

В.А.Баженов, Г.М.Іванченко,
О.В.Шишов, С.О.Пискунов

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

**Розрахункові вправи. Задачі.
Комп'ютерне тестування**

Навчальний посібник

Київ – 2013

15. Розрахунок рам на стійкість

15.1. Короткі теоретичні відомості

Формою рівноваги називається деформований стан пружної системи, якому відповідають внутрішні сили, що разом із зовнішніми навантаженнями задовольняють умови рівноваги.

Стійкою називається така форма рівноваги, при якій у випадку невеликого примусового відхилення система повертається до попереднього стану, коли причини, що зумовили відхилення, щезають. Якщо це відхилення з часом зростає, то форма рівноваги називається **не стійкою**.

Перехід споруди зі стійкого до нестійкого стану рівноваги при кількісному зростанні зовнішнього навантаження називається **втратою стійкості**. Момент переходу зі стійкого до нестійкого стану рівноваги називається **критичним станом** системи, а відповідне цьому моменту навантаження – критичним.

При втраті стійкості першого роду (втрата стійкості за Ейлером) відбувається зміна стану рівноваги, яка зумовлена зростанням зовнішнього навантаження до деякої (критичної) величини.

Так, наприклад, у центрально-стисненому стержні при докритичному навантаженні стійким є прямолінійний стан рівноваги. При збільшенні навантаження до критичної величини ця форма рівноваги стає нестійкою і відбувається перехід до зігнутої форми рівноваги.

У першому стані виникають лише поздовжні деформації. В рамках такий стан є можливим тільки при дії вузлових сил, які не викликають деформацій згину. Форма рівноваги характеризується відсутністю кутів повороту вузлів і їх поступальних переміщень (якщо знехтувати поздовжніми деформаціями). Всі стержні в процесі деформації залишаються прямолінійними.

Другий стан (після втрати стійкості) характеризується появою деформацій згину в елементах рами, внаслідок чого в стержнях виникають згинальні моменти і поперечні сили, на величини яких суттєво впливають поздовжні сили. Іншими словами, до деформації стиснення додається згин.

Найпростішою задачею розрахунку стержневих елементів на стійкість є визначення критичної сили для центрально-стиснутого прямолінійного стержня, яка обчислюється за формулою Ейлера:

$$P^{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (15.1)$$

У наведеній формулі EI – жорсткість стержня на згин; l – довжина стержня, μ – коефіцієнт приведення довжини, величина якого залежить від граничних умов стержня.

Формулу (15.1) можна записати в іншому вигляді:

$$P^{kp} = \frac{v^2 EI}{l^2}, \quad (15.2)$$

де $v = \frac{\pi}{\mu}$ – безрозмірний параметр (параметр стійкості), який враховує вплив поздовжньої сили на згин.

Значення параметрів μ і v при різних граничних умовах наведені на рис.15.1.

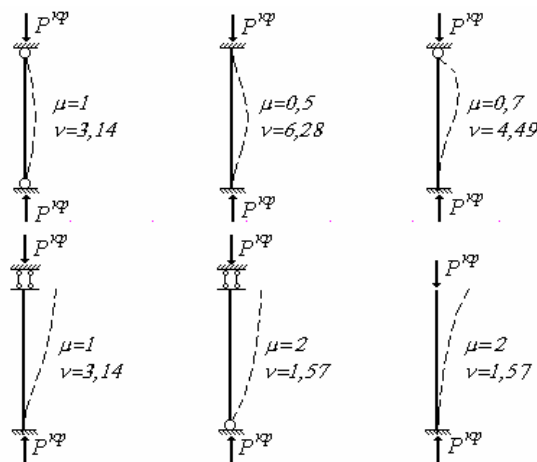


Рис.15.1

Мета розрахунку на стійкість полягає в обчисленні величини критичного навантаження.

При розрахунку рам на стійкість в основу покладено такі припущення:

- розглядаються тільки вузлові навантаження, які в початковому стані не зумовлюють поперечного згину;
- не враховуються поздовжні деформації і деформації зсуву стержнів;
- усі зовнішні сили повинні залежати від одного параметра, який називається параметром навантаження.

Враховуючи ці припущення, згинальні моменти M і поперечні сили Q до настання втрати стійкості дорівнюють нулю. Поздовжні сили в стержнях можуть бути обчислені з умов рівноваги вузлів. У момент втрати стійкості, коли рама зі стисненої перетворюється на стиснено-зігнуту, в стержнях рами на додаток до поздовжніх сил з'являються згинальні моменти і поперечні сили.

Розрахунок плоских рам на стійкість здебільшого виконується за методом переміщень. Основна система методу утворюється накладенням на задану схему додаткових з'єднань, які перешкоджають можливим кутовим і поступальним переміщенням вузлів при виникненні згину, тобто при втраті стійкості. Розв'язувальні рівняння методу переміщень – це умови рівності нулю реакцій у додаткових з'єднаннях. Якщо з'єднання є пружним (“плаваючим”) затисненням,

необхідно вирізати вузол, який утримується від повороту цим затисненням. Реактивний момент у затисненні, який визначається як сума кінцевих моментів в усіх стержнях, що примикають до вузла, прирівнюється до нуля. Якщо ж розглядається додатковий стержень, то необхідно вирізати і розглянути рівновагу частини рами, яка утримується цим стержнем від поступального переміщення. Переріз при цьому повинен перетинати додатковий стержень і всі стержні рами, які перекошуються внаслідок поступального переміщення. До вирізаної частини прикладаються зовнішні навантаження і поперечні сили, Реакція в додатковому опорному стержні визначається з рівняння проєкцій і прирівнюється до нуля. Таким чином, кількість рівнянь відповідає кількості основних невідомих методу переміщень.

Основна система методу переміщень – це сукупність прямолінійних стержнів з різними граничними умовами, в яких реалізується стиснення чи стиснення зі згином. При складанні розв’язувальних рівнянь методу переміщень необхідно виразити згинальні моменти і поперечні сили на кінцях стержнів (кінцеві зусилля) через кутові і поступальні переміщення кінців. У практичних розрахунках для цього можна скористатися формулами методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів. Вплив стискуючої поздовжньої сили N на кінцеві зусилля залежить від безрозмірного параметра

$$v = \sqrt{\frac{NI}{i}}, \quad (15.3)$$

де $i = EI/l$ – погонна жорсткість стержня. При застосуванні формули (15.3) стискуюча поздовжня сила N вважається додатною.

Формули методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів за різних граничних умов наведено в табл.15.1 – 15.3.

Стержень із затисненнями з обох кінців (рис.15.2)

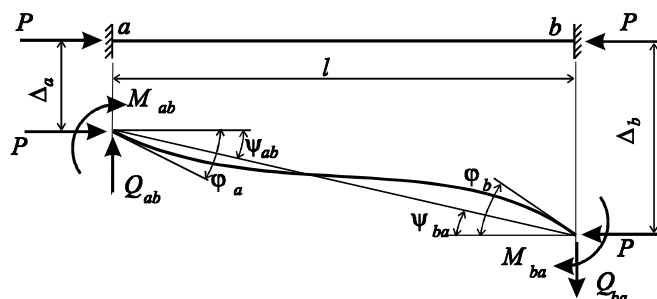


Рис.15.2

Таблиця 15.1

Умови	Кінцеві зусилля	№ № формул
$N \neq 0, Q = ?$	$M_{ab} = 2i_{ab} [\alpha_{ab} \varphi_a + \beta_{ab} \varphi_b - (\alpha + \beta)_{ab} \psi_{ab}];$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{2i_{ab}}{l_{ab}} [(\alpha + \beta)_{ab} (\varphi_a + \varphi_b) - \gamma_{ab} \psi_{ab}].$	15.4 15.5
$N \neq 0, Q = 0$	$M_{ab} = i_{ab} \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{\text{tg} \mathbf{v}} \right)_{ab} \varphi_a - \left(\frac{\mathbf{v}}{\sin \mathbf{v}} \right)_{ab} \varphi_b \right)$	15.6
$N = 0$	$M_{ab} = 2i_{ab} (2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab});$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}).$	15.7 15.8

Стержень із затисненням і шарніром на кінцях (рис.15.3)

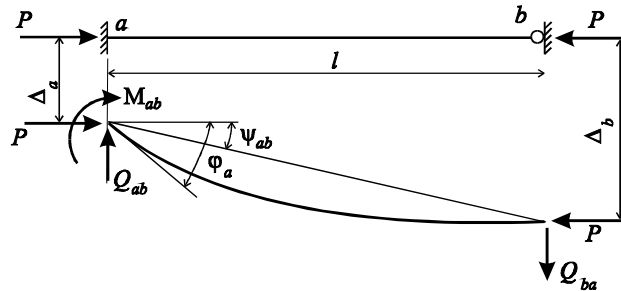


Рис.15.3

Таблиця 15.2

Умови	Кінцеві зусилля	№№ формул
$N \neq 0, Q = ?$	$M_{ab} = i_{ab} \bar{\alpha}_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab});$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{i_{ab}}{l_{ab}} (\bar{\alpha}_{ab} \varphi_a - \bar{\gamma}_{ab} \psi_{ab}).$	15.9 15.10
$N \neq 0, Q = 0$	$M_{ab} = -i_{ab} \mathbf{v}_{ab} \text{tg} \mathbf{v}_{ab} \varphi_a$	15.11
$N = 0$	$M_{ab} = 3i_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab});$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab}).$	15.12 15.13

