Лекція 5

Тема. Похідна функції.

1.Означення похідної.

Нехай функцію $y=f(x)$ визначено $\forall\, x\in(a,b)$. Різниця $\Delta x = x_2 - x_1 \in (a,b)$ називається *приростом арґументу, а різниця* $f(x_2)-f(x_1)=\Delta y$ *– приростом функції*. Приріст функції позначають $\Delta f(x)$ або $\Delta\, y$, тоді $\Delta f(x) = f(x_2)-f(x_1) = f(x+\Delta x)-f(x)$.

Нехай функцію $y\ =f(x)$ визначено для $x\in(a,b)$, а також, $x\pm\Delta x\in(a,b)$.

Визначення. *Похідною* $f'(x)$ від функції $f(x)$ у точці *x* називається границя, якщо вона існує, відношення приросту функції Δy у цій точці до відповідного приросту арґументу Δx, за умови, що Δx прямує до нуля

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної функції називається *диференціюванням* цієї функції.

Основні правила диференціювання

Якщо $u=u(x)$, $v=v(x)$, тоді

1. $C' = 0$ 2. $(\mathrm{C}u)' = Cu'$ 3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4. $(uv)' = u'v + uv'$ 5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 6. $f(u)' = f'(u)u'$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
13. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$
14. $(sh\, x)' = ch\, x$
15. $(ch\, x)' = sh\, x$
16. $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
17. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Приклад . Користуючись визначенням похідної, знайти похідну функції $y = \frac{1}{x}$.

Розв'язок. При значенні аргументу, рівному x, маємо $y = \frac{1}{x}$. При значенні аргументу, рівному $x + \Delta x$, маємо $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$. Знаходимо приріст функції: $\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. Складаємо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$. Переходячи до границі, знайдемо похідну від даної функції:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти похідні функцій: а) $y = x^2 \sin x$; б) $y = \frac{2x+3}{3x-4}$.

<u>Розв'язок.</u> При знаходженні похідної використовуємо таблицю похідних і правила диференціювання

а) $y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

б) $y' = \frac{(2x+3)'(3x-4) - (2x+3)(3x-4)'}{(3x-4)^2} = \frac{2(3x-4) - (2x+3)3}{(3x-4)^2} =$

$= -\frac{17}{(3x-4)^2}$.

<u>Диференціювання складної функції</u>

Нехай маємо складну функцію $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$. Змінну u будемо називати *проміжним аргументом.* Припустимо, що функція $u = \varphi(x)$ є диференційованою в точці x, а функція $y = f(u)$ – у відповідній точці $u = \varphi(x)$. Тоді має місце теорема.

Теорема Похідна складної функції за незалежною змінною дорівнює добутку похідної за проміжним арґументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною, тобто:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \tag{9.1}$$

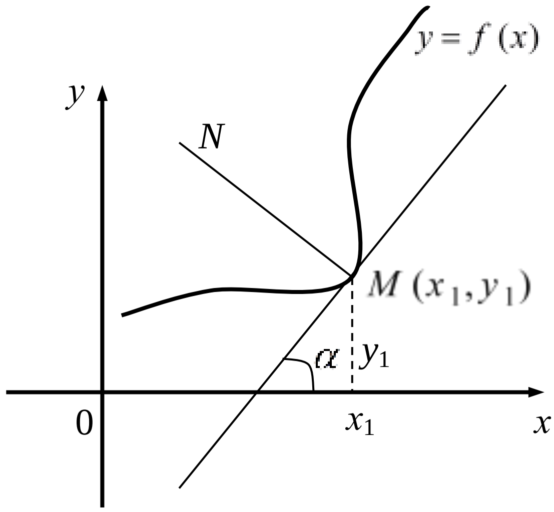
<u>Приклад 3.</u> Продиференціювати задану функцію:

$$y = \sqrt[3]{5x^3 - 2x + 3} + \frac{3}{(x+2)^4}.$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(5x^3 - 2x + 3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(15x^2 - 2\right) + \frac{3(-4)}{(x+2)^3} = \frac{15x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(5x^3 - 2x + 3)^2}} - \frac{12}{(x+2)^3}$$

Геометричний зміст похідної

Похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_1$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою x_1. Інакше кажучи, $f'(x_1) = tg\alpha$, де α – кут між дотичною до даної кривої, проведеної через точку *M*, і додатним напрямом осі абсцис.



Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \tag{9.2}$$

Нормаллю MN до кривої у даній її точці $M(x_1, y_1)$ називається перпендикуляр до дотичної, проведеної через точку $M(x_1, y_1)$. Рівняння нормалі MN записується так:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1). \tag{9.3}$$

Приклад 4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 2x + 3$ у точці з абсцисою $x_1 = 1$.

