**Лекція № 6**

**Застосування похідної до дослідження функції**

[**1.** **Основні теореми про диференційовані функції: Ролля, Лагранжа, Коші.** 1](#_Toc86250253)

[**2.Теорема Лопіталя та їх застосування до розкриття невизначеностей.** 3](#_Toc86250254)

[**3. Дослідження поведінки функцій за допомогою похідних.** 7](#_Toc86250255)

[**Екстремум функції. Необхідна умова існування екстремуму. Достатні умови існування екстремуму.** 7](#_Toc86250256)

[**Дослідження функції на опуклість. Точки перегину** 8](#_Toc86250257)

[**Асимптоти графіка функції** 9](#_Toc86250258)

[**Схема повного дослідження функції та побудова графіка функції** 10](#_Toc86250259)

[**Контрольні питання та завдання** 13](#_Toc86250260)

1. **Основні теореми про диференційовані функції: Ролля, Лагранжа, Коші.**

**Теорема Ролля.** Якщо функція визначена і неперервна на сегменті , має похідну в кожній точці інтервалу , на кінцях сегмента набирає рівних значень , то всередині сегмента  знайдеться принаймні одна точка , похідна в якій  дорівнює нулю.

*х*

*b*

*а*

*у*

0

**

**

*y = f* (*х*)

*f* (*a*) =

= *f* (*b*)

Рис.3.1

З геометричної точки зору це означає, що всередині сегмента знайдуться такі точки , в яких дотична до кривої в цих точках паралельна осі  (Рис.3.1).

**Теорема Лагранжа.** Нехай функція неперервна на сегменті , має похідну в кожній точці інтервалу . Тоді всередині сегмента  існує принаймні одна така точка , що

, де .

*х*



*а*

*у*

*A*

0

*b*

*f* (*a*)

*C*

*B*

*f* (*b*)

*y= f* (*x*)

*α*

*α*

Рис.3.2

Геометричний зміст теореми Лагранжа: якщо у всіх точках дуги *АВ*  існує дотична, то на цій дузі знайдеться точка *С* між *А*  і *В*, у якій дотична паралельна хорді, яка з'єднує точки *А*  і *В* (Рис. 3.2).

**Теорема Коші.** Нехай функції і  неперервні на сегменті , в інтервалі  мають похідні, функція  на інтервалі  не перетворюється на нуль. Тоді в інтервалі  знайдеться така точка , що

,

тобто відношення приростів функцій на даному відрізку дорівнює відношенню їх похідних в точці .

# **2.Теорема Лопіталя та їх застосування до розкриття невизначеностей.**

**Теорема Лопіталя.** Нехай дві функції  та  неперервні та диференційовані в деякому проміжку , і нехай *а* – точка цього проміжку. Тоді якщо

1) , або

2)  та

3)  в околі точки , (за винятком, можливо, самої точки *а*)*,*

4)існує скінчена або нескінченна границя , *тоді границя відношення цих функцій дорівнює границі відношень їх похідних, тобто* .

Теорема справедлива і для односторонніх границь, а також у випадку, коли . Інколи відношення похідних знову приводить до невизначеностей. У таких випадках теорему слід застосувати повторно, але кожного разу слід перевіряти, чи має місце невизначеність.

Ця теорема дозволяє розкривати невизначеності  і . Інші види невизначеностей , , ,  можуть бути зведені до вище зазначених шляхом перетворень.

**Приклад 3.1.** Знайти границі, застосувавши теорему Лопіталя.

а) 

Розв'язок. Маємо невизначеність виду . Застосовуючи теорему Лопіталя, маємо:  



б) 

Розв'язок. Для знаходження границі необхідно застосовувати теорему Лопіталя двічі, тому що задане відношення і відношення похідних приводять до невизначеності . Повторні застосування теореми Лопіталя записують у ланцюжок рівностей



в) 

Розв'язок. Маємо невизначеність виду . Для застосовування теореми Лопіталя перетворимо вираз під знаком границі

.

