 1 до кожної частини, отримавши: $0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$.

Розглянемо $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x^2$. Тобто отримаємо $0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{2}x^2$. Ця нерівність справедлива також і для $x\in(-\pi/2;0)$ (Доведення проводимо, замінивши x на -x). Отже, справедлива для всіх $x\in(-\pi/2;\pi/2)$.

Очевидно, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2=0$. Тому (за теоремою 7 п.4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{\sin x}{x})=0$. Використовуючи теореми про границю сталого числа та границю суми, отримуємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Теорему доведено.

Така границя називається в математиці **Першою важливою границею або Першою чудовою границею.**

Розглянемо числову послідовність $y_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

Теорема 2. Числова послідовність з загальним членом $y_n = (1+\frac{1}{n})^n$ має границю при n $\to\infty$, і ця границя міститься між числами 2 і 3.

<u>Доведення.</u>

Для довільного $n\in N$ справедливий біноміальний розклад

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + ...+ b^n.$$

Тому

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + ...+ \frac{n(n-1)(n-2)....(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot n}\frac{1^n}{n^n}.$$

Рівність 1·2·3·4·....·(n-1)·n=n! (факторіал числа n). Таким чином ми отримали послідовність

$$2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ...+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{n-1}{n}). \qquad (1)$$

Оцінимо її :

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3};\ \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4};\ ....;\ \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

З послідовності (1) видно, що $y_n \geq 2$. А, оскільки, $y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...+ \frac{1}{2^{n-1}}$, то $y_n < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$. Так як послідовність обмежена і зростаюча, то вона має границю, яка розміщена між 2 і 3 .

В математиці таке число, яке є границею заданої послідовності позначають e і називають числом Ейлера. e=2,7182.....

На основі теореми 2 доводиться наступне твердження

Теорема 3. Правильна рівність $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Границя з теореми 3 називається Другою важливою або Другою чудовою границею.

Наслідок. Правильні рівності

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha$.

Контрольні запитання

1. Що таке окіл точки, плюс та мінус нескінченно віддалених точок?
2. *Дайте* означення границі в цих точках.
3. Дати означення правої та лівої границі.
4. Сформулювати критерій існування границі функції в точці.

5. Дати означення нескінченно малої та нескінченно великої функцій.
6. Сформулювати і довести властивості нескінченно малих функцій.
7. Сформулювати і довести теорему про взаємозв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими функціями.
8. Сформулювати і довести основні теореми про границю функцій.
9. Сформулювати і довести теорему про першу важливу границю.
10. Сформулювати і довести теорему про другу важливу границю.

Тема 1.3. Неперервність функції в точці

Мета. Розглянути поняття неперервності функції, класифікувати точки розриву, означити операції над наперервними функціями.

План.

1. Неперервність функції в точці.
2. Арифметичні операції над неперервними функціями.
3. Точки розриву та їх класифікація.
4. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

1. Функція f(x), визначена в околі точки x_0 *називається неперервною в точці x_0*, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Більш докладно умову неперервності функції f(x) вточці x_0 можна розписати так :

1) функція f(x) повинна бути визначена в околі точки x_0, в тому числі і в самій точці x_0.
2) в точці x_0 вона повинна мати границю.
3) ця границя має дорівнювати значенню функції в точці x_0.

На «мові ε-δ» неперервність означається так: Функція f(x), визначена в околі точки x_0 називається неперервною в точці x_0, якщо для будь- якого числа ε>0 існує таке δ>0, що з нерівності $|x-x_0|<\delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)|<\varepsilon$. Зрозуміло, що $|x-x_0|>0$.

Поняття неперервності функції можна сформулювати і на «мові приростів».

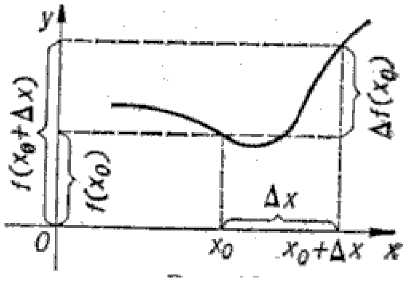
Приростом аргументу x в точці x_0 називається різниця $x-x_0$ і позначається Δx.

Приростом функції f(x) вточці x_0 називається різниця $f(x) - f(x_0)$ і позначається $\Delta f(x_0)$.