Стержень з шарнірами з обох сторін (рис.15.4)

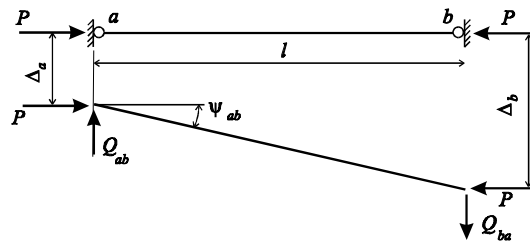


Рис.15.4

Таблиця 15.3

Умови	Кінцеві зусилля	№ № формул
$N \neq 0, Q = ?$	$Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{i_{ab}}{l_{ab}} v^2 \Psi_{ab}$.	15.14
$N = 0$	$Q_{ab} = Q_{ba} = 0$.	15.15

При дії вузлових навантажень, які не зумовлюють згину, система розв'язувальних рівнянь методу переміщень є однорідною:

$$\mathbf{R} \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (15.16)$$

Як відомо з лінійної алгебри, така система має або тривіальний нульовий розв'язок

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (15.17)$$

або ненульовий розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів \mathbf{R} дорівнює нулю:

$$\text{Det}|\mathbf{R}| = 0. \quad (15.18)$$

У задачах стійкості розв'язок (15.17) означає рівність нулю кутових і поступальних переміщень вузлів рами, що свідчить про відсутність втрати стійкості.

Умова (15.18) означає, що принаймні деякі з основних невідомих методу переміщень (кутові і поступальні переміщення вузлів рами) відмінні від нуля. Це свідчить про наявність згину елементів рами, тобто про втрату стійкості.

Таким чином, співвідношення (15.18) є умовою втрати стійкості і називається рівнянням стійкості рами.

Визначник матриці \mathbf{R} є складною трансцендентною функцією параметра v . Цей параметр є невідомою величиною в рівнянні стійкості (15.18).

Для пружної системи рівняння (15.18) має нескінченно велику кількість коренів, які розташовані на додатній частині числової осі. Найменший з коренів відповідає мінімальному

критичному навантаженню. Саме це мінімальне значення критичного навантаження становить практичний інтерес. Обчислення мінімального кореня звичайно виконують методом послідовних наближень. При цьому слід остерігатися пропуску мінімального значення v^{kp} . Для рам можна рекомендувати послідовно надавати параметру стійкості значення $v = 0; 0,5; 1; 1,5; 2 \dots$, поки визначник (15.18) не набуде від'ємного значення. Якщо величина v^{kp} визначена, із співвідношення (15.3) обчислюють величину критичного параметра навантаження:

$$P^{kp} = \frac{(v^{kp})^2 i}{l}. \quad (15.19)$$

15.2. Приклад розрахунку рами на стійкість

Схему рами зображено на рис.15.5,а. Геометричні розміри визначаються параметрами $l = 9\text{ м}$, $h = 4\text{ м}$. Необхідно виконати розрахунок рами на стійкість.

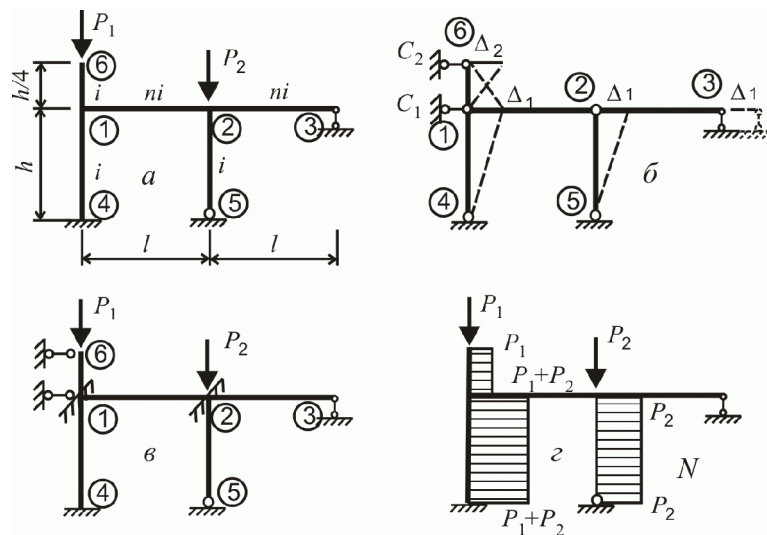


Рис.15.5

Для виконання розрахунку рами необхідно:

1. скласти рівняння стійкості рами;
2. визначити критичний параметр навантаження P^{kp} при $P_1 = P$, $P_2 = P$, $n = 2$;
3. дослідити вплив жорсткості ригеля на величини критичного навантаження при $P_1 = P_2 = P$ (побудувати графік $P^{kp} = f(n)$);
4. дослідити взаємний вплив критичних величин сил P_1^{kp} і P_2^{kp} (побудувати графік $P_1^{kp} = f(P_2^{kp})$).

15.2.1. Складання рівняння стійкості

Для складання рівняння стійкості скористаємося методом переміщень.

Визначення ступеня кінематичної невизначуваності

Рама, що розглядається, має два жорсткі проміжні вузли 1 і 2. Отже кількість невідомих кутів повороту вузлів $k_{\varphi} = 2$ (φ_1, φ_2).

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень вузлів утворимо шарнірну схему рами, встановивши шарніри в усі жорсткі вузли (рис.15.5,б). Одержана система двічі геометрично змінювана.

Дійсно, для перетворення геометрично змінюваної шарнірної схеми на геометрично незмінювану достатньо ввести дві додаткові опорні в'язі: стержень C_1 , який усуває можливе горизонтальне переміщення вузла 1 (і, отже, всього ригеля 1-2-3) і стержень C_2 , який закріплює від горизонтального переміщення вільний кінець 6 консолі. Таким чином, рама має два невідомі поступальні переміщення вузлів Δ_1 і Δ_2 , тобто $k_{\Delta} = 2$. Зобразивши на шарнірній схемі можливі поступальні переміщення вузлів (можливі поступальні переміщення необхідно спрямовувати в напрямку осей системи координат), одержуємо схему перекосів стержнів рами (рис.15.5,б). Запишемо кути перекосів усіх стержнів, вважаючи, що кути перекосів внаслідок мализни дорівнюють тангенсам відповідних кутів нахилу стержнів:

$$\begin{aligned}\psi_{1-4} = \psi_{2-5} &= \frac{\Delta_1}{h} = \frac{\Delta_1}{4}; & \psi_{1-2} = \psi_{2-3} &= 0; \\ \psi_{1-6} &= -\frac{\Delta_1}{h/4} + \frac{\Delta_2}{h/4} = -\frac{\Delta_1}{1} + \frac{\Delta_2}{1}.\end{aligned}$$

Повна кількість основних невідомих методу переміщень

$$k = k_{\varphi} + k_{\Delta} = 4$$

у подальшому може бути зменшена за рахунок виключення зі складу невідомих поступальних переміщень вузлів тих стержнів, для яких буде доведено, що поперечні сили в них дорівнюють нулю.

Основну систему методу переміщень одержимо введенням до заданої схеми рами додаткових з'єднань, які виключають основні невідомі переміщення. Так, для закріплення вузлів 1 і 2 від можливих поворотів необхідно накласти на ці вузли пружні ("плаваючі") затиснення, а для усунення можливих поступальних переміщень – додати опорні стержні у вузли 1 і 6 (рис.15.5,в).

Визначення параметрів стійкості

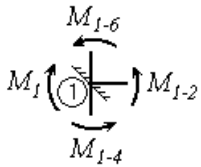
Для визначення параметрів стійкості побудуємо епюру поздовжніх сил у заданій рамі. Оскільки до моменту настання втрати стійкості в стержнях рами виникають тільки поздовжні сили (згинальні моменти і поперечні сили відсутні), епюра N (рис.15.5,г) може бути побудована в

шарнірній схемі рами, для забезпечення геометричної незмінюваності якої необхідно ввести два додаткові опорні стержні C_1 і C_2 . Тоді параметри стійкості визначатимуться співвідношеннями:

$$\begin{aligned} v_{1-4} &= \sqrt{\frac{N_{1-4}l_{1-4}}{i_{1-4}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{i}}; & v_{2-5} &= \sqrt{\frac{N_{2-5}l_{2-5}}{i_{2-5}}} = \sqrt{\frac{P_2 h}{i}}; \\ v_{1-6} &= \sqrt{\frac{N_{1-6}l_{1-6}}{i_{1-6}}} = \sqrt{\frac{P_1 h}{4i}}; & v_{1-2} &= \sqrt{\frac{N_{1-2}l_{1-2}}{i_{1-2}}} = 0; \\ v_{2-3} &= \sqrt{\frac{N_{2-3}l_{2-3}}{i_{2-3}}} = 0. \end{aligned} \quad (15.20)$$

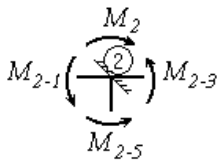
Складання системи рівнянь методу переміщень

Запишемо рівняння методу переміщень, які виражають рівність нулю реакцій в додаткових з'єднаннях стиснено-зігнутого стану основної системи, тобто після втрати стійкості.