, отже, теорему застосовувати можемо. Тут маємо







Згідно змісту теореми Лопіталя цей ланцюжок повинен читатись з кінця: так як границя останнього відношення існує, то існує та дорівнює їй границя передостаннього відношення і т.ін.

***Зауваження 1.*** Якщо границя відношення похідних не існує, то це нічого не говорить про існування або відсутність границі відношення функцій.

Наприклад, нехай , а . Тоді

, а

. Границя не існує.

***Зауваження 2.*** Застосовуючи теорему Лопіталя, необхідно стежити за тим, щоб обов'язково виконувалась або перша, або друга умови теореми.

г) 

Розв'язок. Маємо невизначеність . Позначимо . Логарифмуючи і застосовуючи теорему Лопіталя, отримаємо



Отже, 

д) 

Розв'язок. Маємо невизначеність виду . Позначимо  і прологарифмуємо:



Тут , . Застосовуючи теорему Лопіталя , отримаємо

тобто 

# **3. Дослідження поведінки функцій за допомогою похідних.**

## **Екстремум функції. Необхідна умова існування екстремуму. Достатні умови існування екстремуму.**

За допомогою похідних першого та другого порядків можна досить швидко та чітко з'ясувати найбільш характерні особливості функції, будувати її графік та розв'язувати задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень в замкненій області.

**Умови знакосталості та монотонності функцій**

**Теорема 5.1.** Якщо функція  неперервна  та в усіх його внутрішніх точках її похідна дорівнює нулю, то функція  є *сталою* на цьому відрізку.

**Теорема 5.2.** Якщо функція  неперервна , а її похідна  (), то функція зростає (спадає) на цьому відрізку.

**Визначення.** Функція  має *максимум (мінімум*) у деякій внутрішній точці  інтервалу її визначення якщо існує такий *-*окіл точки , що  (крім ) має місце нерівність  (). Значення називають значеннями *максимуму (мінімуму)* функції або *екстремумами* функції.

**Теорема 5.3** (необхідна умова існування екстремуму).Якщо функція диференційована і має екстремум у точці , то її похідна в цій точці  або не існує.

**Теорема 5.4** (перша достатня умова існування екстремуму). Якщо неперервна функція  має похідну   (за винятком, можливо, точки ), і якщо  при переході зліва направо через критичну точку  змінює знак з мінуса на плюс (з плюса на мінус), то функція в цій точці має мінімум (максимум).

**Теорема 5.5** (друга достатня ознака існування екстремуму). Нехай  і в точці  існує . Тоді, якщо , то  – точка мінімуму, а якщо , то  – точка максимуму функції.

## **Дослідження функції на опуклість. Точки перегину**

**Визначення.** Функція  називається *опуклою вгору* (*опуклою* *вниз*) на інтервалі , якщо для будь-яких двох значень  має місце нерівність

 .

**Визначення.**Точка  графіка неперервної функції називається *точкою перегину,* якщо в точці *М* крива перетинає дотичну.

**Теорема 5.6.** Нехай функція  двічі диференційована . Якщо в усіх точках цього інтервалу , то графік функції опуклий вгору, якщо ж  – опуклий вниз.

Знаходження точок перегину графіка функції ґрунтується на наступних теоремах.

**Теорема 5.7**(необхідна ознака існування точки перегину). Нехай функція  має в інтервалі  неперервну другу похідну . Тоді, якщо точка з абсцисою є точкою перегину графіка функції, то в цій точці .

**Теорема 5.8** (достатня ознака існування точки перегину). Якщо друга похідна  неперервної функції змінює знак при переході через , то точка з абсцисою  є точкою перегину графіка функції.

Трапляються випадки, коли в точці  друга похідна функції  розривна, а в *-*околі точки при переході через  змінює знак. Тому точки перегину слід шукати серед усіх точок, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує.

**Приклад** Дослідити на опуклість функцію .

Розв'язок. Функція визначена і диференційована для всіх *х*. Знайдемо :

, .

, якщо .

Точка  розбиває числову вісь на два інтервали  і . Візьмемо довільну точку, яка належить першому інтервалу, наприклад, . Так як , то на інтервалі  функція опукла вгору. Візьмемо довільну точку, яка належить другому інтервалу, наприклад, ;. Отже, на інтервалі  функція опукла вниз. При переході через точку   змінює знак, тому  – точка перегину.