Розв'язок. Знаходимо значення функції в точці $x_1 = 1$: $y_1 = y(1) = 6$. Знайдемо похідну заданої функції та її числове значення при $x_1 = 1$:

$$y' = 3x^2 + 2, \qquad f'(x_1) = f'(1) = 5.$$

Підставивши значення $y_1 = 6$ й $f'(1) = 5$ у рівняння (9.2), (9.3), отримаємо:

дотична $\quad y - 6 = 5(x - 1) \quad$ або $\quad y = 5x + 1;$

нормаль $\quad y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 1) \quad$ або $\quad y = -\frac{1}{5}x + \frac{31}{5}.$

Механічний зміст похідної

Якщо при прямолінійному русі матеріальної точки залежність між пройденим шляхом S і шляхом t, виражається формулою $S = S(t)$, то швидкість v руху точки в даний момент часу виражається формулою:

$$v = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Економічний зміст похідної

Якщо функція $y = f(x)$ визначає залежність витрат виробництва f від об'єму x виробленої продукції, то похідна $f'(x_0)$ дорівнює граничним витратам виробництва (приблизно рівним витратам на випуск $x_0 + 1$-ої одиниці продукції).

2.Диференціал функції

Визначення. *Диференціалом функції* $y = f(x)$ називають головну лінійну відносно Δx частину приросту функції.

Якщо функція $y = f(x)$ у точці x має похідну $f'(x)$, тоді добуток похідної $f'(x)$ на приріст Δx аргументу є диференціалом функції та позначається символом dy: $dy = y'\Delta x$.

Зважаючи на те, що для функції $y = x$ $y' = 1$, тому позначимо $dx = \Delta x$. Остаточно маємо:

$$dy = y'dx, \qquad (9.2)$$

звідки $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Отже, похідну y' можна визначити як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

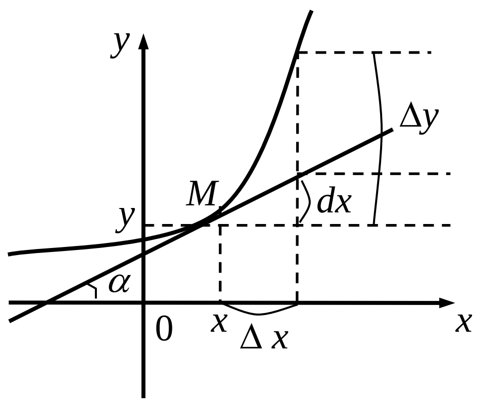


Рис. 9.1

Приклад 5. Знайти диференціал dy функції $y = e^{x^3}$.

Розв'язок. $dy = e^{x^3} 3x^2 dx$.

Приклад 6. Знайти диференціал dy функції $y = \sin\sqrt{x}$.

Розв'язок. $dy = \cos\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.

Диференціювання функції, заданої неявно

Якщо функціональна залежність між y та x має вигляд $F(x, y) = 0$, тобто рівняння не розв'язане, або не може бути розв'язане відносно однієї з змінних, то говорять, що функція задана неявно. Щоб знайти похідну від неявно заданої функції, необхідно продиференціювати вираз $F(x, y) = 0$ послідовно, враховуючи, що x – незалежна змінна, а y – функція від неї. Потім з отриманого рівняння знайти y', розв'язавши його як лінійне відносно y'.

Приклад 7 Знайти y':

$arctg(x + y) - y + x = 0$

Розв'язок. Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x та розв'язуємо рівність відносно y'.

$$\frac{1 + y'}{1 + (x + y)^2} - y' + 1 = 0, \qquad 1 + y' - y'(1 + (x + y)^2) + 1 + (x + y)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'(x + y)^2 = 2 + (x + y)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{(x + y)^2} + 1.$$

Диференціювання складної показникової функції

Нехай маємо складну показникову функцію $y = u^v$, де $u(x)$, $v(x)$ – диференційовані в точці x функції.

Правило. Щоб знайти похідну y', логарифмують рівняння $y = u^v$, а потім диференціюють отримане рівняння $\ln y = v \ln u$ та знаходять y' як для функції, заданої неявно.

Приклад 8. Знайти y': $y = (ctg 5x)^{arctg 2x}$.

Розв'язок. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою e, а потім знайдемо похідну як від функції заданої неявно.

$$\ln y = \ln(ctg5x)^{arctg2x} \Rightarrow (\ln y)' = [arctg2x \ln(ctg5x)]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (arctg2x)' \ln(ctg5x) + arctg2x\,(\ln(ctg5x))' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\frac{1}{1+4x^2} 2\ln(ctg5x) + arctg2x \frac{1}{ctg5x}\left(-\frac{1}{\sin^2 5x}\right)5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = (ctg5x)^{arctg2x}\left(\frac{2\ln(ctg5x)}{1+4x^2} - \frac{5arctg2x}{ctg5x\sin^2 5x}\right).$$

Цей спосіб зручно застосовувати для функцій, що мають громіздкий запис. Вираз $\frac{y'}{y}$ називається *логарифмічною похідною* функції.

Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Якщо відома похідна однієї з цих функцій, то легко отримати вираз похідної іншої. Припустимо, наприклад, що відома похідна $y' = f(x)$, тоді похідна $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, де $f'(x) \neq 0$. Аналогічно, якщо $\varphi'(y) \neq 0$, то $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$. Отже, похідні від взаємно обернених функцій є оберненими за величиною.

Приклад 9 Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Виконаємо перетворення $x = y^3$. Знайдемо $x'_y = 3y^2$, тоді, $y'_x = \frac{1}{3y^2}$. Знайдемо похідну y'_x як функцію x. Для цього в попередню формулу замість y підставимо $\sqrt[3]{x}$. Отже, $y'_x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

при цьому для функції $x = x(t)$ існує обернена функція $t = t(x)$. Тоді функцію $y = y(t)$ можна записати у вигляді $y = y(t(x))$, тобто розглядати її як складну функцію. Згідно з правилом диференціювання оберненої функції маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Отже, похідна параметрично заданої функції знаходиться за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{10.1}$$

<u>Приклад 10.</u> Знайти y': $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

<u>Розв'язок.</u> $x'(t) = \frac{1}{t}$, $y'(t) = 2\cos 2t$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2t}{\frac{1}{t}} = 2t\cos 2t.$

<u>3.Похідні та диференціали вищих порядків</u>

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці *x*. Похідна $f'(x)$ цієї функції є новою функцією *x*. Отже, її також можна диференціювати, тобто знаходити похідну від першої похідної. Якщо вона існує, то її називають *похідною другого порядку функції* $f(x)$ або *другою похідною* і позначають $f''(x)$. Тобто $f''(x) = (f'(x))'$. Взагалі, *похідною n-го порядку* називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку та позначають $f^{(n)}(x)$, тобто

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \tag{10.2}$$

<u>Приклад 11</u> Знайти $f^{(n)}(x)$, якщо $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$.

<u>Розв'язок.</u> Скориставшись таблицею похідних та формулою (10.2), маємо $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$, $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^{\alpha-3}$ і т.д.

Звідси отримаємо

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}.$$

Якщо функцію $y=f(x)$ задано параметричним рівнянням, тоді похідні знаходять за формулами $y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, $y'''_{xxx}=\dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$, … (10.3)

Похідну другого порядку можна знайти за формулою

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (10.4)$$

<u>Приклад 12.</u> Знайти y'':

$x=a\cos t,\ y=b\sin t.$

<u>Розв'язок.</u> Скористаємося формулами (10.1) та (10.4).

$y'_t=b\cos t$, $y''_{tt}=-b\sin t$, $x'_t=-a\sin t$, $x''_{tt}=-a\cos t$.

$$y''_{xx}=\frac{-b\sin t\cdot(-a\sin t)-(-a\cos t)b\cos t}{(-a\sin t)^3}=\frac{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t}=$$

$$=\frac{ab(\sin^2 t+\cos^2 t)}{-a^3\sin^3 t}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Нехай функція $y=f(x)$ є диференційованою за змінною *x*. Диференціал $dy=f'(x)dx$ цієї функції є новою функцією *x*, причому від *x* може залежати тільки перший множник $f'(x)$, а другий (dx) є приростом незалежної змінної *x* та від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функцією від *x,* то можна говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають *другим диференціалом* або *диференціалом другого порядку* та позначають як d^2y: $d(dy)=d^2y$.

В силу означення диференціала маємо $d^2y=d\left[f'(x)dx\right]$. Оскільки dx від *x* не залежить, та під час диференціювання виноситься за знак похідної, то ми отримуємо: $d^2y=f''(x)(dx)^2$ або $d^2y=f''(x)dx^2$.

Якщо *x* є незалежною змінною, то аналогічно визначають диференціали третього і вищих порядків. Має місце формула Лейбніца

$$d^n y = \left[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1} \right]' dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

(10.5)

Зауваження. Нехай маємо складну функцію $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$. Згідно властивості інваріантності форми першого диференціалу, $dy = F'_u(u)du$. Але диференціали вищих порядків цієї властивості не мають.

Дійсно, $d^2 y = d\left[F'_u(u)du\right]$. Але тут $du = \varphi'(x)dx$ залежить від *x*, тому отримуємо $d^2 y = d\left[F'_u(u)\right]du + F'_u(u)d(du)$ або

$d^2 y = F''_{uu}(u)(du)^2 + F'_u(u)d^2 u$, де $d^2 u = \varphi''(x)(dx)^2$.

Так само знаходять $d^3 y$ та інші.