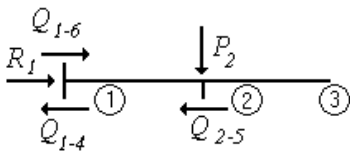
Плаваюче затиснення у вузлі 1:

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; \\ M_1 &= M_{1-6} + M_{1-2} + M_{1-4} = 0. \end{aligned} \quad (15.21)$$



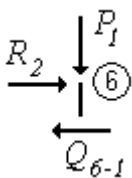
Плаваюче затиснення у вузлі

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0; \\ M_2 &= M_{2-1} + M_{2-3} + M_{2-5} = 0. \end{aligned} \quad (15.22)$$



Додатковий опорний стержень C_1 у вузлі 1:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \\ R_1 &= Q_{1-4} + Q_{2-5} - Q_{1-6} = 0. \end{aligned} \quad (15.23)$$



Додатковий опорний стержень C_2 у вузлі 6:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \\ R_{21} &= Q_{6-1} = 0. \end{aligned} \quad (15.24)$$

З рівняння (15.24) випливає, що поперечна сила в консолі $Q_{6-1} = Q_{1-6} = 0$. На цій підставі поступальне переміщення Δ_2 , яке зумовлює перекик ψ_{1-6} , що йому запобігає стержень C_2 , з числа невідомих можна вилучити. Втім це в жодному разі не означає, що переміщення $\Delta_2 = 0$. Отже, кількість основних невідомих фактично скорочується до трьох: $n = 3$ ($\varphi_1, \varphi_2, \Delta_1$). Кінцеві зусилля, що входять до рівнянь (15.21) – (15.23), необхідно виразити через основні невідомі задачі за допомогою формул методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів.

Пружне затиснення у вузлі 1 (див. рівняння (15.21))

Стержень 1-4 має на кінцях затиснення, поздовжня сила $N_{1-4} \neq 0$, поперечна сила невідома, і тому вважається, що $Q_{1-4} \neq 0$. Отже, на підставі формули (15.4) маємо:

$$\begin{aligned} M_{1-4} &= 2i_{1-4} [\alpha_{1-4}\varphi_1 + \beta_{1-4}\varphi_4 - (\alpha + \beta)_{1-4}\psi_{1-4}] = \\ &= 2i \left[\alpha_{1-4}\varphi_1 - (\alpha + \beta)_{1-4} \frac{\Delta_1}{4} \right] = 2i\alpha_{1-4}\varphi_1 - i \frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \Delta_1. \end{aligned}$$

Стержень 1-2 також має на обох кінцях затиснення, але поздовжня сила в стержні $N_{1-2} = 0$. Відносно поперечної сили нічого сказати не можна, тому вважаємо, що $Q_{1-2} \neq 0$. На підставі (15.6) одержимо:

$$M_{1-2} = 2i_{1-2} (2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{1-2}) = 2ni (2\varphi_1 + \varphi_2 - 0) = 4ni + 2ni\varphi_2.$$

Стержень 1-6 має плаваюче затиснення на кінці 1 і шарнір на кінці 6. Поздовжня сила $N_{1-6} \neq 0$, а поперечна сила $Q_{1-6} = 0$ (див. співвідношення (15.24)). Згідно з формулою (15.11):

$$M_{1-6} = -i_{1-6} (\mathbf{vtg}\mathbf{v})_{1-6} \varphi_1 = -i (\mathbf{vtg}\mathbf{v})_{1-6} \varphi_1.$$

Підставивши одержані величини в рівняння (15.21), дістанемо:

$$\left[4n + 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{vtg}\mathbf{v})_{1-6} \right] \varphi_1 + 2n\varphi_2 - \frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \Delta_1 = 0. \quad (15.25)$$

Пружне затиснення у вузлі 2 (див. рівняння (15.22))

Стержень 2-3 має затиснення у вузлі 2 і шарнір у вузлі 3. Поздовжня сила в стержні $N_{2-3} = 0$, поперечна сила невідома, і тому вважаємо, що $Q_{2-3} \neq 0$. Відповідно до формули (15.12)

$$M_{2-3} = 3i_{2-3} (\varphi_2 - \psi_{2-3}) = 3ni (\varphi_2 - 0) = 3ni\varphi_2.$$

Стержень 2-5 має затиснення у вузлі 2 і шарнір у вузлі 5. Поздовжня сила $N_{2-5} \neq 0$. Поперечна

сила невідома, і тому вважаємо, що $Q_{2-5} \neq 0$. За формулою (15.9) маємо

$$M_{2-5} = i_{2-5} \bar{\alpha}_{2-5} (\varphi_2 - \psi_{2-5}) = i \bar{\alpha}_{2-5} \left(\varphi_2 - \frac{\Delta_1}{4} \right) = i \bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \frac{i \bar{\alpha}_{2-5}}{4} \Delta_1.$$

Для стержня 2-1 на підставі (15.7) маємо:

$$M_{2-1} = 2i_{2-1} (2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{2-1}) = 2ni (2\varphi_2 + \varphi_1 - 0) = 4ni\varphi_2 + 2ni\varphi_1.$$

Підставивши значення кінцевих моментів у рівняння (15.22), одержимо:

$$2n\varphi_1 + (7n + \bar{\alpha}_{2-5})\varphi_2 - \frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \Delta_1 = 0. \quad (15.26)$$

Додатковий опорний стержень C_1 (див. рівняння (15.23))

$$\begin{aligned} Q_{1-4} &= -\frac{2i_{1-4}}{l_{1-4}} \left[(\alpha + \beta)_{1-4} (\varphi_1 + \varphi_4) - \gamma_{1-4} \psi_{1-4} \right] = \\ &= -\frac{2i}{4} \left[(\alpha + \beta)_{1-4} \varphi_1 - \gamma_{1-4} \frac{\Delta_1}{4} \right] = -i \frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \varphi_1 + i \frac{\gamma_{1-4}}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{2-5} &= -\frac{i_{2-5}}{l_{2-5}} (\bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \bar{\gamma}_{2-5} \psi_{2-5}) = -\frac{i}{4} \left(\bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \bar{\gamma}_{2-5} \frac{\Delta_1}{4} \right) = \\ &= -i \frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \varphi_2 + i \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{16} \Delta_1; \end{aligned}$$

$$Q_{1-6} = 0.$$

Підставивши одержані співвідношення в рівняння (15.23), матимемо:

$$-\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \varphi_1 - \frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \varphi_2 + \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \Delta_1 = 0. \quad (15.27)$$

Отже, маємо систему трьох алгебраїчних рівнянь (15.25) – (15.27). Рівняння стійкості одержимо, прирівнявши до нуля визначник матриці коефіцієнтів означеної системи рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} 4n + 2\alpha_{1-4} - (\text{vtgv})_{1-6} & 2n & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 2n & 7n + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (15.28)$$

Рівняння (15.28) містить як невідомі параметр n і величини критичних параметрів стійкості $\nu_{1-4}, \nu_{2-5}, \nu_{1-6}$, які входять до коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma \dots$ тощо. Отже, рівняння стійкості можна записати у вигляді:

$$D(n, \nu_{1-4}, \nu_{2-5}, \nu_{1-6}) = 0. \quad (15.29)$$

15.2.2. Визначення критичного параметра навантаження при $P_1 = P$, $n = 2$

Коли співвідношення між величинами зовнішніх сил відоме, можна встановити зв'язок між параметрами стійкості, які визначаються за співвідношеннями (15.20):

$$\begin{aligned} v_{1-4} &= \sqrt{\frac{P_1 h}{i}} = \sqrt{\frac{4P}{i}} = 2\sqrt{\frac{P}{i}}; \\ v_{2-5} &= \sqrt{\frac{P_2 h}{i}} = \sqrt{\frac{4P}{i}} = 2\sqrt{\frac{P}{i}}; \\ v_{1-6} &= \sqrt{\frac{P_1 h}{4i}} = \sqrt{\frac{P}{i}}. \end{aligned} \quad (15.30)$$

До того ж задано коефіцієнт $n = 2$. При цьому рівняння стійкості набуває вигляду:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2\alpha_{1-4} - (vtgv)_{1-6} & 4 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 4 & 14 + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (15.31)$$

Відшукаємо перший (мінімальний) корінь рівняння (15.31), послідовно надаючи одному з параметрів, який вважатимемо за незалежний, довільних значень, наприклад: 0; 0,8; 1,6 тощо. При кожному значенні незалежного параметра v будемо обчислювати відповідні значення інших параметрів, знаходити величини функцій $\alpha, \beta, \gamma \dots$ за таблицями, які наведені в додатках 1, і обчислювати величину визначника. Процес наближення вважається закінченим, коли визначник дорівнюватиме нулю.

Для розв'язання задачі за незалежний візьмемо параметр v_{1-4} . Тоді з (15.30) маємо: $v_{2-5} = v_{1-4}$; $v_{1-6} = 0,5v_{1-4}$. Отже, визначник (15.29) стає функцією тільки одного параметра:

$$D(v_{1-4}) = 0.$$

Надамо незалежному параметру нульового значення: $v_{1-4} = 0$. Відповідно маємо: $v_{2-5} = v_{1-4} = 0$; $v_{1-6} = 0,5$; $v_{1-4} = 0$. За таблицями, що наведені в додатках 1, знаходимо:

- при $v_{1-4} = 0$ $\alpha_{1-4} = 2,000$;
 $(\alpha + \beta)_{1-4} = 3,000$;
 $\gamma_{1-4} = 6,000$;
- при $v_{2-5} = 0$ $\bar{\alpha}_{2-5} = 3,000$;
 $\bar{\gamma}_{2-5} = 3,000$;

• при $v_{1-6} = 0$ ($\text{tg}v$) $_{1-6} = 0,000$.