## **Асимптоти графіка функції**

Розрізняють три основні типи асимптот: вертикальні, горизонтальні й похилі. Зустрічаються також функції, графіки яких мають нелінійні асимптоти.

**Визначення.** Лінія  називається *асимптотою* кривої , якщо відстань між точками з відповідними абсцисами на кривих  *і*  прямує до нуля, коли точка рухається вздовж кривої у нескінченність.

##### Визначення. Пряма є *вертикальною асимптотою* кривої, якщо (тобто, точка є точкою розриву функції другого роду).

**Визначення.** Пряма є *горизонтальною асимптотою* кривої, якщо  (або  ).

**Визначення.** Пряма  є *похилою асимптотою* графіка функції , якщо існують скінченні границі , .

Лінія  є *криволінійною асимптотою* кривої, якщо границя =0.

# **4. Схема повного дослідження функції та побудова графіка функції**

***1. Знайти область визначення функції.***

2. Дослідити функцію на періодичність.

3. Дослідити функцію на парність.

4. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат

1. Знайти точки розриву функції та з'ясувати їх тип.
2. Дослідити поведінку функції на межах області визначення, знайти асимптоти.
3. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції .
4. З'ясувати напрямок опуклості графіка функції, знайти точки перегину.
5. Використовуючи отримані результати, побудувати графік.

**Приклад 6.1.** Дослiдити функцiю та побудувати графiк:

а) , б) .

Розв'язок.

1. Область визначення 

2. Функцiя неперiодична.

3. Досліджуємо симетрію графіка: .

Тому що  і , функція не є ні парною, ні непарною.

4. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю 0*у*: *х =* 0,  *у =* 0.

0(0, 0) – точка перетинання з віссю *0у*.

З віссю 0*х*:  *у =* 0, 

 





0(0, 0) – точка перетинання з осями координат.

5. Функція неперервна на всій числовій осі, точок розриву немає.

6. Знайдемо асимптоти графіка функції.

Тому що точок розриву немає, вертикальних асимптот теж немає.

.

Горизонтальних асимптот немає.

Найдемо похилі асимптоти .

.

Похилих асимптот немає.

7. Знаходимо інтервали монотонності й точки екстремуму функції.



, якщо 

 .

Отже, похідна має дві критичні точки. Вони розбивають вісь 0*х* на проміжки, в яких знак похідної не змінюється. Складаємо таблицю

Таблиця 13.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* |  | 2 |  | 3 |  |
|  | + | 0 | – | 0 | + |
| *у* |  |  |  |  |  |

6. Знаходимо інтервали опуклості, увігнутості графіка функції і точки перегину.



, якщо , .

Таблиця 13.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *х* |  |  |  |
|  | – | 0 | + |
| *у* | Опукла вгору  ∩ | Точка  перегину | Опукла вниз  ∪ |

1. Будуємо графік (Рис. 13.1).



0

*у*

*х*

3

14

2

Рис. 13.1

.

# **Контрольні питання та завдання**

1. У чому полягає геометричний зміст теореми Ролля.
2. Вказати геометричний зміст теореми Ферма.
3. Вказати геометричний зміст теореми Лагранжа.
4. Якою є геометрична інтерпретація теореми Коші?
5. Сформулювати правило Лопіталя.
6. Чи припустимим є багаторазове застосування правила Лопіталя для розкриття заданої невизначеності?
7. Що називається точками екстремуму функції?
8. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму.
9. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.
10. Що таке точки перегину графіка функції?
11. Сформулюйте достатню умову існування точки перегину.
12. Чи може функція мати екстремум у точці перегину?
13. Як знайти інтервали опуклості кривої?
14. Дайте визначення асимптоти графіка функції.
15. Як знайти рівняння похилої асимптоти?
16. Чи може крива, наближаючись до своєї асимптоти, скільки завгодно раз перетинати її?
17. Сформулювати алгоритм визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.