В.А.Баженов, Г.М.Іванченко,
О.В.Шишов, С.О.Пискунов

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Розрахункові вправи. Задачі.
Комп'ютерне тестування

Навчальний посібник

Київ – 2013

16. Динамічний розрахунок рам

16.1.Короткі відомості про розрахунок на динамічні дії

Однією з найголовніших характеристик коливальних систем є число динамічних ступенів вільності, тобто кількість незалежних геометричних параметрів (узагальнених координат), які визначають положення всіх мас системи при її деформаціях.

При визначенні числа ступенів вільності динамічної системи зручно кожну зосереджену масу умовно закріплювати кінематичними в’язями так, щоб маса при обраних передумовах розрахунку зробилась нерухомою. Мінімальне число кінематичних в’язей, які необхідно ввести для повного закріплення всіх мас, характеризує число динамічних ступенів вільності коливальної системи.

Вільними називають коливання системи, яка в початковий момент часу виводиться зі стану рівноваги, після чого причини збудження усуваються і система продовжує рух за відсутності зовнішніх дій. Коливання відбуваються за рахунок запасу енергії, яку одержала система при початковому збудженні.

Змушені коливання характеризуються тим, що система перебуває під постійною дією зовнішніх динамічних навантажень. Енергія, яка необхідна для підтримки процесу коливань, здобувається за рахунок зовнішніх дій.

Вільні коливання системи з n ступенями динамічної вільності характеризуються системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} & - & m_2\ddot{y}_2\delta_{12} & - & \ldots & - & m_n\ddot{y}_n\delta_{1n}; \\ y_2 & = & -m_1\ddot{y}_1\delta_{211} & - & m_2\ddot{y}_2\delta_{22} & - & \ldots & - & m_n\ddot{y}_n\delta_{2n}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & = & -m_1\ddot{y}_1\delta_{n1} & - & m_2\ddot{y}_2\delta_{n2} & - & \ldots & - & m_n\ddot{y}_n\delta_{nn}. \end{array} \qquad (16.1)$$

Тут $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – можливі переміщення зведених мас $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \ldots, \tilde{m}_n$ системи (зведеною масою $\tilde{m}_i$ назвемо сумарну масу, яка зміщується в напрямі переміщення y_i), δ_{ik} – переміщення зведеної маси в напрямі i від дії одиничної сили в напрямі k.

Система диференціальних рівнянь (16.1) може бути записана в матричній формі

$$\mathbf{D}\,\mathbf{m}\,\ddot{\bar{\mathbf{y}}} + \bar{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}. \qquad (16.2)$$

Тут $\mathbf{m}$ – матриця мас

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}\tilde{m}_1 & & & \\ & \tilde{m}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \tilde{m}_n\end{bmatrix}; \tag{16.3}$$

$\mathbf{D}$ – матриця податливості коливальної системи

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn}\end{bmatrix}; \tag{16.4}$$

$\vec{\mathbf{y}}$, $\ddot{\vec{\mathbf{y}}}$ – вектори можливих переміщень та їхніх других похідних за часом

$$\vec{\mathbf{y}}=\left\{y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n\right\}^T, \tag{16.5}$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{y}}}=\left\{\ddot{y}_1 \quad \ddot{y}_2 \quad \dots \quad \ddot{y}_n\right\}^T. \tag{16.6}$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (16.1) розшукується у вигляді:

$$\begin{array}{ll} y_1 = a_1\sin(\omega t+\varphi), & \ddot{y}_1 = -a_1\omega^2\sin(\omega t+\varphi);\\ y_2 = a_2\sin(\omega t+\varphi), & \ddot{y}_2 = -a_2\omega^2\sin(\omega t+\varphi);\\ \dots & \dots\\ y_n = a_n\sin(\omega t+\varphi), & \ddot{y}_n = -a_n\omega^2\sin(\omega t+\varphi).\end{array} \tag{16.7}$$

Тут $a_1, a_2, \dots, a_n$ – амплітуди можливих переміщень мас системи; ω – циклічна (колова) частота вільних коливань, що характеризує кількість повних циклів коливань за 2π секунд; φ – початкова фаза коливань.