Підставивши одержані величини до (15.31) і виконавши обчислення, маємо:

$$D(0) = \begin{vmatrix} 8+2 \cdot 2-0 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 4 & 14+3 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8}\left(6+\frac{3}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -1,5 \\ 4 & 17 & -0,75 \\ -1,5 & -0,75 & 0,9375 \end{vmatrix} = 140,25.$$

Визначник $D(0)$ не дорівнює нулю, тому надамо незалежному параметру v_{1-4} іншого значення, наприклад $v_{1-4} = 0,8$, і повторюємо обчислення. І так далі, поки визначник не набуде нульового або від'ємного значення. Результати обчислень занесені до табл.15.4.

Таблиця 15.4

v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{2-4}	v_{2-5}	α_{2-5}	γ_{2-5}	v_{1-6}	$(\text{tg}v)_{1-6}$	D
0	2,000	3,000	6,000	0	3,000	3,000	0	0	140,25
0,8	1,957	2,968	5,616	0,8	2,869	2,229	0,4	0,169	134,46
1,6	1,823	2,870	4,459	1,6	2,446	-0,114	0,8	0,824	68,39
2,4	1,583	2,699	2,519	2,4	1,591	-4,169	1,2	3,087	-18,53
2,2	1,654	2,749	3,078	2,2	1,861	-2,979	1,1	2,161	1,212
2,3	1,620	2,725	2,805	2,3	1,732	-3,559	1,15	2,570	-2,801

Графік залежності визначника від параметра v_{2-4} побудовано на рис.15.6,а згідно з таблицею 15.4.

Уточнимо значення незалежного критичного параметра v_{2-4} на інтервалі [2,2; 2,3] за допомогою лінійної інтерполяції (рис.15.6,б).

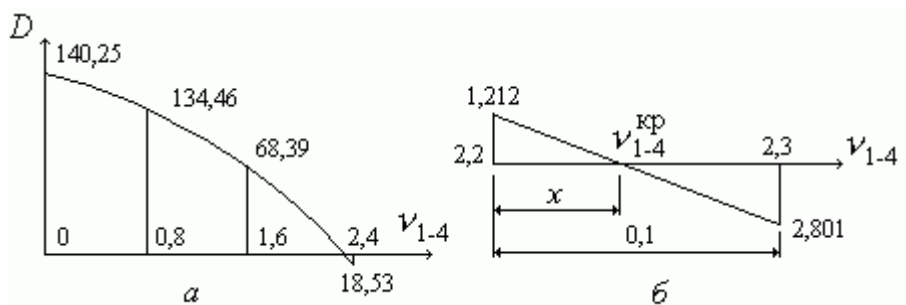


Рис.15.6

$$x = \frac{1,212 \cdot 0,1}{1,212 + 2,801} = 0,030 ;$$

$$v_{1-4}^{kp} = 2,2 + 0,030 = 2,230 .$$

Критичний параметр навантаження можна визначити з першого із співвідношень (15.30):

$$P^{kp} = \frac{v_{1-4}^2 i}{h} = \frac{2,230^2 i}{4} = 1,243i .$$

Критичні величини зовнішніх сил: $P_1^{kp} = P_2^{kp} = P^{kp} = 1,243i$.

15.2.3. Дослідження впливу жорсткості ригеля на величини критичного навантаження

Дослідження полягає в аналізі графіка залежності $P^{kp} = f(n)$, яка задається рівнянням стійкості (15.29).

Оскільки співвідношення між силами залишається заданим ($P_1 = P_2 = P$), то залежності (15.30) зберігаються без змін, і визначник (15.29) буде функцією параметрів n і v_{1-4} :

$$D(n, v_{1-4}) = 0 . \quad (15.32)$$

Для побудови графіка залежності (15.30) необхідно визначити границі, в яких можуть змінюватися змінні n і v_{1-4} . З фізичних міркувань очевидно, що параметр жорсткості n змінюється в межах від 0 до ∞ . Обчислимо відповідні границі зміни параметра стійкості v_{1-4} .

Визначення критичного навантаження при $n = 0$

При $n = 0$ жорсткість ригеля на згин дорівнює нулю, тобто ригель може сприймати лише поздовжні зусилля, що відповідає наявності шарнірів по кінцях ригелів 1-2 і 2-3. Отже, розрахункова схема рами може мати вигляд, поданий на рис.15.7.

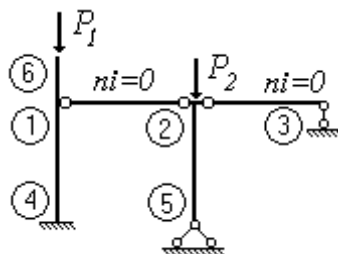


Рис.15.7

Рівняння стійкості можна дістати, поклавши в (15.28) параметр $n = 0$:

$$D = \begin{vmatrix} 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} & 0 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 0 & \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння шляхом підбору незалежного параметра стійкості v_{1-4} , при якому визначник системи рівнянь обертається на нуль. Результати підбору заносимо до табл.15.5.

Таблиця 15.5

v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{1-4}	v_{2-5}	$\bar{\alpha}_{2-5}$	$\bar{\gamma}_{2-5}$	v_{1-6}	$(\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6}$	D
0	2,000	3,000	6,000	0	3,000	3,000	0	0	2,25
0,8	1,957	2,968	5,616	0,8	2,869	2,229	0,4	0,169	0,79
1,6	1,823	2,870	4,459	1,6	2,446	-0,114	0,8	0,824	-2,29
1,1	1,918	2,939	5,273	1,1	2,749	1,539	0,55	0,341	-0,33
1,0	1,932	2,950	5,399	1,0	2,794	1,794	0,5	0,273	0,06

Уточнюючи величину критичного параметра за допомогою лінійної інтерполяції, маємо:

$$v_{1-4}^{kp} = 1,0 + \frac{0,06}{0,06 + 0,33} = 1,016.$$

Критична величина параметра навантаження

$$P^{kp} = \frac{v_{1-4}^2 i}{h} = \frac{1,016^2 i}{4} = 0,258i,$$

а критичні величини зовнішніх сил:

$$P_1^{kp} = P_2^{kp} = P^{kp} = 0,258i.$$

Визначення критичного навантаження при $n \rightarrow \infty$

При $n \rightarrow \infty$ жорсткість ригелів на згин набагато перевищує жорсткості стояків на згин, і тому ригелі можна вважати абсолютно твердими тілами, що не згинаються (рис.15.8,а). Тому $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, і раму можна подати як таку, що складається з двох частин (обведених штриховими лініями), які деформуються незалежно одна від одної.

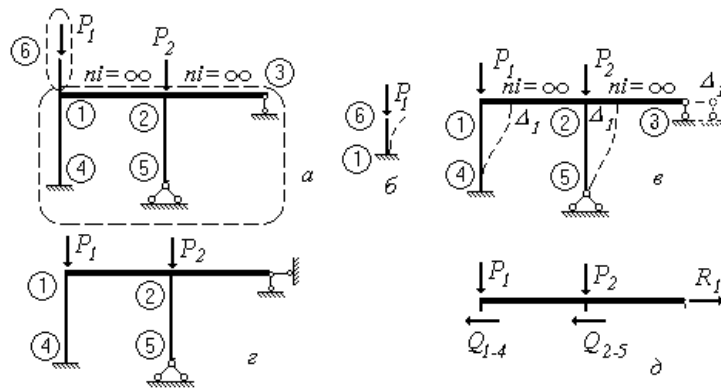


Рис.15.8

Перша частина становить собою консольний стержень (рис.15.8,б), який має затиснення на опорі 6. Втрата стійкості такого стержня – це задача Ейлера. Отже, для консолі $\nu_{1-6}^{sp} = 1,57$ (див. рис.15.1,д). Тоді відповідні параметри стійкості в інших стержнях становлять:

$$\nu_{1-4} = 2\nu_{1-6} = 3,14; \quad \nu_{2-5} = \nu_{1-4} = 3,14.$$

Друга частина – це два стояки 1-4 і 2-5, які пов'язані абсолютно жорсткою вставкою 1-2-3. Єдиним невідомим методу переміщень в такій системі є поступальне переміщення вставки Δ_1 (рис.2.8,в). Основна система, що одержана постановкою додаткового опорного стержня, подана на рис.2.8,г.

