



МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ



Київ, 2021



1

ПЛАН

- 1. Загальна схема методу скінченних елементів.*
- 2. Матриця жорсткості скінченного елемента в локальній системі координат.*
- 3. Матриця перетворень (направляючих косинусів).*



Київ, 2021



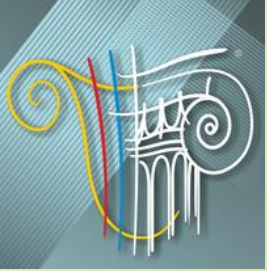
ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2

Метод скінченних елементів (МСЕ) ґрунтується на уявному представленні суцільного тіла у вигляді сукупності окремих скінченних елементів, що взаємодіють між собою в скінченному числі точок, які називаються **вузлами**. Система розбивається на прості скінченні елементи, напружено-деформований стан (НДС) яких попередньо досліджується.

Так, стержневі системи можуть бути розбиті на елементи у вигляді прямолінійних чи криволінійних стержнів з різними умовами з'єднання у вузлах. При розрахунку пластин найчастіше використовуються трикутні або чотирикутні СЕ. Далі будемо розглядати МСЕ розроблений на базі методу переміщень стосовно розрахунку плоских стержневих систем.

Сукупність сполучених між собою і прикріплених до основи СЕ утворює **розрахункову схему** методу, яку ще називають *скінченно-елементною моделлю*. Елементи і вузли скінченно-елементної схеми нумеруються.



ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3

Зовнішнє навантаження вважається прикладеним тільки у **вузлах** скінченно-елементної схеми. В загальному випадку при наявності позавузлових навантажень (наприклад, рівномірно розподілених навантажень чи моментів) обов'язково виконується перехід до вузлових навантажень.

У випадку прикладання лише вузлових зовнішніх навантажень переміщення вузлів будь-якого елемента однозначно визначають його **внутрішні зусилля і напруження**. Зв'язок між переміщеннями вузлів елемента і його внутрішніми зусиллями задається за допомогою **матриці жорсткості елемента**. Для всіх елементів, з яких складається скінченно-елементна схема, мають бути побудовані матриці жорсткості елементів.

У програмних комплексах, що реалізують алгоритм МСЕ, зберігаються готові матриці жорсткості для елементів різних типів.



ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

4

Кількість переміщень вузлів елементу, які однозначно визначають положення цього елементу у просторі називають **числом ступенів вільності елемента**. Для стержневих елементів плоскої задачі воно визначається за формулою:

$$n_{\text{ст.в.}} = 2 \cdot n_{\text{ш}} + 3 \cdot n_{\text{ж}} \quad (3.1)$$

де $n_{\text{ш}}$ - кількість шарнірних вузлів в елементі, а $n_{\text{ж}}$ - кількість жорстких вузлів в елементі.

Дійсно, якщо вузол є **шарніром**, то його положення на площині можна охарактеризувати двома лінійними переміщеннями, наприклад у вертикальному і горизонтальному напрямках. У разі **жорсткого вузла** необхідно ще додатково до лінійних зміщень задати його поворот.



ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

5

Аналогічно, для усієї скінченно-елементної схеми вводяться матриця жорсткості системи або глобальна матриця жорсткості, що встановлює зв'язок між переміщеннями вузлів системи і зусиллями в них, а також число ступенів вільності системи - кількість переміщень вузлів системи, які досить знати, щоб однозначно визначити стан усієї системи. Воно також визначається по формулі (3.1), в якій $n_{ш}$ - число шарнірних вузлів, а $n_{ж}$ - число жорстких вузлів в усій скінченно-елементній схемі.

Матриця жорсткості системи формується на основі матриць жорсткості всіх елементів схеми в єдиній системі осей координат, яка називається **глобальною**. При цьому матриці жорсткості окремих елементів формуються в **локальних системах координат**, що є відмінними від глобальної, і за допомогою спеціальної процедури приводяться до глобальної системи координат. Оскільки матриця жорсткості системи встановлює зв'язок між зусиллями, прикладеними до її вузлів і переміщеннями вузлів, то маючи побудовану матрицю жорсткості системи і знаючи зовнішнє вузлове навантаження, можна знайти переміщення усіх вузлів скінченно-елементної схеми. Для цього потрібно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. **Порядок** цієї системи дорівнює числу її ступенів вільності.



ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

6

Отже, розрахунок стержневої системи МСЕ у формі методу переміщень складається з наступних етапів:

1. Створення скінченно-елементної схеми (розбиття системи на вузли і елементи, їх нумерація, вибір глобальної системи координат).
2. Приведення заданого зовнішнього навантаження до вузлового.
3. Формування матриць жорсткості усіх елементів системи в локальних системах координат і їх перетворення в глобальну систему координат.
4. Формування глобальної матриці жорсткості, складання та розв'язування системи рівнянь МСЕ.
5. Визначення вузлових зусиль в елементах схеми з врахуванням приведенного позавузлового навантаження.
6. Визначення внутрішніх зусиль в елементах схеми, побудова епюр N , Q , M та їх аналіз.

Далі детально розглянемо усі ці етапи.



МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В ЛОКАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

7

Матриця жорсткості СЕ в локальній системі координат $[r]_j$ встановлює зв'язок між одиничними переміщеннями і зусиллями у вузлових точках для горизонтально розташованого елемента.

Як вже відзначалося, основна система МСЕ є сукупністю окремих стержнів, які з'єднуються між собою жорстко або за допомогою шарніра.

Отже, усе різноманіття СЕ можна звести до трьох типів елементів:

а) елемент з двох сторін обмежений жорсткими вузлами: такий елемент має шість ступенів вільності, тобто невідомими є шість можливих переміщень вузлових точок елемента

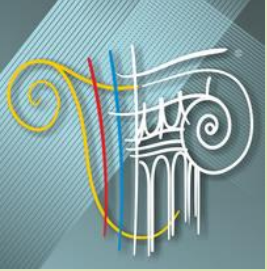


б) елемент з одного боку обмежений жорстким вузлом, а з іншою шарнірним: такий елемент має п'ять ступенів вільності



в) елемент з двох сторін обмежений шарнірними вузлами: такий елемент має чотири ступені вільності





МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В ЛОКАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

8

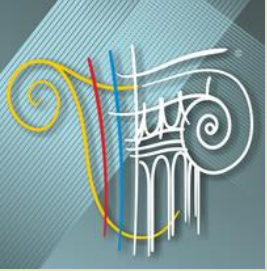
Розглянемо формування матриць жорсткості для показаних вище трьох типів СЕ у локальній системі осей координат.

Для елемента з шістьма ступенями вільності (тип а) матриця жорсткості матиме вид

$$[r]'_j = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & \dots & r'_{16} \\ r'_{21} & r'_{22} & \dots & r'_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r'_{61} & r'_{62} & \dots & r'_{66} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

де r'_{12} - реактивне зусилля в зв'язку 1 від одиничного переміщення зв'язку 2 і так далі.

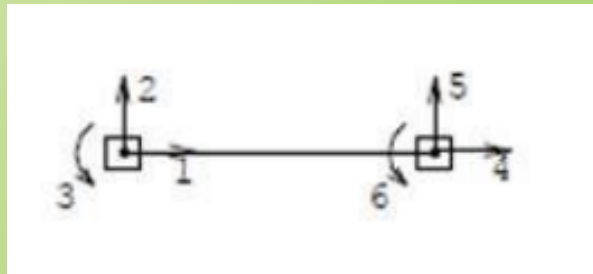
Чисельні значення реакцій визначатимемо використовуючи таблиці методу переміщень. Знак реакцій буде додатнім, якщо напрям реакцій співпадає з додатнім напрямом переміщень V_j .



МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В ЛОКАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

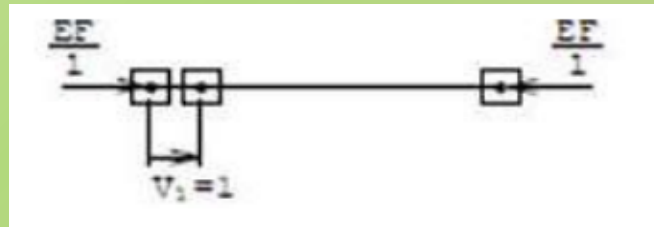
9

1. Формування матриці жорсткості для елемента з шістьма ступенями вільності (тип а)



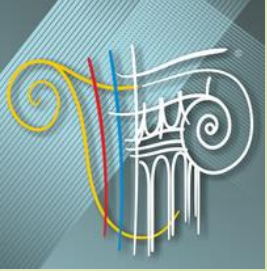
Задамо послідовно одиничні переміщення зв'язкам $V_1=1, V_2=1, \dots, V_6=1$.

