ДИНАМІКА СПОРУД
Частина 2

7. Вимушені коливання систем із одним ступенем вільності

Якщо у рівнянні вимушених коливань системи із одним ступенем вільності у формі методу сил не враховувати сили опору, то отримаємо диференційне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m}.$$

Загальне рішення цього рівняння дорівнює сумі загального рішення однорідного рівняння і часткового рішення неоднорідного рівняння :

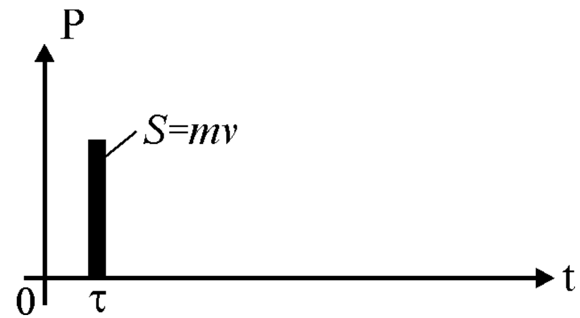
$$y = y_{од} + y_{ч} ,$$

де $y_{од}$ збігається із рішенням рівняння власних коливань, а часткове рішення залежить від виду динамічного навантаження.

Часткове рішення рівняння шукаємо шляхом розкладення навантаження на суму миттєвих імпульсів.

а) Дія миттєвого імпульсу

Нехай на систему із масою m, що перебуває у стані спокою, у момент часу τ діє миттєвий імпульс $S=mv$:



Після цього система почне вільно коливатися. Якщо не враховувати сили опору, тоді коливання будуть гармонічними:

$$y=a\sin(\omega t+\varphi).$$

У момент впливу миттєвого імпульсу маса ще не встигає змінити своє положення, однак надає йому деяку швидкість.

Тому $y_{\tau=t}=0,\ v_{\tau=t}=S/m$.

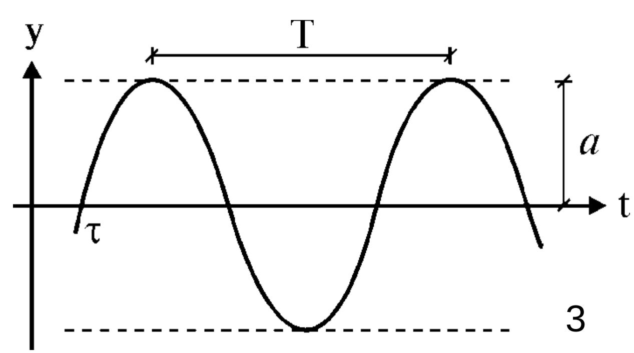
За цими умовами знаходимо початкову фазу і амплітуду коливань:

$$\varphi=-\omega\tau,\quad a=\frac{S}{m\omega}.$$

Таким чином, вплив миттєвого імпульсу спричиняє коливання маси за гармонійним законом

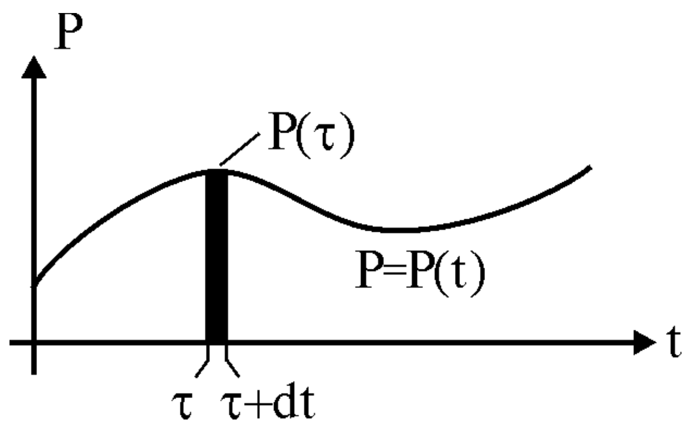
$$y=\frac{S}{m\omega}\sin\omega\left(t-\tau\right)$$

із коловою частотою ω і періодом T:



б) Дія довільної сили

Якщо на систему діє навантаження, що змінюється за законом *P(t)*, її можна розглядати як суму нескінченно великої кількості миттєвих імпульсів : $S = P(\tau)\,d\tau$



Тоді

$$y_ч = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(t)\sin\omega\left(t-\tau\right)dt.$$

Цей вираз називається ***інтегралом Дюамеля***.