Складемо рівняння методу переміщень, згідно з яким реакція в додатковому стержні дорівнює нулю. З розгляду рівноваги ригеля (рис.2.8,д) можна записати:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 = Q_{1-4} + Q_{2-5} = 0.$$

За формулами методу переміщень для стиснено-зігнутих стержнів маємо:

$$Q_{1-4} = -\frac{2i_{1-4}}{l_{1-4}} [(\alpha + \beta)_{1-4} (\varphi_1 + \varphi_4) - \gamma_{1-4} \psi_{1-4}] = \frac{2i}{h^2} \gamma_{1-4} \Delta_1;$$

$$Q_{2-5} = -\frac{i_{2-5}}{l_{2-5}} (\bar{\alpha}_{2-5} \varphi_2 - \bar{\gamma}_{2-5} \psi_{2-5}) = \frac{i}{h^2} \bar{\gamma}_{2-5} \Delta_1.$$

Підставивши одержані співвідношення до рівняння рівноваги, маємо рівняння

$$\frac{1}{h^2} (2\gamma_{1-4} + \bar{\gamma}_{2-5}) \Delta_1 = 0,$$

звідки можна записати рівняння стійкості рами, що зображена на рис.2.8,в:

$$D = 2\gamma_{1-4} + \bar{\gamma}_{2-5} = 0.$$

Розв'язуємо це рівняння за методом підбору, прийнявши параметр ν_{2-4} за базовий і записуючи результати до табл.15.6.

Таблиця 15.6

v_{1-4}	α_{1-4}	$v_{2-5} = v_{1-4}$	$\bar{\gamma}_{2-5}$	D
0	6	0	3	15,00
0,8	5,616	0,8	2,229	14,46
1,6	4,459	1,6	-0,114	8,80
2,4	2,519	2,4	-4,169	0,87
2,5	2,220	2,5	-4,812	-0,37

Уточнимо одержаний параметр за допомогою лінійної інтерполяції:

$$v_{1-4}^{kp} = 2,4 + \frac{0,87 \cdot 0,1}{0,87 + 0,37} = 2,470.$$

З двох одержаних параметрів v_{1-4}^{kp} вибираємо найменший, отже $v_{1-4}^{kp} = 2,470$.

Критичний параметр навантаження

$$P^{kp} = \frac{v_{1-4}^2 i}{h} = \frac{2,470^2 i}{4} = 1,525i.$$

Таким чином границі зміни критичного параметра навантаження:

$$1,032i \leq P^{kp} < 1,525i.$$

Визначення критичного навантаження при проміжних значеннях параметра n

Проміжні значення критичного параметра навантаження можуть бути обчислені послідовним наданням параметру n декількох значень з інтервалу $(0; \infty)$ з подальшим розв'язанням у кожному випадку рівняння стійкості, як це було зроблено в попередніх випадках. Наприклад, якщо задатися величиною $n = 1$, то рівняння стійкості (15.28) набуває вигляду:

$$D = \begin{vmatrix} 4 + 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} & 2 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 2 & 7 + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(\gamma_{1-4} + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язавши рівняння так само, як це було зроблено раніше, одержимо: $v_{1-4}^{kp} = 1,996$; $P^{kp} = 0,996i$. Результати обчислень при різних значеннях параметра n занесено до табл.15.7.

Таблиця 15.7

n	v_{1-4}^{kp}	P^{kp}
0	1,016	0,258i
1	1,996	0,996i
2	2,230	1,243i
4	2,320	1,346i
∞	2,470	1,525i

За результатами табл.15.7 побудовано графік (рис.15.9) залежності критичного параметра навантаження P^{kp} від параметра n жорсткості ригеля.

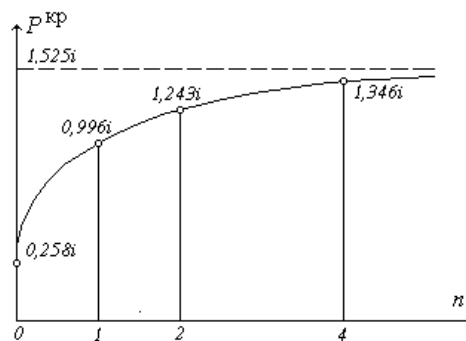


Рис.15.9

З графіка видно, що на величину критичного параметра навантаження P^{kp} найбільш суттєво впливає зміна параметра n від 0 до 4. На величину критичного навантаження подальше збільшення параметра практично не впливає.

При виконанні розрахунково-графічної роботи за допомогою комп'ютерної програми достатньо скласти рівняння стійкості при значеннях параметра жорсткості ригеля $n=0$ і $n=\infty$. Розв'язання цих рівнянь, а також рівнянь при проміжних значеннях параметра n , можна одержати з результатів роботи програми. Для цього необхідно в режимі діалогу вводити до комп'ютера конкретні значення параметра n при фіксованому співвідношенні між діючими зовнішніми силами. Замість нескінченності вводиться будь-яке достатньо велике число, наприклад 100 або 1000.

15.2.4. Дослідження взаємного впливу критичних сил P_1^{kp} і P_2^{kp}

Дослідження полягає в побудові і в проведенні аналізу графіка $P_2^{kp} = f(P_1^{kp})$ при фіксованому значенні параметра жорсткості ригеля $n=2$. За даною умовою рівняння стійкості (15.31) можна навести у формі:

$$D(v_{1-4}, v_{2-5}, v_{1-6}) = 0. \quad (15.33)$$

При цьому всі параметри стійкості залежать лише від двох зовнішніх сил P_1 і P_2 , тобто фактично можна записати рівняння (15.33) у формі:

$$D(P_1, P_2) = 0. \quad (15.34)$$

Для побудови графіка визначимо межі, в яких можуть змінюватися сили P_1 і P_2 . Оскільки ці сили не залежать одна від одної, то при $P_1 = 0$ величина P_2^{kp} набуває максимального значення і навпаки.

Нехай $P_1 = 0$. Тоді з (15.20) випливає: $v_{1-6} = v_{1-4} = 0$. Отже, за таблицями, що розташовано в додатках, $\alpha_{1-4} = 2$, $(\alpha + \beta)_{1-4}$, $\gamma_{1-4} = 6$, $(\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} = 0$. Підставивши ці величини до (15.31), маємо:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 4 & -1,5 \\ 4 & 14 + \bar{\alpha}_{2-5} & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} \\ -1,5 & -\frac{\bar{\alpha}_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(6 + \frac{\bar{\gamma}_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння, підбираючи параметр v_{2-5} (табл.15.8).

Таблиця 15.8

v_{2-5}	$\bar{\alpha}_{2-5}$	$\bar{\gamma}_{2-5}$	D
0	3	3	140,25
0,8	2,869	2,229	126,71
1,6	2,446	-0,114	100,57
2,4	1,591	-4,169	51,53
3,2	-0,190	-10,430	-16,97
3,0	0,408	-8,592	2,10
3,1	0,127	-9,483	-7,26

Виконуючи інтерполяцію, знаходимо:

$$v_{2-5}^{kp} = 3,0 + \frac{2,10 \cdot 0,1}{2,10 + 7,26} = 3,022.$$

Зі співвідношень (15.20) одержуємо:

$$P_2^{kp} = \frac{(v_{2-5}^{kp})^2 i}{h} = \frac{3,022^2 \cdot i}{4} = 2,281i.$$

Аналогічно, при $P_2 = 0$ маємо $v_{2-5} = 0$, звідки за таблицями, наведеними в доданку, $\bar{\alpha}_{2-5} = 3, \bar{\gamma}_{2-5} = 3$. В цьому випадку рівняння (15.31) набуває вигляду:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2\alpha_{1-4} - (\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6} & 4 & -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} \\ 4 & 17 & -0,75 \\ -\frac{(\alpha + \beta)_{1-4}}{2} & -0,75 & \frac{1}{8}(\gamma_{1-4} + 1,5) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння, підбираючи параметр v_{2-5} (Табл.15.9).

Таблиця 15.9

v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{1-4}	$v_{1-6} = v_{2-4}/2$	$(\mathbf{v} \operatorname{tg} \mathbf{v})_{1-6}$	D
0	2	3	6	0	0	140,25
0,8	1,957	2,968	5,616	0,4	0,169	128,22
1,6	1,823	2,870	4,459	0,8	0,824	92,64
2,4	1,583	2,699	2,519	1,2	3,087	33,55
2,7	1,459	2,615	1,585	1,35	6,400	-0,31
2,6	1,503	2,644	1,909	1,30	4,683	13,65

Виконавши лінійну інтерполяцію, знаходимо:

$$v_{1-4}^{kp} = 2,6 + \frac{13,65 \cdot 0,1}{13,65 + 0,31} = 2,698.$$

З (15.20) знаходимо:

$$P_1^{kp} = \frac{(v_{1-4}^{kp})^2 i}{h} = \frac{2,698^2 i}{4} = 1,820i.$$

Для побудови графіка залежності необхідно визначити положення декількох проміжних точок. Для цього будемо задаватися значеннями сили P_1^{kp} , оскільки від неї залежить більша кількість функцій. Величини сили вибираємо будь-які в межах $0 \leq P_1^{kp} \leq 1,820i$, Наприклад: $0, 1,0i, 1,243i, 1,562i, 1,820i$. Далі знаходимо з рівняння (15.31) відповідні значення P_2^{kp} .