Приріст аргументу та приріст функції можуть бути як додатними, так і від'ємними величинами. Приріст функції, крім того може дорівнювати нулеві. Якщо точка x_0 - фіксована, то приріст функції є функцією від Δx. Якщо $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$. Справедливе також обернене твердження.

Отже, означення неперервності функції в точці x_0 можна сформулювати так:

функція f(x), визначена в околі точки x_0, називається неперервною в цій точці, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$.



Іншими словами, функція f(x), визначена в околі точки x_0, називається неперервною в цій точці, якщо нескінченно малим приростам аргументу відповідають нескінченно малі прирости функції.

Всі означення рівносильні між собою.

Зауважимо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, отже, символ неперервної функції і границі можна переставляти місцями, тобто під знаком неперервної функції можна переходити до границі.

Можна довести таку **теорему:**

Кожна основна елементарна функція є неперервною в усіх точках, в яких вона визначена.

2. Теорема 1. Якщо функції f(x) і φ(x) неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні функції:

$$f(x) + \varphi(x); \quad f(x) - \varphi(x); \quad f(x) \cdot \varphi(x); \quad f(x) / \varphi(x)$$

(остання при допоміжній умові $\varphi(x_0) \neq 0$).

Доведення. Доведемо, наприклад, неперервність частки. Нехай $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Знайдемо границю функції F(x) в точці x_0. Оскільки функції f(x) та φ(x) - неперервні в точці x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Оскільки $\varphi(x_0) \neq 0$, то за теоремою про границю частки існує границя функції F(x) в точці x_0, причому $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \dfrac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = F(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

А це означає, що функція F(x)- неперервна в точці x_0.

Аналогічно доводиться неперервність функцій $f(x)+\varphi(x)$; $f(x)-\varphi(x)$; $f(x)\cdot\varphi(x)$. Тут використовують означення неперервної функції і теореми про границю суми, різниці та добутку двох функцій відповідно.

Наслідок 1. Добуток та сума скінченного числа неперервних функцій є функція неперервна.

Наслідок 2. Оскільки основні елементарні функції є неперервними в кожній точці, де вони існують, то елементарні функції є неперервними в кожній точці, де вони існують.

Справедлива також **Теорема 2.**

Якщо функція f(x)- неперервна в точці $x_0 \in (a; b)$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна в точці $t_0 \in (\alpha;\beta)$, причому $x_0=\varphi(t_0)$, то складена функція $f(\varphi(t))$- що є функцією від t - неперервна в точці t_0.

Доведення.

Задамо число $\varepsilon>0$. Тоді , внаслідок неперервності функції f(x) в точці x_0, для числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta_1>0$ таке, що з нерівності

$$|x-x_0|<\delta_1 \qquad (1)$$

випливає нерівність

$$|f(x) - f(x_0)|<\varepsilon . \qquad (2)$$

Для знайденого вище числа $\delta_1>0$, внаслідок неперервності функції $x=\varphi(t)$ в точці t_0 існує число $\delta>0$ таке, що з нерівності

$$|t-t_0|<\delta \qquad (3)$$

випливає нерівність

$$|x-x_0|= |\varphi(x) - \varphi(x_0)|< \delta_1. \qquad (4)$$

Якщо виконана нерівність (3), то виконана (4), але (4) випливає з (1). Таким чином, для будь- якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що з нерівності (3) випливає нерівність

$$|f(x) - f(x_0)|<\varepsilon .$$

А це означає, що складена функція, задана в теоремі, неперервна в точці t_0.

Теорему доведено.

Функція f(x) називається *неперервною в інтервалі (a; b),* скінченному чи нескінченному, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

3. Функція f(x) називається *неперервною в точц і x_0 справа (зліва),* якщо

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \;\; (\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)).$$

Таким чином, для неперервності функції f(x) в точці x_0 справа (зліва) слід перевірити три умови:

1) функція f(x) має бути визначена на піввідрізку $[x_0; x_0+h)$ (у півінтервалі $(x_0-h; x_0]$), де h>0;
2) у точці x_0 функція має праву (ліву) границю;
3) ця права (ліва) границя повинна дорівнювати значенню функції f(x) в точці x_0.

