Лекція 6

Повне дослідження функції

Повне дослідження функції

$$y = \frac{2x}{x^2-1}$$

I 1. ООЗ. $x^2-1 \neq 0 \quad x \neq \pm 1$

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

2. Точки перетину з осями координат

Ox: $y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow O(0;0)$

Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

3. Знаходимо інтервали знакосталості

$-\quad +\quad -\quad +$

$-1 \quad 0 \quad 1 \quad x$

$f$ додатна: $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty) \quad y > 0$

$f$ від'ємна: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \quad y < 0$

4. Парність

$$y(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{2x}{x^2-1} = -f(x)$$

$f$ непарна $\Rightarrow$ $f$ симетрична відносно початку координат

6 не періодична

(2) II Монотонність та екстремуми

1. Знаходимо першу похідну

$$y' = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$$

Шукаємо стаціонарні точки

$$y' = 0 \qquad -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$-(2x^2+2) = 0 \quad \Big| \cdot -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 \neq -1$$

Стаціонарних точок немає

Критичні точки $x_1 = -1$

$x_2 = 1$

Наносимо критичні точки на область визначення функції:

$$\overset{-}{\searrow} \quad \underset{-1}{\circ} \quad \overset{-}{\searrow} \quad \underset{1}{\circ} \quad \overset{-}{\searrow}$$

Визначаємо знак похідної

$y$ спадає на всій області визнач

Точок екстремуму немає

Опукл., вгнутість і перегину (3)

1. Знаходимо другу похідну

$$y'' = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

3. Знаходимо критичні точки другого роду

2.1 $y'' = 0$ $\qquad \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$

$4x(x^2+3) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 0 \\ x^2+3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 0$$

2.2 $y''$ не існує

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Критичні точки II роду $\quad x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

5. Наносимо на числову вісь критичні точки


Визначаємо знак другої похідної

$f \cap$ на $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ ; $f \cup$ $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$

Точки перегину визначаємо на ОДЗ

$f(0) = 0 \qquad O(0;0)$ – точка перегину

(4) Асимптоти функції

1) вертикальні

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-1}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -1}\frac{2x}{x^2-1}=\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$$ Прямі $x=1$, $x=-1$ вертикальні асим

2. Похилі асимптоти

$$y = kx + b$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{(x^2-1)\cdot x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^3-x}=\frac{0}{\infty}=0$$

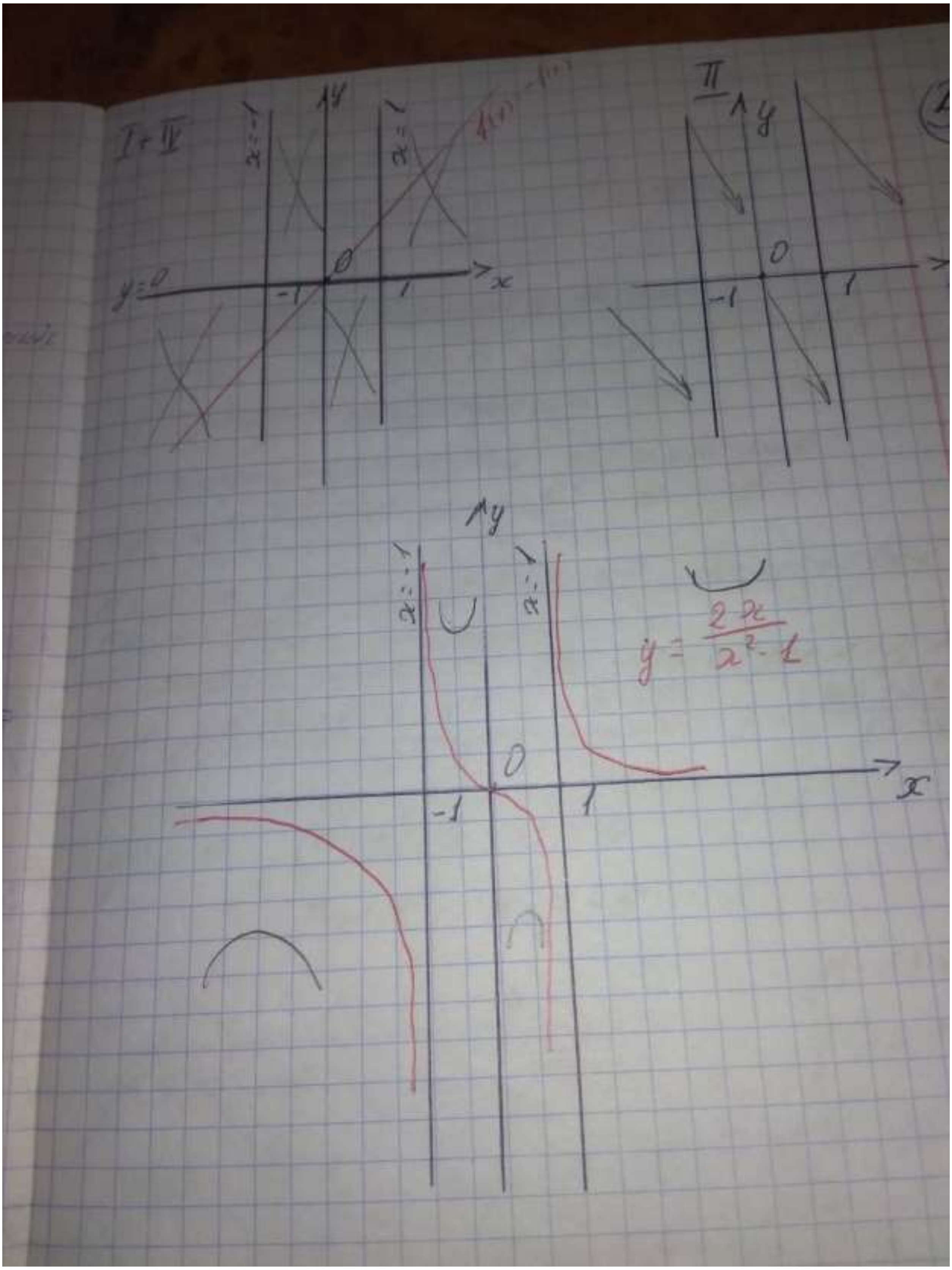
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}-0\cdot x\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{0}{\infty}=0$$