Нехай, наприклад, $P_1^{kp} = 1,0i$. Тоді

$$v_{1-4} = \sqrt{\frac{P_1^{kp} h}{i}} = \sqrt{\frac{ih}{i}} = \sqrt{4} = 2; \quad v_{1-6} = 0,5v_{1-4} = 1.$$

За таблицями, що наведені в додатках, знаходимо:

$$\alpha_{1-4} = 1,718; \quad (\alpha + \beta)_{1-4} = 2,794; \quad \gamma_{1-4} = 3,588; \quad (v \operatorname{tg} v)_{1-6} = 1,557.$$

Підставивши одержані величини до (15.31), маємо:

$$D = \begin{vmatrix} 8 + 2 \cdot 1,718 - 1,597 & 4 & -\frac{2,794}{2} \\ 4 & 14 + \alpha_{2-5} & -\frac{\alpha_{2-5}}{4} \\ -\frac{2,794}{2} & -\frac{\alpha_{2-5}}{4} & \frac{1}{8} \left(3,588 + \frac{\gamma_{2-5}}{2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння, підбираючи параметр v_{2-5} . У результаті маємо $v_{2-5}^{kp} = 2,434$ і відповідно

$$P_2^{kp} = \frac{(v_{2-5}^{kp})^2 i}{h} = \frac{2,434^2 i}{4} = 1,481i.$$

Аналогічні обчислення виконуємо для інших значень P_1^{kp} . Результати заносимо до табл.15.10.

Таблиця 15.10

P_1^{kp}	v_{1-4}	α_{1-4}	$(\alpha + \beta)_{1-4}$	γ_{1-4}	$v_{1-6} = v_{1-4}/2$	$(v \operatorname{tg} v)_{1-6}$	P_2^{kp}
0	0	2	3	6	0	0	2,281i
1,0i	2	1,718	2,794	3,588	1	1,587	1,481i
1,243i	2,230	1,644	2,742	2,997	1,115	2,274	1,243i
1,562i	2,5	1,544	2,872	2,229	1,25	3,865	0,710i
1,820i	2,698	1,459	2,615	2,615	1,349	6,014	0

У таблиці враховані деякі результати попередніх розрахунків. За її даними на рис.15.10 побудовано графік $P_2^{kp} = f(P_1^{kp})$.

На графіку можна виділити три зони:

1. зона стійкості (обмежена осями координат і кривою);
2. критична зона (власне крива);
3. зона втрати стійкості (вся площа за межами зони стійкості).

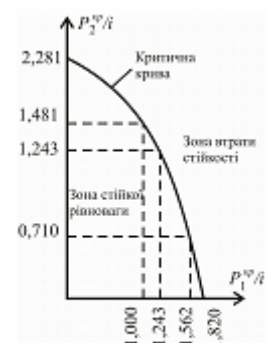


Рис.14.10

При розрахунку за допомогою комп'ютерної програми точки графіка можуть бути знайдені в режимі діалогу з комп'ютером. Для цього необхідно під час завдання вхідних даних задавати різні співвідношення зовнішніх сил при фіксованому значенні параметра жорсткості ригеля n .

Приклад введених до комп'ютера співвідношень і відповідні результати наведено в табл.15.11.

Таблиця 15.11

P_1/P	P_2/P	P^{kp}	P_1^{kp}/i	P_2^{kp}/i
0	1	2,281i	0	2,281
1	0	1,820i	1,820	0
1	1	1,243i	1,243	1,243

15.2.5. Особливості розрахунку рами на стійкість за допомогою навчальної комп'ютерної програми комплексу АСИСТЕНТ

Комп'ютерна програма з розрахунку рам на стійкість дає можливість автоматизовано виконати більшість розрахунків. Для використання програми необхідно вручну виконати перші два етапи: скласти рівняння стійкості і обчислити критичне навантаження.

Програма надає можливість в режимі діалогу ввести вхідні дані, які стосуються номера заданої схеми, геометричних розмірів, параметра жорсткості одного або декількох стержнів, а також задані співвідношення між зовнішніми силами. Для перевірки правильності розрахунків, зроблених вручну, програма запропонує ввести критичні величини зовнішніх сил, обчислених в п.15.2.2. Якщо ці результати помилкові, програма пропонує ще деякі питання щодо величини критичного параметра навантаження, порядку визначника системи рівнянь методу переміщень, а також щодо коефіцієнтів і значення визначника, обчислених при нульових параметрах стійкості. Наприкінці програма повідомить місце можливої помилки. Якщо ж результати розрахунків, виконаних вручну, збігаються з результатами роботи програми, то вона надає можливість продовжити роботу в автоматизованому режимі, коли можна змінювати будь-які параметри задачі, виконуючи дослідження п.п.15.2.3 і 15.2.4. Результати розрахунків можуть бути виведені на екран монітора або на принтер.

15.3. Розрахунок на стійкість симетричної рами

Схему симетричної рами під дією симетричного вузлового навантаження представлено на рис.15.11,а. Необхідно визначити критичну величину вузлових сил.

Визначення ступеня кінематичної невизначуваності і призначення основної системи

Задана рама має чотири проміжні жорсткі вузли. Тому

$$k_{\varphi} = 4 (\varphi_7, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6).$$

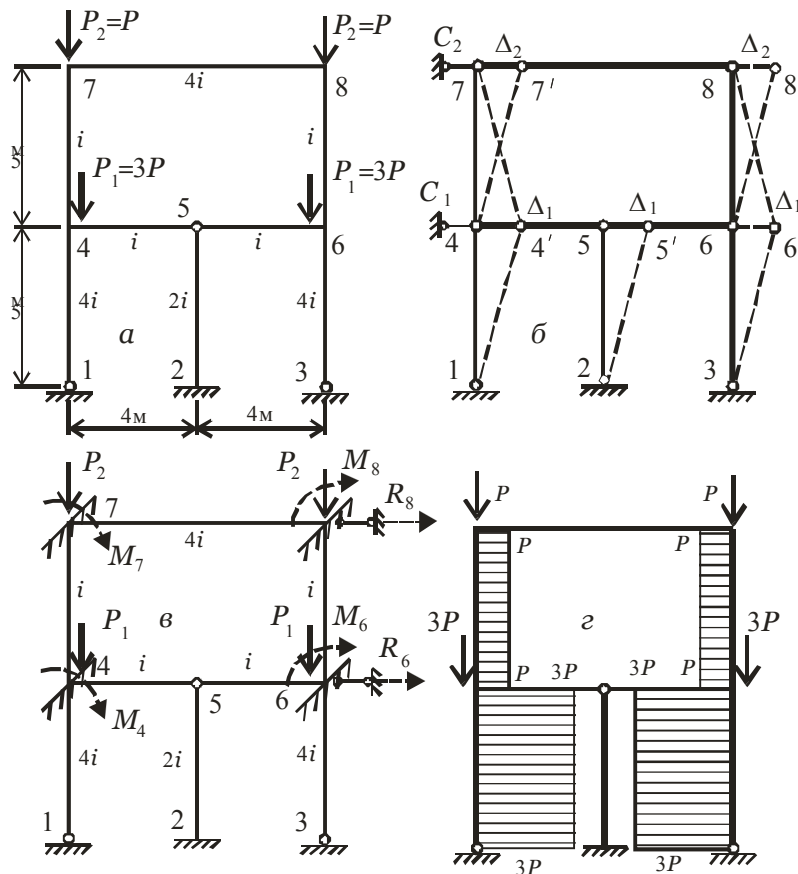


Рис.15.11

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень вузлів утворимо шарнірну схему рами (рис.15.11,б). Очевидно, що для перетворення шарнірної схеми на геометрично незмінювану систему необхідно ввести два додаткові опорні стержні C_1 та C_2 . Перший з них утримує від поступального горизонтального переміщення Δ_1 вузли 4, 5 і 6, а другий – від поступального горизонтального переміщення Δ_2 вузли 7 і 8. На цій підставі вважаємо, що

$$k_{\Delta} = 2 \quad (\Delta_1, \Delta_2).$$

Поступальні переміщення вузлів визначають кут перекосів стержнів:

$$\psi_{1-4} = \psi_{2-5} = \psi_{3-6} = \frac{\Delta_1}{5};$$

$$\psi_{4-7} = \psi_{6-8} = -\frac{\Delta_1}{5} + \frac{\Delta_2}{5};$$

$$\psi_{4-6} = \psi_{5-6} = \psi_{7-8} = 0.$$

Отже, ступінь кінематичної невизначуваності рами

$$k = k_{\varphi} + k_{\Delta} = 6.$$

Основну систему методу переміщень одержимо введенням "плаваючих" затиснень у вузли $\varphi_7, \varphi_8, \varphi_4, \varphi_6$ для унеможливлення їхніх кутів повороту, а для усунення можливих

поступальних переміщень – введенням опорних стержнів у вузли 4 і 7 (рис.11.5,в).

Епюра N нормальних сил в рамі до настання втрати стійкості подана на рис. 11.5,г.

Параметри стійкості в стержнях рами виражаються через поздовжні сили:

$$v_{4-7} = \sqrt{\frac{N_{4-7}l_{4-7}}{i_{4-7}}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}}; \quad v_{6-8} = \sqrt{\frac{N_{6-8}l_{6-8}}{i_{46-8}}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}} = v_{4-7};$$

$$v_{1-4} = \sqrt{\frac{N_{1-4}l_{1-4}}{i_{1-4}}} = \sqrt{\frac{4Ph}{4i}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}} = v_{4-7}; \quad v_{3-6} = \sqrt{\frac{N_{3-6}l_{3-6}}{i_{13-6}}} = \sqrt{\frac{4Ph}{4i}} = \sqrt{\frac{Ph}{i}} = v_{4-7};$$

$$v_{7-8} = v_{4-5} = v_{5-6} = v_{2-5} = 0.$$

Симетрична рама під дією симетричного навантаження може деформуватись при втраті стійкості або за симетричною, або за косиметричною формою. Реалізуватиметься та форма, якій відповідає менше значення критичного навантаження. Тому доцільно виконати розрахунок окремо на симетричну і окремо на косиметричну деформацію.