Підстановка розв'язків (16.7) в систему диференціальних рівнянь (16.1) перетворює її на систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{llll} (\tilde{m}_1\delta_{11}-\lambda)a_1 + & \tilde{m}_2\delta_{12}a_2 + \dots + & \tilde{m}_n\delta_{1n}a_n & = 0,\\ \tilde{m}_1\delta_{21}a_1 + & (\tilde{m}_2\delta_{22}-\lambda)a_2 + \dots + & \tilde{m}_n\delta_{2n}a_n & = 0,\\ \dots & \dots & & \dots\\ \tilde{m}_1\delta_{n1}a_1 + & \tilde{m}_2\delta_{n2}a_2 + \dots + & (\tilde{m}_n\delta_{nn}-\lambda)a_n & = 0.\end{array} \tag{16.8}$$

Тут позначено

$$\lambda=\frac{1}{\omega^2}. \tag{16.9}$$

Система однорідних алгебраїчних рівнянь (16.8) складена відносно амплітуд переміщень зведених мас. Система матиме ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \tilde{m}_1\delta_{11} - \lambda & \tilde{m}_2\delta_{12} & \dots\dots\dots & \tilde{m}_n\delta_{1n} \\ \tilde{m}_1\delta_{21} & \tilde{m}_2\delta_{22} - \lambda & \dots\dots\dots & \tilde{m}_n\delta_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \tilde{m}_1\delta_{n1} & \tilde{m}_2\delta_{n2} & \dots\dots\dots & \tilde{m}_n\delta_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (16.10)$$

Рівняння (16.10) називається "віковим", або частотним. Воно є характеристичним рівнянням системи (16.1). Невідомим у "віковому" рівнянні є величина λ, яка в системах з n ступенями вільності має n дійсних значень.

"Вікове" рівняння може бути представлене в матричній формі:

$$\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right)\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad (16.11)$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1\delta_{11} & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & m_n\delta_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (16.12)$$

Оскільки "вікове" рівняння (16.10) має n дійсних коренів λ, можна дійти висновку, що система, що має n ступенів динамічної вільності, може коливатися з n частотами. Частоти власних коливань виражаються виходячи зі співвідношення (16.9) за формулою

$$\omega_i = +\sqrt{\frac{1}{\lambda_i}} \; . \qquad (16.13)$$

Сукупність усіх частот $\boldsymbol{\omega}_i$ $\left(i = 1, 2, \dots, n\right)$ утворює спектр частот. Розташуємо частоти в порядку їх збільшення: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$. Найменша частота $\boldsymbol{\omega}_1$ називається **частотою основного тону** коливань, а решта частот – **обертонами**.

Кожній частоті, тобто кожному кореню λ_i $\left(i{=}1,2,\dots,n\right)$, відповідає сукупність амплітуд $a_1, a_2, \dots, a_n$, які визначаються з точністю до множника. Набір амплітуд, що відповідає якійсь певній частоті, характеризує форму деформації системи, яка відповідає означеній частоті і називається формою власних коливань.

Число λ називається **власним, або характеристичним числом** матриці $\mathbf{A}$. Частоти, кожна з яких відповідає якомусь із власних чисел, називають **власними частотами**. Очевидно, що першій частоті вільних коливань, яка є найменшою у спектрі, відповідає найбільше власне число, тобто

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n,$$

причому найбільше власне число λ_1 вважається старшим. Множина амплітуд, які відповідають якому-небудь власному числу, утворюють вектор $\vec{\mathbf{V}}$, який називається **власним вектором.**

Таким чином, квадратна матриця **A** (16.12) порядку *n* має *n* власних чисел і *n* власних векторів. Для визначення частот вільних коливань (власних частот) необхідно обчислити власні числа матриці **A**, а для визначення амплітуд – власні вектори.

Власні числа мають певні властивості.

1. Сума власних чисел дорівнює сумі головних коефіцієнтів (сліду) матриці **A**:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Sp\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i \delta_{ii}\,. \tag{16.14}$$

2. Добуток власних чисел дорівнює визначнику матриці **A**:

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = Det\,\mathbf{A}\,. \tag{16.15}$$

Переміщення мас системи характеризує деформовану вісь споруди, так звану **форму коливань**. Форми коливань, які визначаються амплітудами, що входять до складу власних векторів, називають **головними формами** коливань. Отже, системи з *n* ступенями вільності мають *n* головних форм коливань, а переміщення будь-якої маси *j* в будь-який момент часу *t* може розглядатися як накладання *n* головних форм коливань:

$$y_j = a_{j1}\sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + a_{j2}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) + \ldots + a_{jn}\sin\left(\omega_n t + \varphi_n\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\sin\left(\omega_i t + \varphi_i\right). \tag{16.16}$$

Тут a_{ji} – амплітуда переміщення y_j в формі коливань *i*.

На цій підставі можна вважати, що кожна маса системи з *n* ступенями вільності в процесі вільних коливань коливається водночас з *n* власними частотами.

