

ТЕМА 7. ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ РИЗИКУ.

1. Концепція корисності.

Для задач прийняття рішень за умов невизначеності та ризику принцип оптимальності нерідко будується у вигляді функції корисності. Оскільки при наявності ризику результати рішень залежать від випадкових величин, то для порівняння їх ефективності необхідно вміти порівнювати функції розподілу ефективності. У цьому випадку важливе значення для прийняття рішень мають результати про властивості функцій корисності.

Корисність визначає ступінь задоволення, яке одержує суб'єкт від споживання товару чи виконання будь – якої дії.

Найбільш загальний підхід щодо оцінки ступеня (міри) ризику полягає у введенні функції корисності. Концепція функції корисності є одним з важливих елементів будь – якої сучасної економічної теорії. Вона дозволяє здійснити співвимірність споживчих елементів різних товарів.

Корисність включає важливу психологічну компоненту, тому що люди досягають корисності, отримуючи речі, що приносять їм задоволення. В економічному аналізі корисність часто використовується для того, щоб описати пріоритети при ранжуванні наборів споживчих товарів та послуг.

Застосовуючи різні функції корисності, можна описати будь – які варіанти оцінки випадкової економічної ситуації у вигляді сподіваного значення такої функції.

Введемо таке поняття як пріоритет, яке досить часто використовується суб'єктами прийняття рішень.

Позначимо поняття “пріоритетніше ніж”, ”байдуже”, “не гірше ніж” відповідними символами $>$, $\sim$, $>\sim$.

Нестроге співвідношення пріоритетності “ не гірше ніж” є одним із основних найпростіших понять; його записують так:

$$x >\sim y, (4.1)$$

де x та y є набором товарів чи послуг (точками простору X).

Цей запис означає, що певний суб'єкт (споживач) вважає для себе набір x або пріоритетнішим ніж набір y , або не робить між ними різниці, тобто x не гірший ніж y . Можна визначити поняття байдужості та строгої пріоритетності у термінах нестрого-го співвідношення пріоритетності: набори товарів x та y байдужі (еквівалентні) для споживача ($x \sim y$) тоді і лише тоді, коли

$$x >\sim y \text{ та } y >\sim x. (4.2)$$

А коли споживач бажає обрати x , а не y , тобто x пріоритетніше, ніж y (записують $x > y$), тоді і лише тоді, якщо x не гірше ніж y , а y не гірше ніж x . Значить $x > y$ тоді і лише тоді, коли

$$x >\sim y, \text{ а } x >\sim y - \text{ несправедливе. } (4.3)$$

Надалі будемо вважати, що нестроге співвідношення пріоритетності задовольняє дві основні аксіоми.

Перша аксіома стверджує, що це співвідношення є досконалою напівупорядкованістю у просторі товарів X . Співвідношення називається досконалим, якщо для двох заданих наборів товарів x та y з X справедливе одне з двох співвідношень:

$x \succsim y$, або $y \succsim x$, або одночасно. (4.4)

Це означає, що у просторі товарів немає таких “білих плям”, де пріоритет не існує. Співвідношення називають частковою впорядкованістю, якщо воно транзитивне, тоб-то для трьох заданих наборів x , y та z із X виконується умова: якщо $x \succsim y$ та $y \succsim z$, то $x \succsim z$, (4.5)

що виражає сумісність пріоритетів. І, якщо співвідношення рефлексивне, тобто для будь – якого $x \in X$:

$x \succsim x$. (4.6)

Цей факт впливає з досконалості співвідношення.

Нестроге співвідношення пріоритетності є досконалою частковою впорядкованістю простору товарів і означає, що співвідношення байдужості є співвідношенням еквівалентності, яке транзитивне, оскільки при заданих x , y та $z \in X$, якщо

$x \sim y$ та $y \sim z$, тоді $x \sim z$ - рефлексивне, (4.7)

оскільки при заданому $x \in X$: $x \sim x$, (4.8)

та симетричне, оскільки при заданих x та $y \in X$:

$x \sim y$ означає $y \sim x$. (4.9)

Для доведення, наприклад, транзитивності зазначимо, що $x \sim y$ та $y \sim x$ означає з визначення байдужості, що $x \succsim y$ та $y \succsim z$ і що $z \succsim y$ та $y \succsim x$. Тоді з транзитивності нестрогого співвідношення пріоритетності $x \succsim z$ та $z \succsim x$ випливає, що $x \sim z$.

Співвідношення байдужості, як співвідношення еквівалентності, ділить простір товарів X на класи еквівалентності – підмножини, що попарно не перетинаються, називаються множинами байдужості, кожна з яких складається з усіх наборів, байдужих заданому наборові

$I_x = \{ y \in X | y \sim x \}$ (4.10)

Друга основна аксіома стверджує, що нестроге співвідношення пріоритетності неперервне, тобто пріоритетні множини, кожна з яких складається з усіх наборів, що є пріоритетніші чи байдужі заданому набору X :

$P_x = \{ y \in X | y \succsim x \}$, (4.11)

і непріоритетні множини, кожна з яких складається з усіх таких наборів, для яких заданий набір X пріоритетніший чи байдужий

$NP_x = \{ y \in X | x \succ y \}$, (4.12)

є замкнутою множиною простору товарів для будь – якого $x \in X$.