15.3.1. Розрахунок на втрату стійкості за симетричною формою деформації

Очікуваний згин рами при втраті стійкості за симетричною формою деформації показано на рис.15.12.

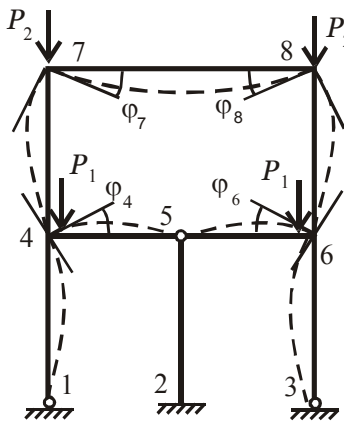


Рис.15.12

З умов симетрії можна зробити висновки щодо основних невідомих:

$$\begin{aligned} \Phi_8 &= -\Phi_7; \\ \Phi_6 &= -\Phi_4; \\ \Delta_1 &= \Delta_2 = 0. \end{aligned}$$

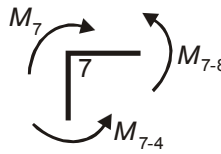
Таким чином, кількість основних невідомих скорочується до трьох.

При цьому кути перекосу всіх стержнів дорівнюють нулю:

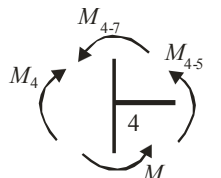
$$\Psi_{1-4} = \Psi_{4-7} = \Psi_{2-5} = \Psi_{6-8} = \Psi_{3-6} = \Psi_{7-8} = \Psi_{4-5} = \Psi_{5-6} = 0.$$

Складання рівнянь рівноваги

Розв'язувальні рівняння складасмо з умов рівноваги елементів, які утримуються від переміщень накладеними з'єднаннями. Формули для кінцевих зусиль вибираються з табл.15.1, 15.2 та 15.3 залежно від граничних умов.



$$\begin{aligned}
 M_7 &= M_{7-4} + M_{7-8} = 0. \\
 M_{7-4} &= 2i_{7-4}(\alpha_{7-4}\varphi_7 + \beta_{7-4}\varphi_4 - (\alpha + \beta)_{7-4}\psi_{7-4}) = \\
 &= 2i(\alpha_{7-4}\varphi_7 + \beta_{7-4}\varphi_4) = 2i\alpha_{7-4}\varphi_7 + 2i\beta_{7-4}\varphi_4; \\
 M_{7-8} &= 2i_{7-8}(2\varphi_7 + \varphi_8 - 2\psi_{7-8}) = 2 \cdot 4i(2\varphi_7 - \varphi_7) = 8i\varphi_7. \\
 \underline{M_7} &= \underline{(2\alpha_{7-4} + 8)i\varphi_7 + 2\beta_{7-4}i\varphi_4} = 0. \quad (15.35)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 M_4 &= M_{4-7} + M_{4-5} + M_{4-1} = 0. \\
 M_{4-7} &= 2i_{4-7}(\alpha_{4-7}\varphi_4 + \beta_{4-7}\varphi_7 - (\alpha + \beta)_{4-7}\psi_{4-7}) = \\
 &= 2i(\alpha_{4-7}\varphi_4 + \beta_{4-7}\varphi_7) = 2i\alpha_{4-7}\varphi_4 + 2i\beta_{4-7}\varphi_7; \\
 M_{4-5} &= 3i_{4-5}(\varphi_4 - \psi_{4-5}) = 3i\varphi_4; \\
 M_{4-1} &= i_{4-1}\bar{\alpha}_{4-1}(\varphi_4 - \psi_{4-1}) = 4i\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4. \\
 \underline{M_4} &= \underline{2i\beta_{4-7} + (2\alpha_{4-7} + 4\bar{\alpha}_{4-1} + 3)i\varphi_4} = 0. \quad (15.36)
 \end{aligned}$$

Складання рівняння стійкості

Умовою втрати стійкості є дорівнювання нулю визначника матриці коефіцієнтів при невідомих переміщеннях вузлів:

$$D = \begin{vmatrix} 2\alpha_{7-4} + 8 & 2\beta_{7-4} \\ 2\beta_{7-4} & 2\alpha_{4-7} + 4\bar{\alpha}_{4-1} + 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання рівняння стійкості

Відшукаємо перший (мінімальний) корінь рівняння стійкості, послідовно надаючи одному з параметрів, який вважатимемо за незалежний (нехай це буде параметр ν_{7-4} , довільних значень, наприклад: 0; 1; 2 тощо. При кожному значенні незалежного параметра ν_{7-4} будемо обчислювати відповідні значення інших параметрів, знаходити величини функцій $\alpha, \beta, \bar{\alpha} \dots$ за таблицями, які наведені в додатках 1, і обчислювати величину визначника. Процес наближень вважається закінченим, коли визначник дорівнюватиме нулю.

Так, взявши $\nu_{7-4}=0$ маємо з таблиць

$$\alpha_{7-4} = 2; \quad \beta_{7-4} = 1.$$

Для $v_{4-1}=v_{7-4}=0$ маємо $\alpha_{1-4} = 3$.

Підставивши отримані значення до рівняння стійкості отримаємо:

$$D = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 1 & \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 224.$$

Взявши $v_{7-4}=1$ маємо

$$\alpha_{7-4} = 1,932; \quad \beta_{7-4} = 1,017.$$

Для стержня 4-1 відповідне значення параметру $v_{4-1}=v_{7-4}=1$. Маємо з таблиць

$$\bar{\alpha}_{1-4} = 2,794.$$

Тоді

$$D = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1,932 + 8 \cdot 2 \cdot 1,017 & \\ 2 \cdot 1,017 & 2 \cdot 1,932 + 4 \cdot 2,794 + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11,864 & 2,034 \\ 2,034 & 18,040 \end{vmatrix} = 209,9.$$

Продовжуємо аналогічні обчислення надаючи параметру стійкості v_{7-4} наступних значень доти, поки визначник змінить знак. Результати заносимо до таблиці 15.12.

Таблиця 15.12

№	v_{7-4}	α_{7-4}	β_{7-4}	v_{1-4}	$\bar{\alpha}_{1-4}$	D
1	0	2	1	0	3	224
2	1	1,932	1,017	1	2,794	209,9
3	2	1,718	1,076	2	2,088	164,5
4	3	1,312	1,206	3	0,408	71,3
5	4	0,586	1,502	4	-6,518	-229,8
6	3,5	1,004	1,321	3,5	-1,468	-15,6
7	3,4	1,073	1,294	3,4	-0,974	5,98

Графік функції $D=D(v_{7-4})$ побудовано на рис.15.13,а.

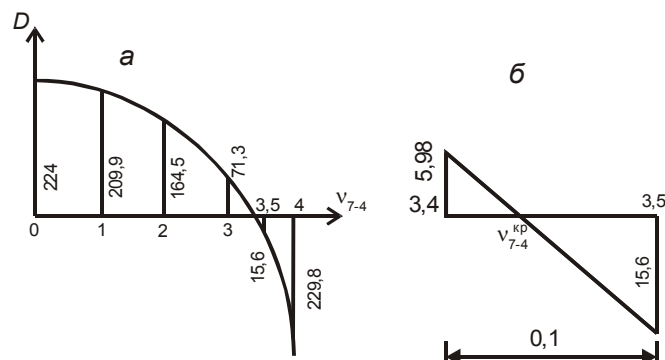


Рис.15.13

Як видно, визначник D змінює знак при значеннях параметру ν_{1-4} в проміжку між 3 і 3,5. Виконуючи на означеному проміжку лінійну інтерполяцію (рис.15.13,б) знаходимо

$$\nu_{4-7}^{kp} = 3,4 + \frac{0,1 \cdot 5,98}{5,98 + 15,6} = 3,428.$$

Критична величина параметру навантаження при симетричній формі втрати стійкості складає

$$P_{кр} = \frac{\nu_{4-7}^2 \cdot i}{h} = \frac{3,428^2 \cdot i}{5} = 2,350i.$$

15.3.2. Розрахунок на втрату стійкості за кососиметричною формою деформації

Очікуваний згин рами при втраті стійкості за кососиметричною формою деформації показано на рис.15.14.

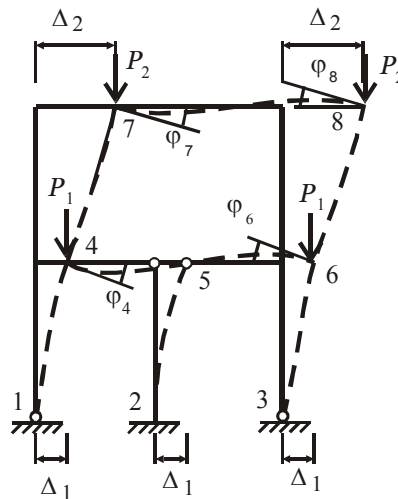


Рис.15.14

З умов симетрії можна зробити висновки щодо основних невідомих:

$$\varphi_8 = \varphi_7;$$

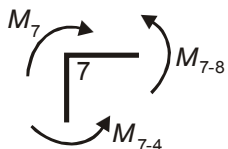
$$\varphi_6 = \varphi_4.$$

Таким чином, кількість основних невідомих скорочується до чотирьох:

$$\varphi_4, \varphi_7, \Delta_1, \Delta_2.$$

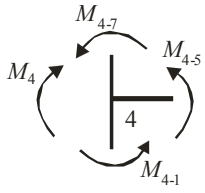
Складання рівнянь рівноваги

Розв'язувальні рівняння складаємо з умов рівноваги елементів, які утримуються від переміщень накладеними з'єднаннями.