Головні форми коливань мають такі властивості:

1. У будь-який момент часу співвідношення між амплітудами не змінюється, тобто деформована вісь споруди, що відповідає головній формі коливань, зберігає свою форму деформації. Тому такі деформації називають **стоячою хвилею.** Так, для сукупності амплітуд $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ji}, \ldots, a_{ki}, \ldots, a_{ni}$ будь-якої головної форми власних коливань, яка відповідає власній частоті $\boldsymbol{\omega}_i$, можна записати

$$\frac{y_{ji}}{y_{ki}} = \frac{a_{ji}}{a_{ki}} = const\,. \tag{16.17}$$

2. Сума добутків мас системи на відповідні амплітуди двох головних форм коливань дорівнює нулю. Цей висновок називається властивістю **ортогональності головних форм коливань**. Так, для двох головних форм $\vec{\mathbf{V}}_k = \left\{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{jk}, \ldots, a_{nk}\right\}^T$ і $\vec{\mathbf{V}}_i = \left\{a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ji}, \ldots, a_{ni}\right\}^T$, які відповідають власним частотам ω_i і ω_k, можна записати

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{m}_j a_{jk} a_{ji} = 0\,. \tag{16.18}$$

Мета розрахунку на вільні коливання полягає у визначені частот і форм власних коливань.

Змушені коливання системи з *n* ступенями вільності відповідають системі диференціальних рівнянь руху

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\tilde{m}_1\ddot{y}_1\delta_{11} - \tilde{m}_2\ddot{y}_2\delta_{12} - \ldots - \tilde{m}_n\ddot{y}_n\delta_{1n} + \delta_{1p}P(t);\\
y_2 &= -\tilde{m}_1\ddot{y}_1\delta_{211} - \tilde{m}_2\ddot{y}_2\delta_{22} - \ldots - \tilde{m}_n\ddot{y}_n\delta_{2n} + \delta_{2p}P(t);\\
&\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
y_n &= -\tilde{m}_1\ddot{y}_1\delta_{n1} - \tilde{m}_2\ddot{y}_2\delta_{n2} - \ldots - \tilde{m}_n\ddot{y}_n\delta_{nn} + \delta_{np}P(t).
\end{aligned} \tag{16.19}$$

Ці самі рівняння в матричній формі набувають вигляду

$$\mathbf{D}\,\mathbf{m}\,\ddot{\vec{\mathbf{y}}} + \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\,\overline{\mathbf{P}}\,, \tag{16.20}$$

де $\vec{\mathbf{P}} = \left\{P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_n\right\}^T$ – вектор зовнішніх динамічних навантажень, розкладений по напрямах можливих переміщень коливальної системи.

Розв’язок системи (16.19) розшукується у вигляді

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_1 \sin\theta t,\\
y_2 &= A_2 \sin\theta t,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= A_n \sin\theta t.
\end{aligned} \tag{16.21}$$

Підставивши розв’язок (16.21) до рівнянь (16.19) одержуємо систему алгебраїчних рівнянь. У разі дії вібраційного навантаження $P(t) = P_0 \sin\theta t$ система набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\left(\delta_{11}-\frac{1}{\tilde{m}_1\theta^2}\right)B_1 + \delta_{12}B_2 + \ldots + \delta_{1n}B_n + \delta_{1p}P_0 = 0;\\
&\delta_{21}B_1 + \left(\delta_{22}-\frac{1}{\tilde{m}_2\theta^2}\right)B_2 + \ldots + \delta_{2n}B_n + \delta_{2p}P_0 = 0;\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\delta_{n1}B_2 + \delta_{n2}B_2 + \ldots + \left(\delta_{nn}-\frac{1}{\tilde{m}_n\theta^2}\right)B_n + \delta_{np}P_0 = 0.
\end{aligned} \tag{16.22}$$

Тут $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – амплітудні величини сил інерції, які діють в напрямах можливих переміщень і виражаються співвідношеннями

$$B_1 = \tilde{m}_1 A_1 \theta^2, \quad B_2 = \tilde{m}_2 A_2 \theta^2, \ldots, B_n = \tilde{m}_n A_n \theta^2. \tag{16.23}$$

Амплітудні величини динамічних зусиль $M_\partial, Q_\partial, N_\partial$ можуть бути визначені на базі принципу незалежності дії за формулами накладання:

$$\begin{aligned}
M_\partial &= \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i B_i + \bar{M}_p P_0;\\
Q_\partial &= \sum_{i=1}^{n} \bar{Q}_i B_i + \bar{Q}_p P_0;\\
N_\partial &= \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i B_i + \bar{N}_p P_0,
\end{aligned} \tag{16.24}$$

де $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ – відповідно згинальні моменти, поперечні і поздовжні сили від дії одиничних сил інерції, $\bar{M}_p, \bar{Q}_p, \bar{N}_p$ – зусилля від статичної дії одиничного зовнішнього навантаження.