1) $V_1=1$:



У відповідності із законом Гука:

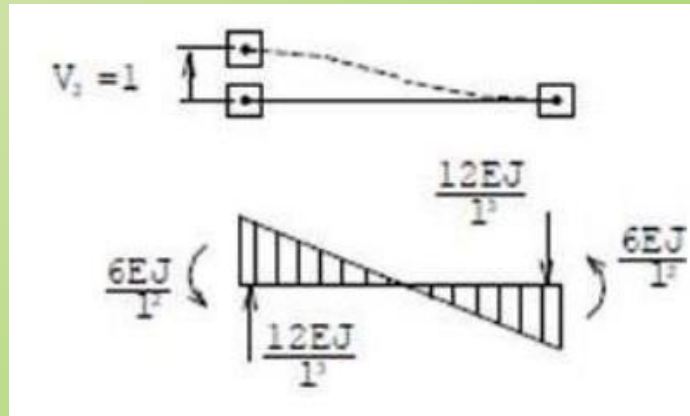
$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad \Delta l = V_1 = 1, \quad N = \frac{EF}{l}$$



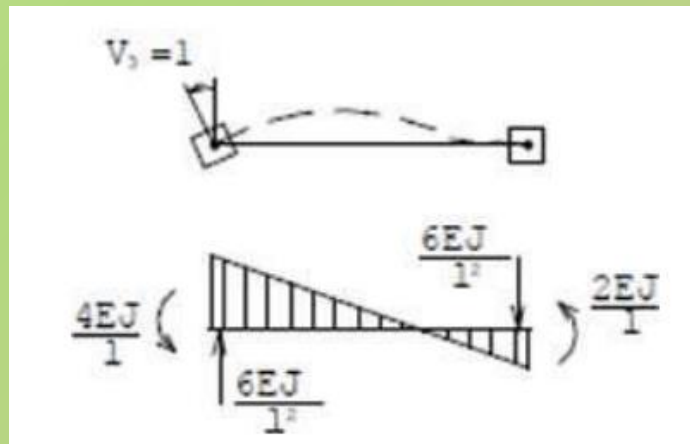
МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В ЛОКАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

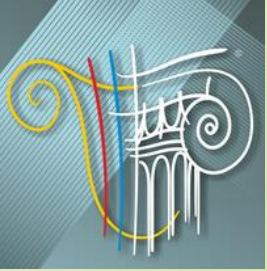
10

2) $V_2=1$:



3) $V_3=1$:





МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В ЛОКАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

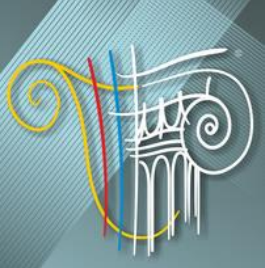
11

Аналогічно задаємо $V_4 = 1$, $V_5 = 1$, $V_6 = 1$.

Розставляючи реакції у відповідні стовпці, отримаємо матрицю жорсткості для елемента з шістьма ступенями вільності

$$[r]'_j = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Запишемо матриці жорсткості для двох інших типів елементів, формуючи їх аналогічно попередній.



МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В ЛОКАЛЬНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

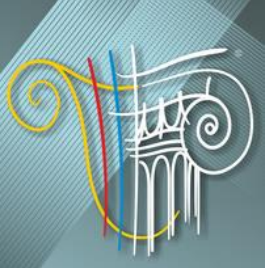
12

2. Матриця жорсткості для елемента з п'ятьма ступенями вільності (тип б) матиме вигляд

$$[r]'_j = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3. Матриця жорсткості для елемента з чотирма ступенями вільності (тип в) запишеться

$$[r]'_j = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EF}{l} & 0 & \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$



МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ (НАПРАВЛЯЮЧИХ КОСИНУСІВ)

13

3. Розглянемо тепер СЕ у складі рами, розташований під кутом α до осі X в глобальній системі осей координат. Необхідно перейти від матриці реакцій $[r]_j$ в локальній системі координат до матриці $[r]_j$ у глобальній системі координат.