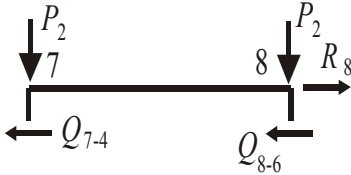
Так, з умов рівноваги вузла 7 маємо:

$$M_7 = M_{7-4} + M_{7-8} = 0. \quad (15.37)$$



З умов рівноваги вузла 4:

$$M_4 = M_{4-7} + M_{4-5} + M_{4-1} = 0. \quad (15.38)$$

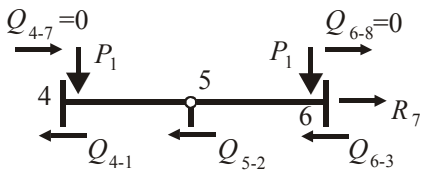


З умов рівноваги верхнього ригеля 7-8 маємо:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_8 - Q_{7-4} - Q_{8-6} = 0 \text{ або } R_8 = Q_{7-4} + Q_{8-6} = 0,$$

звідки випливає, що $Q_{7-4} = -Q_{8-6}$.

З іншого боку, внаслідок кососиметричного напружено-деформованого стану рами згинальні моменти кососиметричні, а поперечні сили – симетричні, тобто $Q_{7-4} = Q_{8-6}$. Обидві рівності можливі лише за умови, що поперечні сили в стояках дорівнюють нулю $Q_{7-4} = Q_{8-6} = 0$. Це означає, що поступальне переміщення Δ_2 з числа невідомих можна виключити, взявши для стояків 4-7 та 6-8 формули кінцевих моментів для випадку, коли поперечна сила дорівнює нулю.



Умова рівноваги нижнього ригеля 4-5-6 дає

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_7 - Q_{4-1} - Q_{5-2} - Q_{6-3} = 0.$$

З умов косої симетрії напружено-деформованого стану можна вважати, що $Q_{6-3} = Q_{4-1}$. З урахуванням отриманого співвідношення умова рівноваги ригеля набуває вигляду:

$$R_7 = 2Q_{4-1} + Q_{5-2} = 0. \quad (15.39)$$

Отже виражаємо кінцеві зусилля, що входять до рівнянь (15.37) – (15.39).

$$M_{7-4} = i_{7-4} \left[\left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_7 - \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_4 \right] = i \left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_7 - i \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_4;$$

$$M_{7-8} = 2i_{7-8} (2\varphi_t + \varphi_8 - 3\psi_{7-8}) = 2 \cdot 4i (2\varphi_t + \varphi_7) = 24\varphi_7;$$

$$M_{4-7} = i_{7-4} \left[\left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_4 - \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_7 \right] = i \left(\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu} \right)_{7-4} \varphi_4 - i \left(\frac{\nu}{\sin \nu} \right)_{7-4} \varphi_7;$$

$$M_{4-5} = 3i_{4-5} (\varphi_4 - \psi_{4-5}) = 3i\varphi_4;$$

$$M_{4-1} = i_{4-1} \bar{\alpha}_{4-1} (\varphi_4 - \psi_{4-1}) = 4i \bar{\alpha}_{4-1} \left(\varphi_4 - \frac{\Delta_1}{5} \right) = 4i \bar{\alpha}_{4-1} \varphi_4 - 0,8i \bar{\alpha}_{4-1} \Delta_1;$$

$$Q_{4-1} = -\frac{i_{4-1}}{l_{4-1}}(\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4 - \bar{\gamma}_{4-1}\psi_{4-1}) = -\frac{4i}{5}\left(\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4 - \bar{\gamma}_{4-1}\frac{\Delta_1}{5}\right) = -0,8i\bar{\alpha}_{4-1}\varphi_4 + 0,16i\bar{\gamma}_{4-1}\Delta_1;$$

$$Q_{5-2} = -\frac{3i_{5-2}}{l_{5-2}}(\varphi_2 - \psi_{5-2}) = -\frac{3 \cdot 2i}{5}\left(0 - \frac{\Delta_1}{5}\right) = 0,24i\Delta_1.$$

Підставивши отримані кінцеві зусилля до системи рівнянь отримаємо систему рівнянь методу переміщень:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 24\right)\varphi_7 - \left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4}\varphi_4 &= 0; \\ -\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4}\varphi_7 + \left(\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 4\bar{\alpha}_{1-4} + 3\right)\varphi_4 - 0,8\bar{\alpha}_{1-4}\Delta_1 &= 0; \\ -0,8\bar{\alpha}_{1-4}\varphi_4 + (0,32\bar{\gamma}_{4-1} + 0,24)\Delta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Складання рівняння стійкості

Рівняння стійкості рами одержимо, прирівнявши до нуля визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь (15.40) методу переміщень:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 24 & -\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4} & 0 \\ -\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{7-4} & \left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{7-4} + 4\bar{\alpha}_{1-4} + 3 & -0,8\bar{\alpha}_{1-4} \\ 0 & -1,6\bar{\alpha}_{1-4} & 0,32\bar{\gamma}_{4-1} + 0,24 \end{vmatrix} = 0 \quad (15.41)$$

Розв'язання рівняння стійкості

Рівняння стійкості (15.40) розв'язуємо так само як і для симетричної форми втрати стійкості, зважаючи на те, що $v_{1-4} = v_{4-7}$. Послідовно надаємо незалежному параметру v_{4-7} значень 0; 1; 2 і т.д. Критичною буде величина параметру, за якою визначник (15.40) обертається на нуль. Результати обчислень заносимо в таблицю 15.15.

Таблиця 15.13

№	v_{4-7}	$\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)_{4-7}$	$\left(\frac{v}{\sin v}\right)_{4-7}$	v_{1-4}	α_{1-4}	γ_{1-4}	D
1	0	1	1	0	3	3	190,8
2	1	0,642	1,188	1	2,790	1,794	50,23
3	2	-0,915	2,199	2	2,088	-1,911	-216,4

4	1,2	0,466	1,287	1,2	2,699	1,259	-40,8
5	1,1	0,560	1,234	1,1	2,749	1,539	-30,96

Виконавши лінійну інтерполяцію в інтервалі $1 < v_{4-7} < 1,1$, знаходимо:

$$v_{4-7}^{\text{кр}} = 1 + \frac{50,23 \cdot 0,1}{50,23 + 30,96} = 1,062.$$

Критичний параметр навантаження, який відповідає втраті стійкості за кососиметричною формою деформації дорівнює:

$$P_{\text{кр}} = \frac{v_{4-7}^2 \cdot i}{h} = \frac{1,062^2 i}{5} = 0,225i.$$

З іншого боку, при розрахунку рами в передбаченні втрати стійкості за симетричною формою деформації було отримано

$$P_{\text{кр}} = 2,350i.$$

Порівнюючи означені результати доходимо висновку, що рама втратить стійкість за кососиметричною формою.

15.4. Задачі для самостійного розв'язування

Визначити критичні величини сил для плоских рам, представлених на рис.15.15.

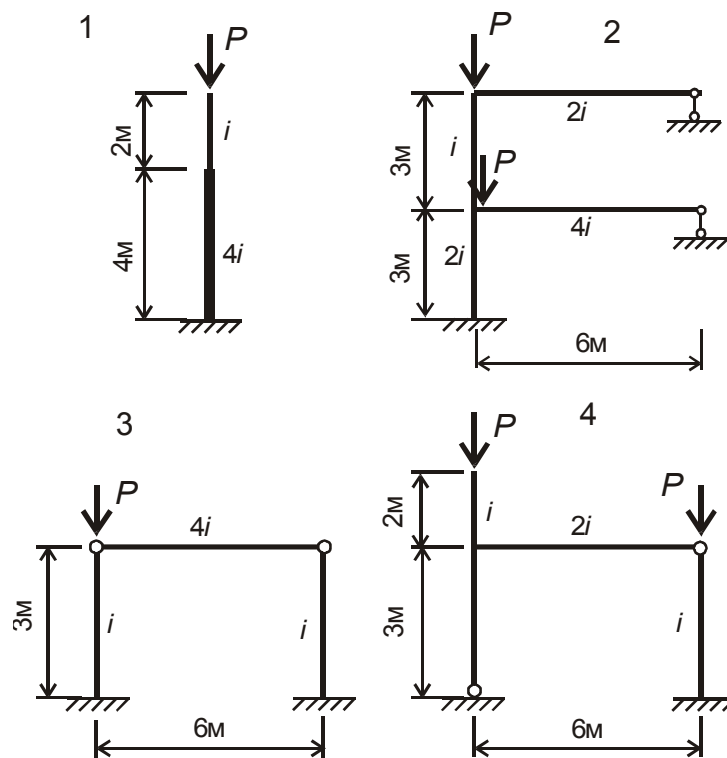


Рис.15.15