На мові «ε-δ» означення неперервності справа (зліва) можна дати так: функція f(x), визначена на піввідрізку $[x_0; x_0+h)$ (у півінтервалі $(x_0-h; x_0]$), де h>0 називається неперервною справа (зліва), якщо для будь- якого ε>0 можна знайти таке δ>0, що з нерівності $0 \le x-x_0 < \delta$ $(0 \le x_0-x < \delta)$ випливає нерівність $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

З теореми про границю суми, добутку, різниці, частки двох функцій відносно множини та означення неперервності функції справа (зліва) випливає, що сума, різниця, добуток, частка (остання при допоміжній умові, що функція, яка стоїть в знаменнику, не рівна нулю в точці x_0) є функції неперервні в точці x_0 справа (зліва).

З означення неперервності функції в точці x_0 справа і зліва і теореми- критерію існування границі випливає твердження:

Теорема. Для того щоб функція f(x) була неперервною в точці x_0, необхідно і досить, щоб функція f(x) була неперервна в точці x_0 і справа, і зліва.

3. Нехай функція f(x) визначена в околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0. Якщо функція f(x) не є неперервною в цій точці, то кажуть, що точка x_0 є *точкою розриву,* а сама функція є *розривною в цій точці.*

З означення зрозуміло, що функція буде розривна, якщо виконуватиметься хоча б одна з умов:

1) функція f(x) не визначена в точці x_0; хоч у всіх інших точках околу вона визначена;
2) у точці x_0 не існує границі функції f(x);
3) границя функції f(x), якщо вона існує, не дорівнює значенню функції f(x) в точці x_0.

Функція f(x) визначена на піввідрізку $[x_0; x_0+h)$ (у півінтервалі $(x_0-h; x_0]$), за винятком можливо самої точки x_0, що не є неперервною в точці x_0 справа(зліва), називається *розривною в точці x_0 справа (зліва),* а сама точка x_0 називається точкою розриву функції справа (зліва).

1) функція f(x) не визначена в точці x_0; хоч у всіх інших точках інтервалу $(x_0; x_0+h)$ (інтервалу $(x_0-h; x_0)$), вона визначена;
2) у точці x_0 не має правої (лівої) границі функції f(x);
3) права (ліва) границя функції f(x), якщо вона існує, не дорівнює значенню функції f(x) в точці x_0.

Точка x_0 розриву функції f(x) називається *точкою розриву першого роду*, якщо в цій точці існує і права, і ліва границі функції f(x).

Точка x_0 розриву функції f(x) називається *точкою розриву другого роду,* якщо в цій точці не існує хоч одна з односторонніх границь функції f(x). (або вони нескінченні)

Якщо x_0 - точка розриву першого роду функції f(x) і права границя функції в цій точці не рівна лівій границі цієї функції, то абсолютну величину різниці правої і лівої границь функції в цій точці називають *стрибком* функції в точці x_0.

Аналогічно діляться і точки розриву функції справа та зліва.

Справедливе твердження

Теорема. Функція f(x), монотонна на проміжку <a; b>, може мати лише точки розриву першого роду.

Якщо точка x_0 є точкою розриву першого роду і $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то ця точка називається *точкою усувного розриву*.

4. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Функція називається *неперервною на інтервалі*, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція називається *неперервною на відрізку [a; b],* якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу (a; b) і неперервна в точці a справа і в точці b зліва.

Теорема 1. Функція неперервна на відрізку є обмеженою на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо f(x) - неперервна на відрізку [a; b], то вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значення.

Теорема 3. Якщо f(x) - неперервна на відрізку [a; b] і на його кінцях приймає значення різних знаків, то існує хоч би одна точка x в середині відрізка, в якій f(x)=0.

Теорема 4. Якщо f(x) неперервна на відрізку [a; b], і f(a)=A, f(b)=B, то яке б не було число C таке, що A<C<B, знайдеться точка c така, що $c \in [a; b]$, f(c)=C.

Наслідок. Якщо f(x) - неперервна на відрізку [a; b] і m<C<M, то знайдеться така точка $c \in [a; b]$, для якої f(c)=C.

Контрольні запитання

1. Дати означення функції, неперервної в точці, на відрізку, на інтервалі.
2. Що таке приріст аргументу, приріст функції?
3. Сформулювати і довести теорему про неперервність суми, різниці, добутку та частки двох неперервних функцій.
4. Сформулювати і довести теорему про неперервність складеної функції.
5. Дати означення неперервності функції справа та зліва.
6. Сформулювати критерій неперервності функції.
7. Дати означення точки розриву першого та другого роду, точки усувного розриву, стрибка функції.
8. Сформулювати властивості функцій, неперервних на відрізку.