Якщо $b=0$ то похила асимптот перетворюється в горизонталь

$$y=0\cdot x+0$$

$$y=0$$


I + IV
x = -1
x = 1
y = 0
0
-1
1
x
y
II
y = 2x / (x² - 1)

$y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$ 1

I. 1. ОДЗ $x \neq -2$

2. Перетин графіка з віссю OY:

$x = 0$ $y(0) = \frac{(0-1)^2}{0+2} = \frac{1}{2}$ $B(0; \frac{1}{2})$

Перетин графіка з віссю OX:

$y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ $A(1; 0)$

3. Функція неперіодична

4. Функція ні парна, ні непарна

$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{-x+2} = \frac{(x+1)^2}{2-x} \neq \pm f(x)$

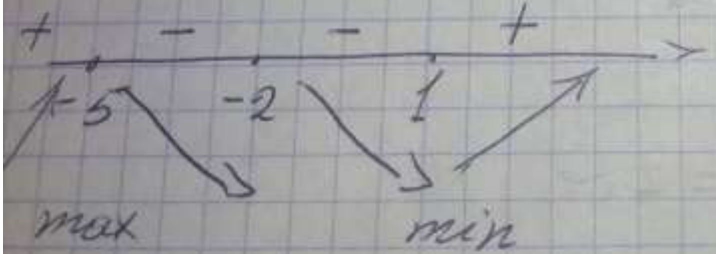
Немає ні центральної, ні осьової симетрії

II. Монотонність та екстремум

$$y' = \frac{2(x-1)(x+2) - (x-1)^2}{(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$$

$y' = 0$ $(x-1)(x+5) = 0$

$x_1 = 1$ $x_2 = -5$




$y(-5) = -12$

$y(1) = 0$

$M_1(-5; 12)$ – ma

$M_2(1; 0)$ – mi
$= A$

III Опуклість, вгнутість, точки перегину

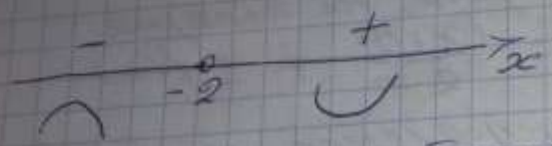
② Знаходимо другу похідну

$y'' = \frac{16}{(x+2)^3}$

$y'' \neq 0$

$x = -2$

Визначаємо знак другої похідної



Точка $x=-2$ не є точкою перегину, оскільки не входить в область визначення функції

на $x(-\infty; -2)$ функція опукла

$x(-2; +\infty)$ функція вгнута

IV Асимптоти

вертикальна

$x_0 = -2$

$\lim\limits_{x \to -2\pm} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \pm\infty$