Амплітуди переміщень можуть бути визначені на базі формул (16.23)

$$A_1 = \frac{B_1}{\tilde{m}_1\theta^2}, \qquad A_2 = \frac{B_2}{\tilde{m}_2\theta^2}, \quad \ldots, \quad A_n = \frac{B_n}{\tilde{m}_n\theta^2} \tag{16.25}$$

або за формулою Максвелла-Мора:

$$A_i = \Delta_{i\partial} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_\partial}{EI} dx. \tag{16.26}$$

Розрахунок динамічної системи на змушені коливання може виконуватись способом розкладання навантаження по головним формам коливань. Такий підхід дозволяє виконати розрахунок на змушені коливання без складання і розв’язування системи рівнянь. Ідея способу полягає в розкладанні зовнішнього навантаження, що діє на маси системи, на низку інших навантажень, кількість яких дорівнює числу ступенів вільності. Сили, що діють на маси в кожному завантаженні мають бути пропорційні силам інерції однієї з головних форм коливань. При такому завантаженні коливання відбуватимуться по відповідній головній формі. Отже, замість одного дійсного навантаження з'являються кілька інших завантажень, зовнішні сили в яких пропорційні силам інерції головних форм коливань. При кожному з таких завантажень система, що має n ступенів вільності коливатиметься з однією, спільною для всіх мас, частотою, тобто буде поводитися як система з одним ступенем вільності і може розраховуватися відповідними способами. Кінцеві результати для вихідної схеми можуть бути отримані додаванням результатів розрахунків на кожне навантаження окремо. Таким чином, розрахунок системи з n ступенями вільності може бути зведений до розрахунку n систем з одним ступенем вільності.

Для одержання сили в напрямі i, що відповідає певній головній формі j, необхідно скористатися формулою

$$P_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_i a_{ik} H_k \,, \tag{16.27}$$

де коефіцієнт H_j визнається зі співвідношення

$$H_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i(t) a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i a_{ij}^2} \,. \tag{16.28}$$

У наведених формулах $P_i(t)$ – зовнішні сили, що діють у напрямах можливих переміщень зведених мас системи $\tilde{m}_i$, a_{ij} – відповідні амплітуди даної форми коливань.

Від кожного утвореного навантаження будуються складові епюри. Дійсні епюри можуть бути одержані як сума складових епюр, помножених на відповідні динамічні коефіцієнти

$$\mu_1 = \frac{1}{1-\left(\theta/\omega_1\right)^2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{1-\left(\theta/\omega_2\right)^2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{1-\left(\theta/\omega_3\right)^2}, . \tag{16.29}$$

16.2.Приклад динамічного розрахунку рами

Розглянемо невагому рами, наведену на рис.16.1,*а*. Геометричні розміри рами характеризуються параметрами $l = 6 \ м$, $h = 3 \ м$. На рамі розташовано дві точкові маси $m_1 = 2m$, $m_2 = m$. Зовнішнє навантаження – вібраційна сила $P(t) = P_0 \sin\theta\, t$, причому $P_0 = 10 \ кН$, $\theta = 0{,}9\omega_1$. Необхідно виконати динамічний розрахунок рами, тобто розрахувати раму на вільні і змушені коливання.