За цією аксіомою обидві множини містять усі граничні точки, причому для обох множин ці точки утворюють множину байдужості I_x , рівну перетині $P_x \cap NP_x$.

З цих основних аксіом досконалої нестрогої впорядкованості та неперервності випливає, що існує неперервна дійсна функція, визначена на елементах множини $X \in U(o)$, котру називають функцією корисності і для якої

$U(x) \succsim U(y)$, якщо $x \succsim y$. (4.13)

Функція корисності зіставляє кожному наборові споживчих товарів певне число в такий спосіб, що, якщо набір A пріоритетніший, ніж набір B ($A \succ B$), то число, яке відповідає набору A , буде більшим, ніж те, що відповідає набору B .

Гранична корисність вимірює додаткове задоволення, яке отримує особа від споживання додаткової кількості товару.

Наприклад, гранична корисність, що пов’язана із зростанням споживання від 1 до

5 одиниць шоколаду, може дорівнювати 10, від 6 до 10 одиниць – 5, а від 11 до 15 одиниць – 3. Ці цифри узгоджуються з принципом зниження граничної корисності. У міру зростання споживання товару процес додаткового споживання дає усе менший приріст корисності.

2. Корисність за Нейманом. Сподівана корисність.

Для визначення корисності розглянемо вибір особи за умов ризику, який формалізується за допомогою поняття лотереї.

Для цього необхідно з множини пред'явлених експертам значень певного економічного показника (об'єкта) виділити два x^* та x^* таких, що $x^* \sim x$ для всіх $x^* \in X$ та $x^* \succ x$ для всіх $x \in X$, тобто найменше пріоритетне, в певному сенсі, значення економічного показника (це буде “нуль” даної шкали інтервалів) і найбільш пріоритетне у певному сенсі значення показника (разом з “нулем” воно визначить масштаб даної шкали). Власне так побудована функція корисності Дж.Неймана і О.Моргенштерна. Експерти пропонують порівнювати альтернативу: 1) значення показника x ; 2) лотерею: одержати x^* з імовірністю $(1-p)$ чи x^* з імовірністю (p) . Величину ймовірності p змінюють доти, доки, на погляд експерта, значення показника x і лотерея $L(x^*, p, x^*)$ не стануть еквівалентними. Максимальному та мініимальному значенням x^* та x^* приписують довільні числові значення $U^*=U(x^*)$ та $U^*=U(x^*)$, але так, щоб $U^* > U^*$. Під лотереєю $L(x^*, p(x), x^*)$ розуміють ситуацію, в якій особа може отримати x^* з імовірністю $p(x)$ або x^* з імовірністю $1-p(x)$.

Корисність варіанту x визначається ймовірністю $p(x)$, при якій особі байдуже, що обирати x – гарантовано, чи лотерею $L(x^*, p(x), x^*)$, де x^*, x^* вектори, більш та менш пріоритетні порівняно з x .

Нехай L – лотерея, що приводить до вигравів (подій) $x_1, x_2, \dots, x_N$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_N$. Позначимо сподіваний виграв (математичне сподівання виграшу) через x :

$$\bar{x} = M(x) = \sum_{s=1}^N p_s \cdot x_s. \quad (4.14)$$

Справедлива головна формула теорії сподіваної корисності ,

$$\bar{U} = MU(x(s)) = U(p_1, x_1; p_2, x_2; \dots p_N, x_N) = \sum_{s=1}^N p_s U(x_s) \quad (4.15)$$

тобто корисність ансамблю результатів збігається з математичним сподіванням корисності результатів.

Поняття детермінованого еквівалента лотереї L є одним з основних при розгляді різних характеристик ризику і їх взаємозв'язку з функціями корисності. Детермінований еквівалент лотереї L – це гарантована сума, отримання якої еквівалентне участі в лотереї, тобто $\sim L$. Отже визначається з рівняння $U(\cdot) = M[U(X)]$, тобто $= U-1MU(x)$. (4.16)

Сподіваний виграв та детермінований еквівалент, визначені згідно з формулами (4.14) та (4.16), стосовно лотереї із скінченим числом можливих вигравів. Якщо можливі виграші описуються щільністю (x) , то сподіваний виграв у цій лотереї

дорівнює

$$\bar{x} = M(X) = \int x \varphi(x) dx, \quad (4.17)$$

а детермінований еквівалент є розв'язанням рівняння

$$\bar{U} = M[U(x)] = \int U(x) \varphi(x) dx. \quad (4.18)$$

Згідно з теорією сподіваної корисності, суб'єкт керування, що приймає рішення за умов невизначеності та ризику, повинен максимізувати математичне сподівання корисності результатів. Отже, якщо $f(x, w)$ – вектор результатів, що залежить від вектора плану x та елементарної події w , то ефективність плану для значень w , які містяться у множині Ω , $w \in \Omega$ з імовірнісною мірою $P(dw)$, має вид

$$F(x) = \int U(f(x, w)) p dw = M_w U(f(x, w)). \quad (4.19)$$

Величина $P(dw)$ визначається або за статистичними методами при наявності необхідної кількості спостережень, або за допомогою спеціальних експертних процедур.