в) Дія вібраційного навантаження

При дії вібраційного навантаження $P(t)=P_0\,sin\theta t$

$$y_ч = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0 \sin\theta\tau \cdot \sin\omega(t-\tau)\,d\tau.$$

Після його інтегрування отримаємо вираз:

$$y = y_{од} + y_ч = y_{соб} + \frac{P_0}{m\omega(\theta^2-\omega^2)}(\theta\sin\omega t - \omega\sin\theta t).$$

Перший доданок правої частини цього виразу $y_{вл}$ і доданок у дужках $\theta \cdot sin\,\omega t$ відносяться до власних коливань із частотою ω. Через наявність демпфування ці коливання достатньо швидко затухають. Тому у загальному рішенні можна залишити тільки другу складову із виразу в дужках:

$$y = \frac{P_0\sin\theta t}{m(\omega^2-\theta^2)}\ .$$

Оскільки $\omega^2 = \dfrac{1}{m\delta}$,

$$\frac{1}{m} = \omega^2 \delta, \quad \frac{P_0}{m} = \omega^2 \delta P_0 = \omega^2 y_{cm}.$$

Тоді

$$y = \frac{P_0 \sin\theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{\omega^2 y_{cm} \sin\theta t}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{1}{1-(\theta/\omega)^2} y_{cm} \sin\theta t.$$

Із цієї формули випливає, що коли $\theta \to \omega$, то $y \to \infty$. Таке різке збільшення переміщень при коливаннях називають ***резонансом***.

У дійсності переміщення споруди не можуть бути нескінченно великими, оскільки існує демпфування коливань задяки внутрішньому тертю та опору середовища.

Тим не менше, амплітуди коливань можуть бути значними, що може призвести до руйнування споруди.

Щоб цього не сталося, слід запобігати резонансу або близькому до нього стану.

Визначимо відношення максимального динамічного переміщення до статичного переміщення:

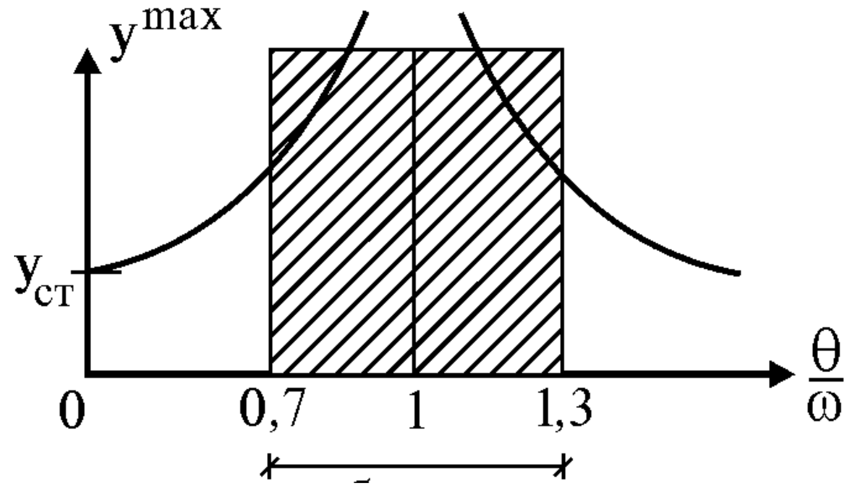
$$\mu = \frac{y_{дин}^{max}}{y_{cm}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}.$$

Це співвідношення називають ***динамічним коефіцієнтом***. Як випливає із формули, резонансу не буде, якщо відношення частоти вібраційної сили θ до частоти ω не дорівнює одиниці.