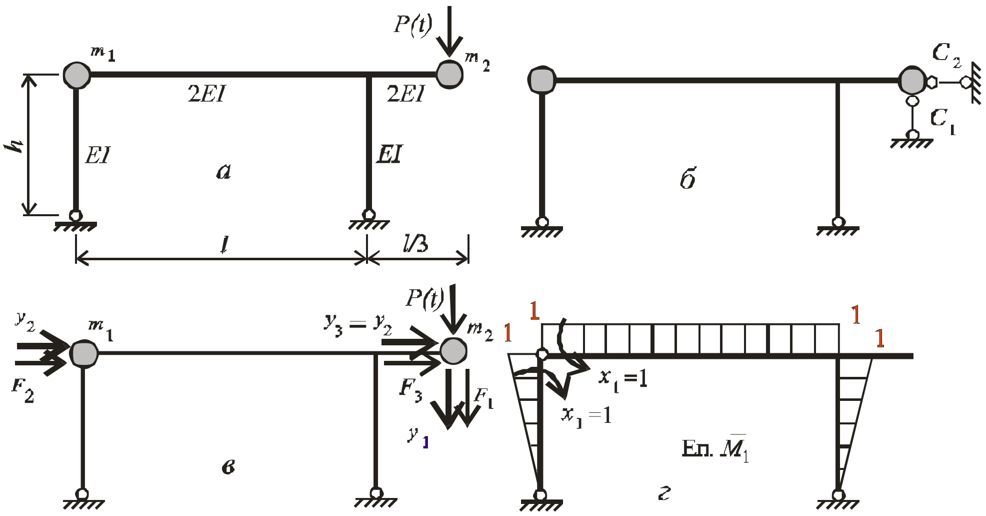


Рис.16.1

16.2.1.Розрахунок на вільні коливання

Визначення числа ступенів вільності

Для закріплення мас системи достатньо ввести два додаткових опорних стержня (рис.16.1.*б*). Вертикальне переміщення y_1 маси m_2 усувається постановкою стержня C_1, а вертикальне переміщення маси m_1 дорівнює нулю, оскільки при згині рам поздовжніми деформаціями стержнів можна нехтувати. Горизонтальні переміщення обох мас усуваються постановкою одного додаткового опорного стержня C_2. Отже, переміщення y_2 і y_3 лінійно залежні. До того ж очевидно, що

$$y_2 = y_3 . \tag{16.30}$$

Таким чином, задана система має два динамічних ступеня вільності

$$n_{дин} = 2 . \tag{16.31}$$

Напрями можливих переміщень показано на рис.16.1,*в*. У подальшому ці напрями вважатимемо за додатні. Тут також показано додатні напрями сил інерції F_1, F_2, F_3, які зумовлені рухом точкових мас системи.

Складання диференціальних рівнянь руху

Запишемо можливі незалежні переміщення як суми переміщень від дії сил інерції

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 + \delta_{13}F_3, \\ y_2 &= \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2 + \delta_{23}F_3. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Враховуючи рівність вертикальних переміщень (16.30) можна записати

$$\begin{aligned}\delta_{13} &= \delta_{12},\\ \delta_{23} &= \delta_{22}.\end{aligned} \tag{16.33}$$

Сили інерції виразимо через можливі незалежні переміщення y_1 і y_2:

$$\begin{aligned}F_1 &= -m_1\ddot{y}_1 = -m\ddot{y}_1,\\ F_2 &= -m_2\ddot{y}_2 = -m\ddot{y}_2,\\ F_3 &= -m_1\ddot{y}_3 = -2m\ddot{y}_2.\end{aligned} \tag{16.34}$$

Система рівнянь (16.30) з урахуванням (16.33) і (16.34) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\left(m\delta_{11}\ddot{y}_1 + y_1\right) + \quad 3m\delta_{12}\ddot{y}_2 &= 0,\\ m\delta_{21}\ddot{y}_1 + \left(3m\delta_{22}\ddot{y}_2 + y_2\right) &= 0.\end{aligned} \tag{16.35}$$

У диференціальних рівняннях (16.35) зведені маси, які переміщуються в напрямах незалежних переміщень y_1 і y_2, дорівнюють

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1 &= m_2 = m,\\ \tilde{m}_2 &= m_1 + m_2 = 3m.\end{aligned} \tag{16.36}$$

Отже, матриця мас має вигляд

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}. \tag{16.37}$$

Розв'язання диференціальних рівнянь руху

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (16.6) розшукуємо у вигляді

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 \sin(\omega t + \lambda),\\ y_2 &= a_2 \sin(\omega t + \lambda).\end{aligned} \tag{16.38}$$

Після підстановки розв'язків (16.38) до рівнянь (16.35) одержуємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\left(m\delta_{11} - \lambda\right)a_1 \quad + \quad 3m\delta_{12} &= 0,\\ m\delta_{21} \quad + \quad \left(3m\delta_{22} - \lambda\right)a_2 &= 0,\end{aligned} \tag{16.39}$$

де позначено

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}. \tag{16.40}$$

Розрахунок заданої рами на одиничні дії

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь (16.39) необхідно побудувати епюри згинальних моментів, що виникають у заданій схемі від дії одиничних сил інерції. Отже, виникає потрібність розрахунку рами на дію статичних навантажень.

Задана схема статично невизначувана. Дійсно, $n = 3k - ш = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Для розрахунку скористаємось методом сил. Основну систему одержимо за рахунок уведення шарніра у лівий верхній вузол рами. Одинична епюра $\bar{M}_1$ побудована на рис.16.1,*г*.