Отже $x = -2$ вертикальна асимптота

3

2) Похила асимптота

$$y = kx + b$$

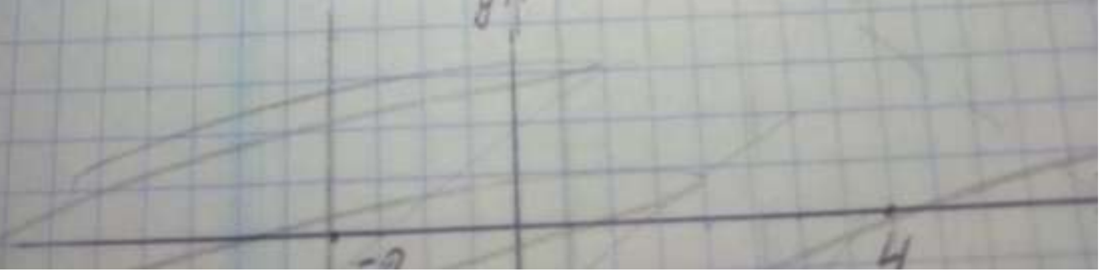
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^2}{(x+2)\cdot x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

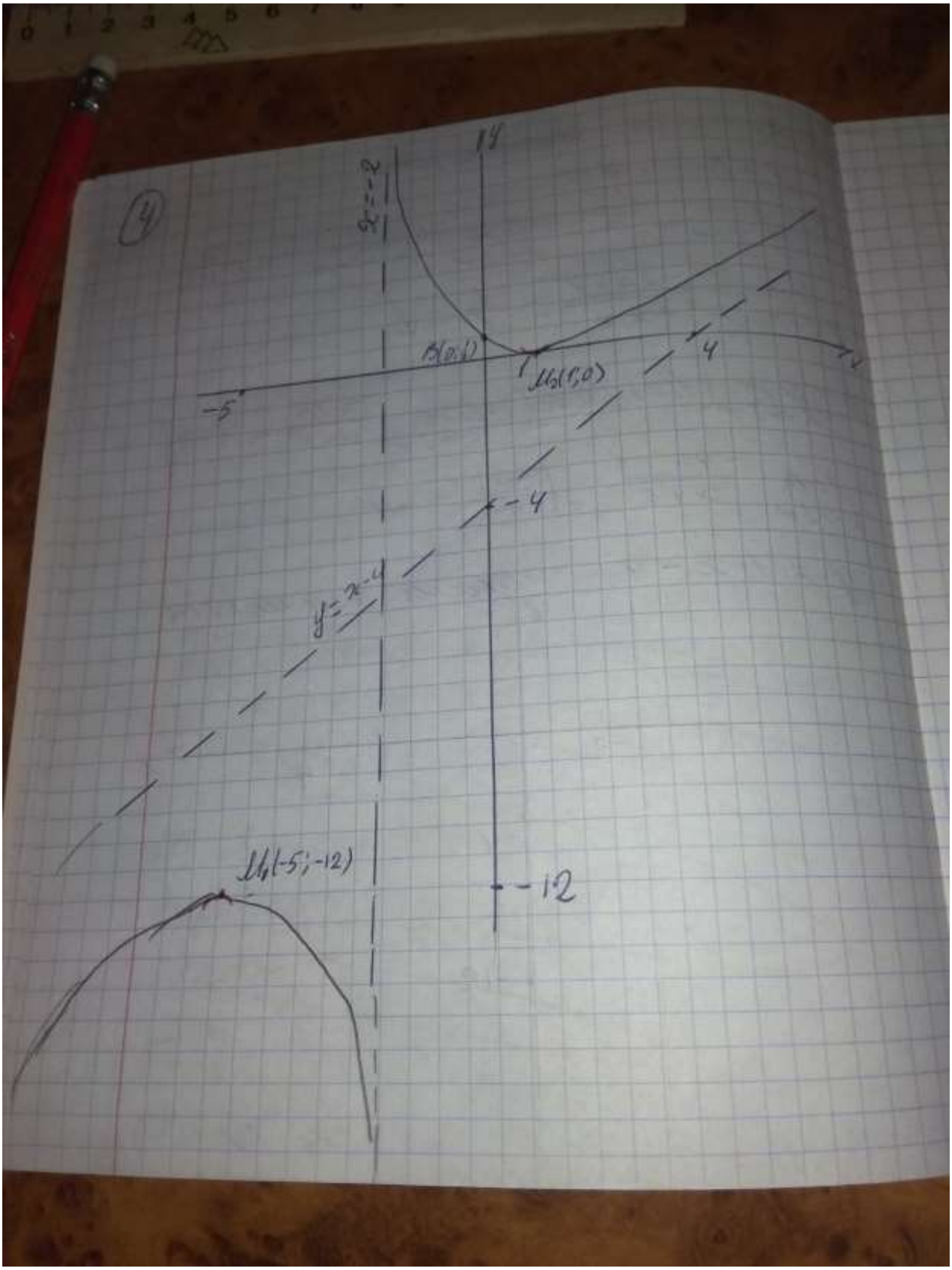
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x+2} - 1\cdot x\right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x+1}{x+2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -4$$

$y = 1\cdot x - 4$ похила асимптота




4
y
x = -2
B(0;1)
M2(1;0)
4
x
-5
-4
y = x-4
M1(-5;-12)
-12