Враховуючи прийняті норми, необхідно, щоб ці частоти відрізнялися щонайменше на 30%:

$$\left| 1 - \frac{\theta}{\omega} \right| \geq 0,3.$$

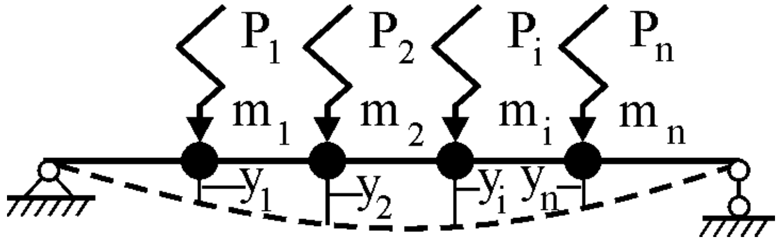
Цей критерій дає змогу встановити так звану резонансно небезпечну зону (на рис. – заштрихована ділянка):



область резонансу

8. Коливання системи із *n* ступенями вільності

Невагому балку із *n* точковими масами можно розглядати як коливальну систему із *n* динамічними ступенями вільності:



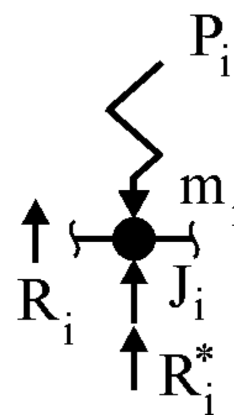
Якщо на маси будуть діяти динамічні сили

$$P_1=P_1(t),\ \ldots,\ P_n=P_n(t),$$

то в них виникнуть інерційні сили

$$J_1=m_1\ddot{y}_1,\ \ldots,\ J_n=m_n\ddot{y}_n,$$

а зі сторони балки будуть діяти сили пружності $R_1, \ldots, R_n$ і сили опору середовища $R_1^*, \ldots, R_n^*$.



Із умови рівноваги сил, що діють на довільну масу m_i, отримаємо

$$J_i+R_i+R_i^*-P_i=0.$$

Якщо сили пружності R_i визначити за методом сил, і всі *n* рівнянь об'єднати в систему рівнянь, отримаємо матричне рівняння

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{y}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}^{*}=\boldsymbol{\delta}\mathbf{P}$$

– ***рівняння коливань системи із багатьма ступенями вільності у формі методу сил***.

На вигляд воно відповідає рівнянню коливань системи із одним ступенем вільності. Однак усі позначення є матричними:

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{m}=\mathbf{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

матриця мас **матриця податливості** **динамічна матриця**

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ **– вектор переміщень**

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$ **– вектор навантаження**

9. Власні коливання систем із *n* ступенями вільності

При **P**=**P***= **0** отримаємо рівняння власних коливань

$$\mathbf{d}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

яке являє собою систему *n* диференційних рівнянь. Його рішення знаходять у вигляді суми *n* часткових розв'язків:

$$\mathbf{y} = \sum \mathbf{y}_i = \sum \mathbf{a}_i \, sin(\omega t + \varphi),$$

де вектори $\mathbf{a}_i$ – форми власних коливань.

Підстановка цього рішення до початкового рівняння приводить до алгебраїчного рівняння

$$(\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{a}_i = \mathbf{0},$$

де

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

– ***власне значення*** матриці **d**.

Це матричне рівняння у звичайному записі є системою однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (d_{11}-\lambda)a_{1i}+d_{12}a_{2i}+\ldots+d_{1n}a_{ni}=0, \\ d_{21}a_{1i}+(d_{22}-\lambda)a_{2i}+\ldots+d_{2n}a_{ni}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n1}a_{1i}+d_{n2}a_{2i}+\ldots+(d_{nn}-\lambda)a_{ni}=0, \end{cases}$$

яка має два типи рішення:

1) тривіальне рішення $a_{1i}=a_{2i}=\ldots=a_{ni}=0$; тоді коливань не буде;

2) невизначене рішення; для цього визначник системи рівнянь має дорівнювати нулю:

$$det\left(\mathbf{d}-\lambda\mathbf{E}\right)=det\begin{bmatrix} (d_{11}-\lambda) & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & (d_{22}-\lambda) & \ldots & d_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & (d_{nn}-\lambda) \end{bmatrix}=0.$$

Якщо розкрити цей визначник, отримаємо поліном *n*-го ступеня відносно λ:

$$\lambda^{\mathrm{n}} - q_1\lambda^{\mathrm{n-1}} + q_2\lambda^{\mathrm{n-2}} - \ldots + (-1)^{\mathrm{n-1}} q_{\mathrm{n-1}}\lambda + (-1)^{\mathrm{n}} q_{\mathrm{n}} = 0.$$

Такий поліном має *n* коренів λ_1, ..., λ_n, які називаються ***власними значеннями*** матриці **d**.

