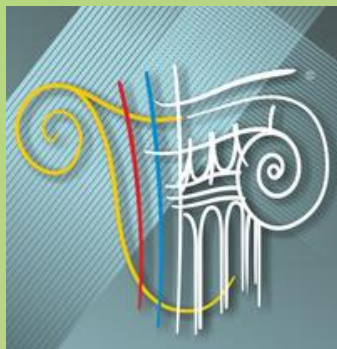




РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ



Київ, 2021



1

ПЛАН

- 1. Матриця жорсткості для споруди в цілому.*
- 2. Визначення переміщень і зусиль в елементах схеми.*
- 3. Приклад розрахунку рами методом скінченних елементів.*



Київ, 2021



МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ ДЛЯ СПОРУДИ В ЦІЛОМУ

2

Розглянемо тепер як формується матриця жорсткості для споруди в цілому, коли є матриці жорсткості для усіх окремих елементів. Нехай задана яка-небудь стержнева система (рис. 4.1).

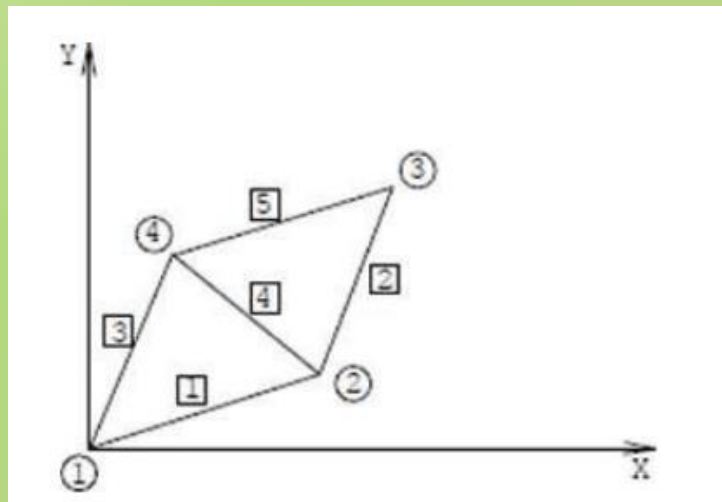
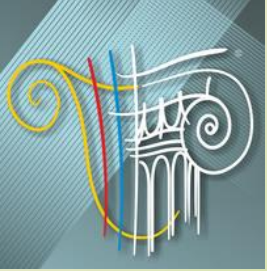


Рисунок 4.1 - Стержнева система

Усі вузли вважатимемо жорсткими, тобто з кожним з них пов'язано по 3 можливі переміщення.



МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ ДЛЯ СПОРУДИ В ЦІЛОМУ

3

Матрицю жорсткості для всієї споруди покажемо у блочному виді, з розмірами блоків 3×3 , оскільки з кожним вузлом пов'язано по 3 можливі переміщення (горизонтальне, вертикальне і поворот вузла).

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Тут r_{12} - перший індекс вказує номер вузла, в якому виникає блок реакцій, а другий - номер вузла, зміщенням якого ці реакції викликані. Нульові блоки означають, що відповідні вузли не пов'язані безпосередньо стержнем і прямо не взаємодіють, тобто не передають реакції з вузла у вузол.

Загальна матриця жорсткості $[r]$ виходить шляхом сумування відповідних блоків матриць жорсткості окремих стержнів.



ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ І ЗУСИЛЬ В ЕЛЕМЕНТАХ СХЕМИ

4

Наприклад, перший рядок блочної матриці $[r]$ отриманий шляхом сумування відповідних блоків матриць жорсткості окремих елементів:

$$r_{11} = r'_{11} + r'_{11}, r_{12} = r'_{12}, r_{14} = r'_{14}; \quad (4.2)$$

З основного рівняння МСЕ (3.9) визначається вектор вузлових переміщень

$$\{Z\} = [r]^{-1}\{S\}; \quad (4.3)$$

Таким чином стають відомими переміщення всіх вузлів розрахункової схеми. Внаслідок нерозривності деформацій скінченноелементної моделі кінці стержнів, що примикають до вузлів, які переміщуються, матимуть такі самі переміщення.

Отже, для кожного стержня скінченноелементної моделі можна побудувати вектор вузлових переміщень в локальній системі $\{S\}_j$.