Система канонічних рівнянь методу сил складається з одного рівняння

$$\bar{\delta}_{11} X_1 + \bar{\delta}_{1p} = 0. \tag{16.41}$$

Одиничний коефіцієнт $\bar{\delta}_{11}$ не залежить від зовнішніх навантажень і може бути обчислений за формулою Мора:

$$\bar{\delta}_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{5}{EI}\,. \tag{16.42}$$

Розв’язавши (16.41) маємо

$$X_1 = -\frac{\bar{\delta}_{1p}}{\bar{\delta}_{11}} = -\frac{EI}{5} \bar{\delta}_{1p}\,. \tag{16.43}$$

Дійсна епюра згинальних моментів може бути побудована, згідно формули

$$M_д = \bar{M}_1 X_1 + M_p\,. \tag{16.44}$$

Розрахунок на дію сили $F_1 = 1$ (рис.16.2,*а*).

Вантажна епюра M_{p1} показана на рис.16.2,*б*. Вантажний коефіцієнт

$$\bar{\delta}_{1p} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_{p1}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{3}{EI}\,. \tag{16.45}$$

Розв’язок канонічного рівняння (16.41) згідно до (16.43):

$$X_1 = -\frac{EI}{5} \cdot \frac{3}{EI} = -0,6\,. \tag{16.46}$$

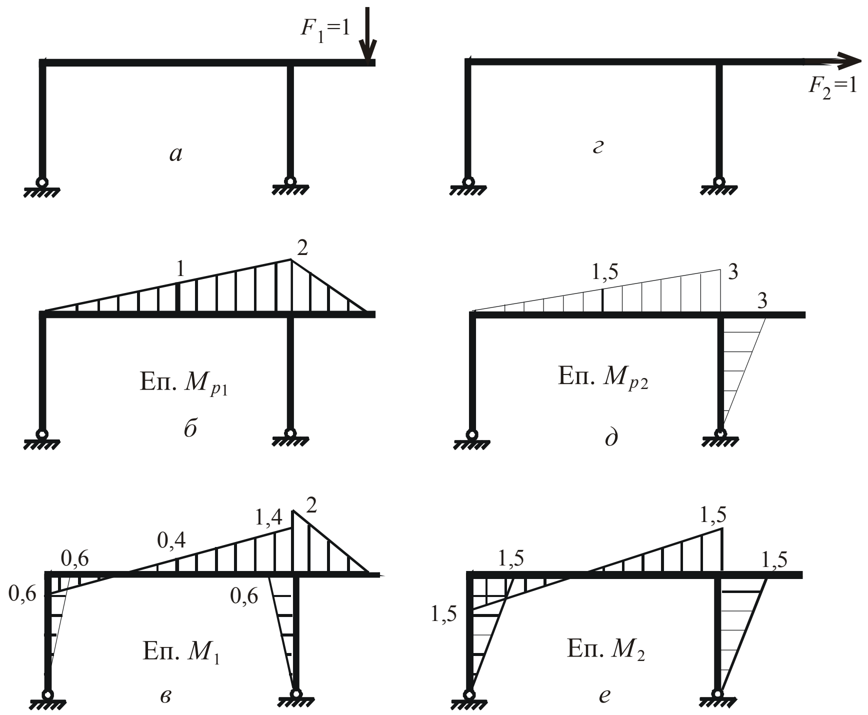


Рис.16.2

Дійсна епюра згинальних моментів від першого навантаження, побудована за формулою (16.44), наведена на рис.16.2,*в*.

Розрахунок на дію сили $F_2 = 1$ (рис.16.2,*г*).

Вантажна епюра M_{p2} показана на рис.16.2,*д*. Вантажний коефіцієнт

$$\bar{\delta}_{1p} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_{p2}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} 1 \cdot 6 \cdot 1,5 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7,5}{EI} . \tag{16.47}$$

Розв’язок канонічного рівняння (16.41) згідно до (16.43):

$$X_1 = -\frac{EI}{5} \cdot \frac{7,5}{EI} = -1,5 . \tag{16.48}$$

Дійсна епюра згинальних моментів від другого навантаження, побудована за формулою (16.44), наведена на рис.16.2,*е*.