Запишемо власні значення у порядку зменшення:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n .$$

Оскільки $\lambda = 1/\omega^2$, то колові частоти коливання розташовуються у порядку зростання:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n .$$

Ця послідовність називається ***спектром частот***, а найменша частота ω_1 називається ***основною частотою***.

Таким чином, динамічна система із *n* ступенями вільності має *n* частот власних коливань (*n* власних коливань).

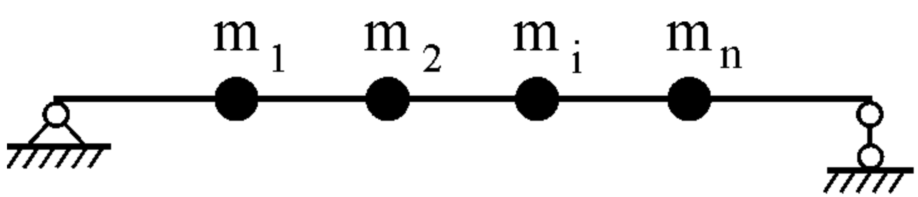
Для практичних цілей найважливішими є декілька найменших, так званих, нижчих власних частот.

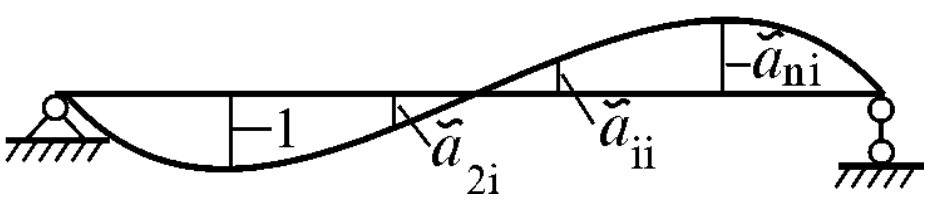
Кожній власній частоті відповідає своя форма коливань.

Для їх визначення власні значення λ_i слід почергово підставляти у систему алгебраїчних рівнянь.

Але в усіх випадках визначник системи рівнянь дорівнюватиме нулю. Тому одне рівняння відкидають, а амплітуду однієї маси вважають умовно визначеною (наприклад, можна прийняти $a_1=1$). Тоді із рівнянь, що залишилися, можна обчислити амплітуди інших мас.

Форми власних коливань динамічної системи можна представити графічно:





– i-а форма власних коливань

10. Вимушені коливання систем із *n* ступенями вільності

Нехай на систему діють вібраційні сили $P_i = \overline{P}_i \sin\theta t$.

Зберемо їх у загальний вектор $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{P}} \sin\theta t$,

де $\overline{\mathbf{P}} = \{\, \overline{P}_1 \quad \dots \quad \overline{P}_n \,\}$ – амплітудні (найбільші) значення вібраційних сил,

θ – колова частота цих сил.

Тоді рівняння вимушених коливань набуде такого вигляду

$$\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{P}.$$

Якщо загальне рішення дорівнює сумі загального рішення однорідного рівняння і часткового рішення неоднорідного рівняння:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{од} + \mathbf{y}_{ч} = \mathbf{y}_{св} + \mathbf{y}_{вын}.$$

Як і в системах із одним ступенем вільності, вільні коливання швидко затухають: $\mathbf{y}_{св} \to \mathbf{0}$. Тому, після усталення коливань, вони будуть здійснюватися із частотою вібраційної сили:

$$\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}} \sin\theta t.$$

Тут $\overline{\mathbf{y}} = \{\, \overline{y}_1 \quad \dots \quad \overline{y}_n \,\}$ – вектор амплітуди коливань мас.