Задачу вирішуємо таким чином. На початку побудуємо матрицю $[c]_j$, яка перетворить переміщення СЕ $\{Z\}_j$ в глобальній системі координат в переміщення $\{V\}_j$:

$$\{V\}_j = [c]_j \cdot \{Z\}_j \quad (3.6)$$

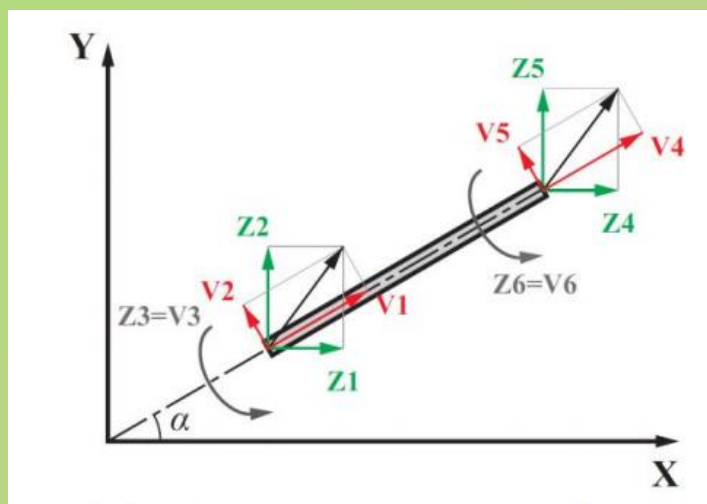
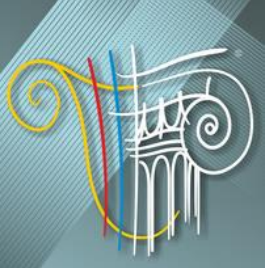


Рисунок 3.1 - Формування матриці перетворень



МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ (НАПРАВЛЯЮЧИХ КОСИНУСІВ)

14

З рисунку 3.1 запишемо рівняння:

$$V_1 = Z_1 \cos \alpha + Z_2 \sin \alpha$$

$$V_2 = -Z_1 \sin \alpha + Z_2 \cos \alpha$$

$$V_3 = Z_3$$

$$V_4 = Z_4 \cos \alpha + Z_5 \sin \alpha$$

$$V_5 = -Z_4 \sin \alpha + Z_5 \cos \alpha$$

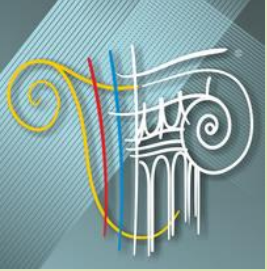
$$V_6 = Z_6$$

У матричній формі приведений вище запис матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

чи у блочній формі

$$[c]_j = \begin{bmatrix} c_{\Pi} & 0 \\ 0 & c_{\kappa} \end{bmatrix}$$



МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ (НАПРАВЛЯЮЧИХ КОСИНУСІВ)

15

Оскільки ми розглядаємо плоскі пружні системи, то вектори вузлових зусиль і вузлових переміщень, як для окремого елемента, так і для споруди в цілому, пов'язані між собою лінійно:

- в локальній системі координат

$$\{S\}_j' = [r]_j \{V\}_j \quad (3.8)$$

- в глобальній системі координат (основне рівняння МСЕ)

$$\{S\}_j = [r]_j \{Z\}_j \quad (3.9)$$

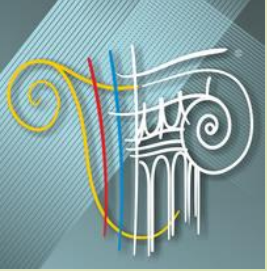
Крім того,

$$\{V\}_j = [c]_j \{Z\}_j \quad (3.10)$$

Аналогічно

$$\{S\}_j' = [c]_j \{S\}_j \quad (3.11)$$

де $\{S\}_j'$, $\{S\}_j$ - вузлові зусилля СЕ відповідно в локальній і глобальній системах координат.



МАТРИЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ (НАПРАВЛЯЮЧИХ КОСИНУСІВ)

16

Тоді

$$\{S\}_j = [c]_j^{-1} \{S\}_j = [c]_j^{-1} [r]_j \{V\}_j = [c]_j^{-1} [r]_j [c]_j \{Z\}_j$$

Для матриці направляючих косинусів виконується рівність $[c]_j^{-1} = [c]_j^T$. Тоді

$$\{S\}_j = [c]_j^T [r]_j [c]_j \{Z\}_j$$

Позначимо

$$[r]_j = [c]_j^T [r]_j [c]_j \quad (3.12)$$

Вираз (3.12) і є формулою для обчислення матриці жорсткості СЕ в глобальній системі координат.

При формуванні матриць жорсткості окремих елементів $[r]_j$, мають бути зафіксовані початок і кінець кожного стержня, оскільки від цього залежить знак кута α , що визначає орієнтацію стержня в глобальній системі координат ХОУ.

Дякую за увагу!