Обчислення переміщень

Визначимо переміщення, які входять до рівнянь (16.39). Для контролю кожне переміщення будемо обчислювати двома способами.

$$\delta_{11} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_1^2}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0,6^2+4\cdot 0,4^2+1,4^2\right)+2\cdot\frac{1}{EI}\cdot\frac{0,6\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0,6+$$

$$+\frac{1}{2EI}\cdot\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{3,533}{EI};$$

$$\delta_{11} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_1 M_{p1}}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0,6\cdot 0+4\cdot 0,4\cdot 1+1,4\cdot 2\right)+$$

$$+\frac{1}{2EI}\cdot\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{3,533}{EI}.$$

$$\delta_{12}=\delta_{21} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0,6\cdot 1,5+4\cdot 0\cdot 0,4+1,4\cdot 1.5\right)+$$

$$+\frac{1}{EI}\cdot\frac{0,6\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,5-\frac{1}{EI}\cdot\frac{0,6\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,5=\frac{1,5}{EI};$$

$$\delta_{12}=\delta_{21} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_1 M_{p2}}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0,6\cdot 0+4\cdot 1,5\cdot 0,4+3\cdot 1,4\right)-$$

$$-\frac{1}{EI}\cdot\frac{0,6\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3=\frac{1,5}{EI};$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int_0^l \frac{M_{p1}M_2}{EI}dx=\frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0\cdot 1,5+4\cdot 1\cdot 0+2\cdot 1,5\right)=\frac{1,5}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_2^2}{EI}dx = 2\cdot\frac{1}{EI}\cdot\frac{3\cdot 1,5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,5+\frac{1}{2EI}\cdot\frac{3\cdot 1,5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,5\cdot 2=\frac{6,75}{EI};$$

$$\delta_{22} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_2 M_{p2}}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0\cdot 1,5+4\cdot 0\cdot 1,5+1,5\cdot 3\right)+$$

$$+\frac{1}{EI}\cdot\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,5=\frac{6,75}{EI}.$$

Дані коефіцієнти складають матрицю податливості

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3,533}{EI} & \dfrac{1,5}{EI}\\ \dfrac{1,5}{EI} & \dfrac{6,75}{EI}\end{bmatrix} \qquad (16.49)$$

Складання "вікового" рівняння

Підставивши переміщення в систему (16.39), одержимо

$$\begin{aligned} \left(3,533-\tilde{\lambda}\right)a_1 \quad &+ \quad 4,5a_2 &= 0,\\ 1,5a_1 \quad &+ \quad \left(20,25-\tilde{\lambda}\right)a_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (16.50)$$

Тут позначено

$$\tilde{\lambda} = \frac{EI}{m}\lambda = \frac{EI}{m\omega^2}. \tag{16.51}$$

Отже, для одержання динамічних характеристик системи необхідно обчислити власні значення (власні числа і власні вектори) матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,533 & 4,5 \\ 1,5 & 20,25 \end{bmatrix}. \tag{16.52}$$

"Вікове" рівняння, тобто умова наявності вільних коливань заданої рами матиме вигляд

$$Det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right) = \begin{bmatrix} 3,533 - \tilde{\lambda} & 4,5 \\ 1,5 & 20,25 - \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = 0. \tag{16.53}$$

Визначення власних чисел матриці A

Розкривши визначник (16.53), одержуємо квадратне рівняння

$$Det\left(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{E}\right) = \left(3,533 - \tilde{\lambda}\right)\left(20,25 - \tilde{\lambda}\right) - 4,5 \cdot 1,5 = 0;$$
$$\tilde{\lambda}^2 - 23,783\tilde{\lambda} + 64,793 = 0.$$

Корені квадратного рівняння є власними числами матриці **A**.

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = 11,892 \pm \sqrt{11,892^2 - 64,793} = 11,892 \pm 8,573;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= 20,534, \\ \tilde{\lambda}_2 &= 3,139. \end{aligned} \tag{16.54}$$

Перевірка власних чисел

Сума власних чисел має дорівнювати сумі головних коефіцієнтів (сліду) матриці **A**:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 = 20,645 + 3,139 = 23,784; \\ &Sp\,\mathbf{A} = 3,533 + 20,25 = 23,783. \end{aligned} \tag{16.55}$$

Добуток власних чисел має дорівнювати визначнику матриці **A**:

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{2} \tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 = 20,645 \cdot 3,139 = 64,804; \\ &Det\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3,533 & 4,5 \\ 1,5 & 20,25 \end{vmatrix} = 64,793. \end{aligned} \tag{16.56}$$

Обчислення частот вільних коливань

Власні частоти вільних коливань визначаються на базі співвідношення (16.40):

$$\omega_i = +\sqrt{\frac{EI}{m\tilde{\lambda}_i}} \,. \tag{16.57}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{EI}{m\tilde{\lambda}_1}} = 0,22\sqrt{\frac{EI}{m}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{EI}{m\tilde{\lambda}_2}} = 0,564\sqrt{\frac{EI}{m}}. \end{aligned} \tag{16.58}$$

Визначення головних форм вільних коливань

Співвідношення амплітуд переміщень, які визначають форму зігнутої осі рами при кожній власній частоті, можуть бути знайдені з рівнянь (16.39).