Сумарні реакції на кінцях стержня складаються з реакцій, які зумовлені переміщеннями вузлів скінченноелементної моделі і силами, що спричинені дією прикладеного на стержні зовнішнього навантаження. Дія сумарних кінцевих реакцій зумовлює внутрішні зусилля на кінцях стержня. Приклавши сумарні кінцеві реакції до стержня в локальній системі координат, можемо обчислити внутрішні зусилля в будь-якому його перерізі, розглядаючи рівновагу однієї з його частин.



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

5

Порядок розрахунку рами МСЕ розглянемо на конкретному невеликому прикладі. Задана рама показана на рис. 4.2 а). Жорсткості $EA_1 = EA_3 = 10 \text{ МН}$, $EA_2 = 20 \text{ МН}$, $EA_1 = 1 \text{ МН/м}^2$, $EA_2 = 2 \text{ МН/м}^2$.

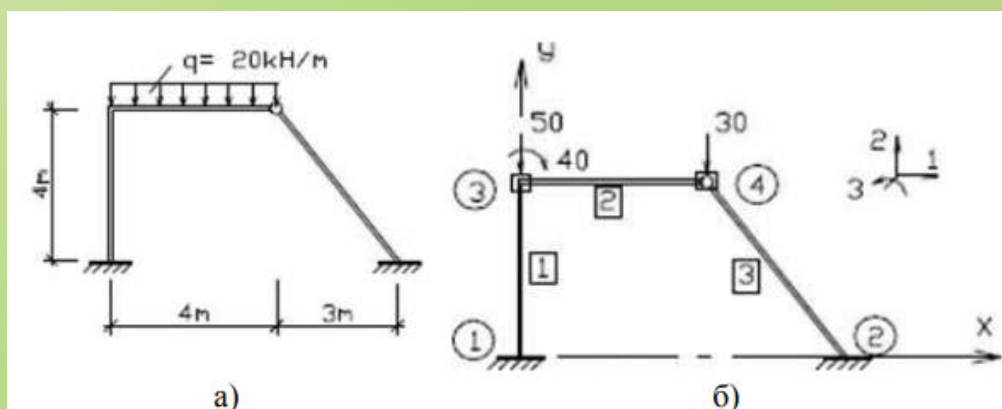


Рисунок 4.2 - Задана рама (а) і основна схема МСЕ (б)

Основну систему МСЕ вибираємо розбиваючи раму на три прямолінійні скінченні елементи (СЕ). Нумеруємо вузли та елементи.

У вузлі 3 елементи з'єднуються між собою жорстко, з цим вузлом пов'язано три невідомі переміщення. У вузлі 2 елементи з'єднуються шарніром, тут два невідомі переміщення. У опорних вузлах 1 і 2 усі три переміщення дорівнюють нулю. Отже, дана рама має п'ять невідомих переміщень в МСЕ. Додатні напрями переміщень і зовнішніх навантажень приймаємо як показано на малюнку.



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

6

Глобальну систему осей координат розташовуємо так, щоб координати усіх вузлів були додатними. Розподілене по ригелю навантаження приводимо до вузлового, використовуючи для цього таблиці методу переміщень (рис. 4.3).