Якщо врахувати, що

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\theta^2\,\overline{\mathbf{y}}\,sin\,\theta t\,,\ \ \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\delta}\overline{\mathbf{P}}\,sin\,\theta t = \mathbf{y}_{\text{ст}}\,sin\,\theta t\,,$$

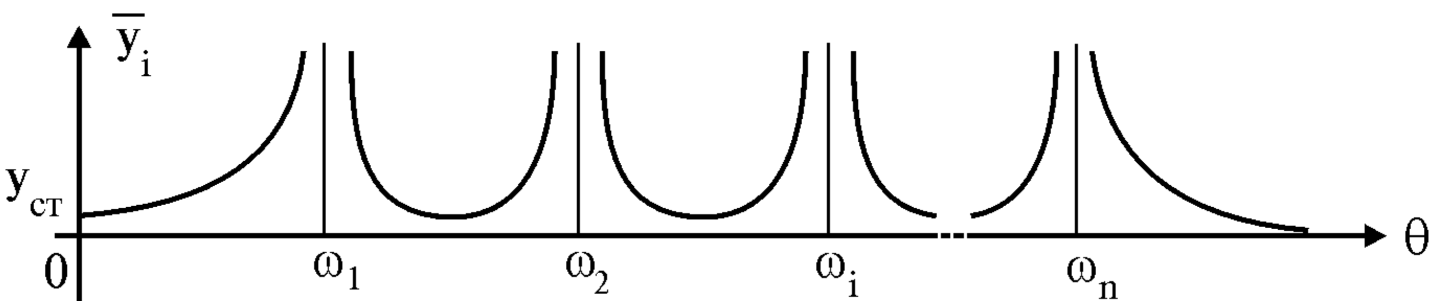
тоді рівняння вимушених коливань матиме такий вигляд:

$$-\theta^2\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{m}\,\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\delta}\,\overline{\mathbf{P}}. \qquad (1)$$

Із нього можна знайти вектор амплітуд коливань:

$$\overline{\mathbf{y}} = (\mathbf{E} - \theta^2\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{m})^{-1}\,\mathbf{y}_{\text{ст}}\,.$$

Однак, якщо частота вібраційної сили *θ* буде близькою до однієї із власних частот ω_i, то визначник матриці у дужках стає близьким до нуля. Це призводить до різкого збільшення амплітуди коливань мас, тобто до резонансу. Тому в системі із *n* ступенями вільності є можливими *n* резонансних станів:



Враховуючи, що

$$\mathbf{J} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} = -\theta^2 \mathbf{m}\mathbf{y},$$

рівняння (1) можна привести до вигляду

$$(\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{\theta^2}\mathbf{m}^{-1})\,\overline{\mathbf{J}} = \mathbf{y}_{cm},$$

яке у звичному записі є системою з *n* рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}^{*}\overline{J}_1 + \delta_{12}\overline{J}_2 + \ldots + \delta_{1n}\overline{J}_n = y_{1,cm}; \\ \delta_{21}\overline{J}_1 + \delta_{22}^{*}\overline{J}_2 + \ldots + \delta_{2n}\overline{J}_n = y_{2,cm}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}\overline{J}_1 + \delta_{n2}\overline{J}_2 + \ldots + \delta_{nn}^{*}\overline{J}_n = y_{n,cm}, \end{cases}$$

де $\delta_{ii}^{*} = \delta_{ii} - \dfrac{1}{m_i\theta^2}.$

Вона називається ***системою канонічних рівнянь розрахунку на вібраційне навантаження***.

Із неї визначають максимальне значення інерційних сил $\overline{J}_i$.

Після цього обчислюють узагальнені сили, що діють на систему $\overline{Q}_i = \overline{P}_i - \overline{J}_i$, потім обчислюють максимальні значення внутрішніх зусиль, а за ними виконують перевірку на міцність.

11. Порядок розрахунку на вібраційне навантаження

Розрахунок на вібраційне навантаження зазвичай складається із рішення трьох задач динаміки:

1) розрахунок на власні коливання – визначення частот і форм власних коливань із рівняння

$$det\left(\mathbf{d}-\lambda\mathbf{E}\right)=0;$$

2) перевірка на резонанс за умовою

$$\left|\frac{\omega_i-\theta}{\omega_i}\right|\geq 0{,}2;$$

3) перевірка динамічної міцності

$$\sigma_{дин}^{max}=\frac{M_{дин}^{max}}{W}<\left[\sigma_{дин}\right].$$

За необхідності вирішують четверту задачу динаміки – перевірка динамічної жорсткості за умови

$$y_i<\left[y_i\right].$$