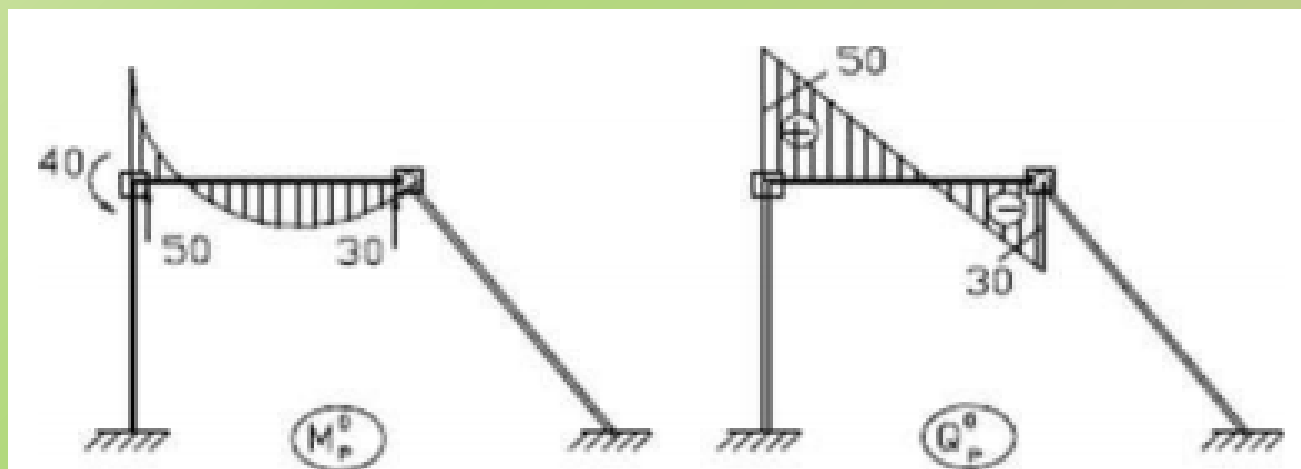


Рисунок 4.3 - Приведення позавузлових навантажень до вузлових



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

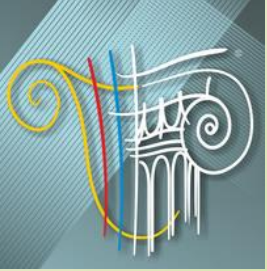
7

Складаємо початкові матриці. Вектор зовнішніх навантажень P для споруди в цілому в загальній системі осей координат і вектори перетворень позавузових навантажень до вузових для СЕ в локальних системах координат S_i^0 мають вигляд:

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ -40 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}, \quad S_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 40 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad S_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матриці жорсткості для СЕ в локальній системі координат складаються таким чином. Матриця жорсткості для першого елементу має розмірність 3×3 , оскільки три переміщення пов'язані з вузлом 1 рівні нулю, тому з матриці для елементу з двома жорсткими вузлами (3.3) викреслюємо три перші рядки і три перші стовпці.

Для другого елементу матриця жорсткості має розмірність 5×5 та вигляд (3.4). Для третього елементу переміщення у вузлі 2 також рівні нулю, тому його матриця жорсткості матиме розмірність 2×2 на основі (3.4).



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

8

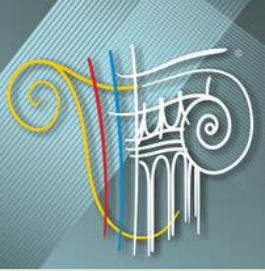
Локальна система координат пов'язана з окремим елементом, вісь X спрямована уздовж стержня від початкового вузла до кінцевого, а вісь Y нормально до неї.

$$r'_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r'_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0.094 & 0.375 & 0 & -0.094 \\ 0 & 0.375 & 1.5 & 0 & -0.375 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -0.094 & -0.375 & 0 & 0.094 \end{bmatrix}$$

$$r'_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матриці направляючих косинусів, мають жорсткості : для першого елементу 3×3 , для другого 5×5 , для третього 2×2 . Поворот елементів здійснюється проти годинникової стрілки, навколо початкового вузла з горизонтального положення до положення як в конструкції. У нашому випадку $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_2 = 0^\circ$, $\varphi_3 = 127^\circ$.



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

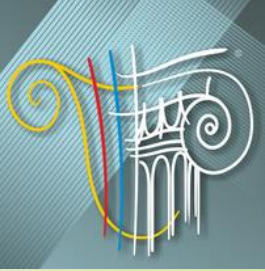
9

Матриці направляючих косинусів запишуться:

$$[c]_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[c]_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[c]_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \\ -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.602 & 0.798 \\ -0.798 & -0.602 \end{bmatrix}$$

Матриці жорсткості окремих елементів в глобальній системі координат обчислюють за формулою (3.12)

$$[r]_j = [c]_j^T [r]_j^1 [c]_j$$



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

10

Після перемножування відповідних матриць, отримуємо:

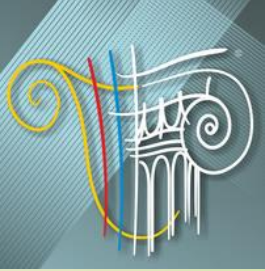
$$r^1 = r_{33}^1 = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & 0.375 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r^2 = \begin{bmatrix} r_{33}^2 & r_{34}^2 \\ r_{43}^2 & r_{44}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & \vdots & -5 & 0 \\ 0 & 0.094 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.094 \\ 0 & 0.375 & 1.5 & \vdots & 0 & -0.375 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -5 & 0 & 0 & \vdots & 5 & 0 \\ 0 & -0.094 & -0.375 & \vdots & 0 & 0.094 \end{bmatrix}$$

$$r^3 = r_{44}^3 = \begin{bmatrix} 0.7219 & -0.9586 \\ -0.9586 & 1.2811 \end{bmatrix}$$

Матриця жорсткості споруди в цілому формується з блоків матриць жорсткості окремих елементів таким чином:

$$r = \begin{bmatrix} r_{33}^1 + r_{33}^2 & r_{34}^2 \\ r_{43}^2 & r_{44}^2 + r_{44}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1875 & 0 & 0.375 & \vdots & -5 & 0 \\ 0 & 2.594 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.094 \\ 0.375 & 0.375 & 2.5 & \vdots & 0 & -0.375 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -5 & 0 & 0 & \vdots & 5.7219 & -0.9586 \\ 0 & -0.094 & -0.375 & \vdots & -0.9586 & 1.375 \end{bmatrix}$$



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

11

де r_{33}^1 - блок реакцій, що виникають за рахунок пружних властивостей першого елемента, в зв'язках накладених на третій вузол, від одиничних зміщень цих же зв'язків.

Після знаходження оберненої матриці $[r]^{-1}$ по відомих стандартних процедурах, вектор переміщень Z визначається по формулі:

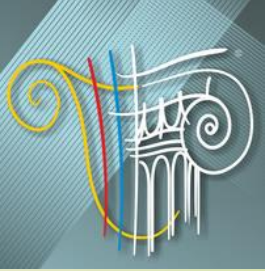
$$Z = r^{-1}P = \begin{bmatrix} 4.306 & 0.1384 & -0.2302 & 4.2502 & 2.91 \\ 0.1384 & 0.3987 & -0.0646 & 0.1318 & 0.1063 \\ -0.2302 & -0.0646 & 0.44 & -0.2058 & -0.0279 \\ 4.2502 & 0.1388 & -0.2058 & 4.3942 & 3.0168 \\ 2.91 & 0.1063 & -0.0279 & 3.0168 & 2.8301 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ -40 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85.01 \\ -20.54 \\ -13.53 \\ -89.21 \\ -89.1 \end{bmatrix}$$

Вектори вузлових зусиль в стержнях в загальній системі координат обчислюємо за формулою (3.9)

$$S_i = r_i Z_i$$

В результаті обчислень маємо:

$$S_1 = \begin{bmatrix} -21 \\ -51.35 \\ -45.4 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 21 \\ 1.35 \\ 5.4 \\ -21 \\ -1.35 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ -28.63 \end{bmatrix}$$



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

12

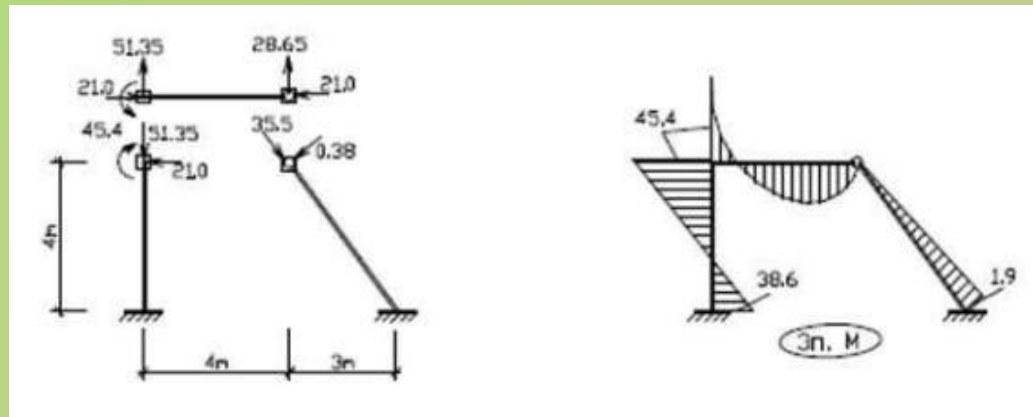
Зусилля у вузлах скінченних елементів в локальній системі координат з врахуванням векторів перетворень навантажень визначаються:

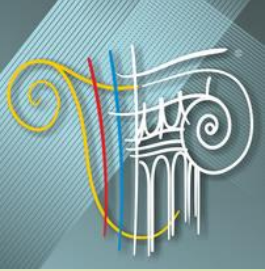
$$\dot{S}_i = c_i S_i + S_i^0 \quad (4.4)$$

У нашому випадку в результаті обчислень маємо:

$$S'_1 = \begin{bmatrix} -51.35 \\ 21 \\ -45.4 \end{bmatrix}, \quad S'_2 = \begin{bmatrix} 21 \\ 51.35 \\ 45.4 \\ -21 \\ 28.65 \end{bmatrix}, \quad S'_3 = \begin{bmatrix} -35.5 \\ 0.38 \end{bmatrix}$$

Маючи вектори зусиль в локальній системі координат, прикладаємо їх до відповідних вузлів окремих елементів і будуємо епюри внутрішніх зусиль (рис. 4.4).





ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

13

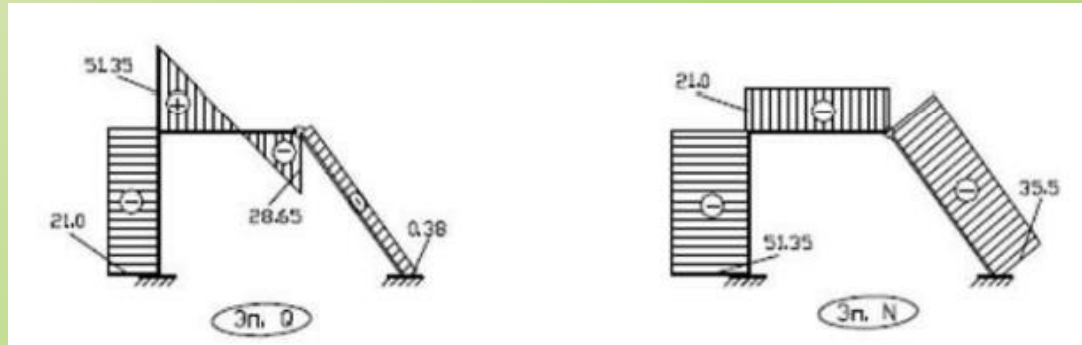


Рисунок 4.4 - Епюри внутрішніх зусиль

Для виконання статичної перевірки, покажемо розрахункову схему рами із заданими навантаженнями і опорними реакціями. Напрями і величини опорних реакції визначаємо по епюрах.

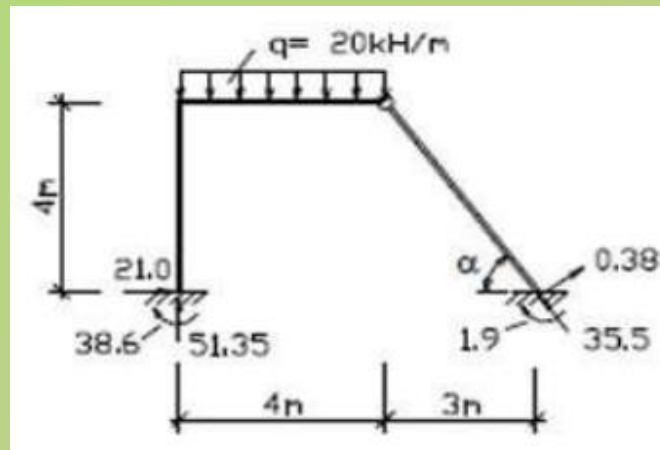
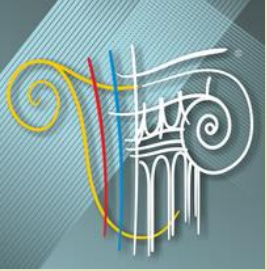


Рисунок 4.5 – Схема рами з визначеними опорними реакціями



ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ РАМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

14

Тоді умови статичної рівноваги записуються як:

$$\sum X = 0: \quad 21 + 0.38\sin\alpha - 35.5\cos\alpha = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad 1.35 + 0.38\cos\alpha + 35.5\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_B = 0: \quad q \cdot 4 \cdot 5 - 51.35 \cdot 7 - 38.6 - 35.5 = 0$$

Дякую за увагу!