Перша головна форма

Підставимо величину $\tilde{\lambda}_1 = 20,645$ до рівнянь (16.39). Маємо:

$$\begin{aligned} -17,112a_1 \quad + \quad 4,5a_2 \quad &= 0; \\ 1,5a_1 \quad - \quad 0,395 \quad &= 0. \end{aligned} \tag{16.59}$$

Легко впевнитись, що як з першого, так і з другого рівняння, отримаємо

$$a_1 = 0,263a_2 \,. \tag{16.60}$$

Таким чином, якщо амплітуда $a_2 = 1$, то амплітуда $a_1 = 0{,}263$. Отже, можна записати для першої форми

$$\vec{\mathbf{V}}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,263 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{16.61}$$

Друга головна форма

Підставимо величину $\tilde{\lambda}_2 = 3{,}139$ до рівнянь (16.39). Маємо:

$$\begin{aligned} 0,394a_1 \quad + \quad 4,5a_2 \quad &= 0; \\ 1,5a_1 \quad + \quad 17,111a_2 \quad &= 0. \end{aligned} \tag{16.62}$$

Як з першого, так і з другого рівняння, отримаємо

$$a_2 = -0,088a_1 \,. \tag{16.63}$$

Таким чином, якщо амплітуда $a_1 = 1$, то амплітуда $a_2 = -0,088$. Отже, можна записати для другої головної форми коливань

$$\vec{\mathbf{V}}_2 = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,088 \end{Bmatrix}. \qquad (16.64)$$

Перевірка ортогональності головних форм вільних коливань

Перевіримо, чи дорівнює нулю, згідно до (16.18), сума добутків мас і відповідних амплітуд двох головних форм вільних коливань

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{m}_j a_{j1} a_{j2} = \tilde{m}_1 a_{11} a_{12} + \tilde{m}_2 a_{21} a_{22} = m \cdot 0,263 \cdot 1 + 3m \cdot 1 \cdot \left(-0,088\right) =$$

$$= 0,263m - 0,264m = -0,001m \approx 0.$$

Побудова головних форм вільних коливань

Перша і друга головні форми коливань побудовано на рис.16.3.*а* і 16.3.*б* відповідно.

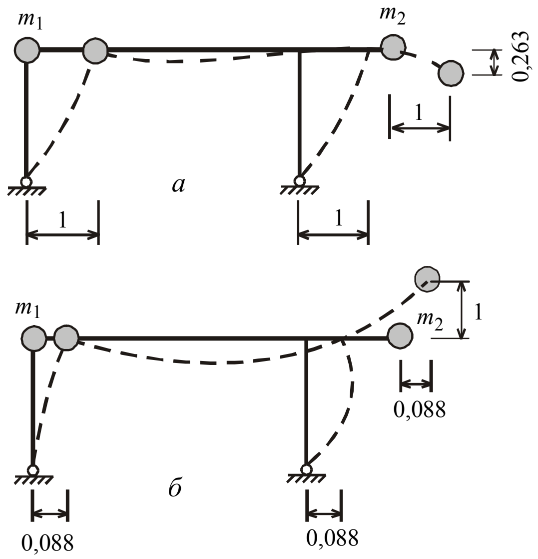


Рис.16.3

16.2.2. Розрахунок на змушені коливання безпосереднім розв'язанням диференціального рівняння руху

Система алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь для змушених коливань (16.22) для заданої схеми набуває вигляду

$$\begin{aligned}\left(\delta_{11}-\frac{1}{\tilde{m}_1\theta^2}\right)B_1 \quad + \qquad\qquad \delta_{12}B_2 \quad + \quad \delta_{1p}P_0 \quad &= 0,\\ \delta_{21}B_1 \quad + \quad \left(\delta_{22}-\frac{1}{\tilde{m}_2\theta^2}\right)B_2 \quad + \quad \delta_{2p}P_0 \quad &= 0\end{aligned} \tag{16.65}$$

або з урахуванням величин зведених мас

$$\begin{aligned}\left(\delta_{11}-\frac{1}{m\theta^2}\right)B_1 + \qquad\qquad \delta_{12}B_2 + \delta_{1p}P_0 &= 0,\\ \delta_{21}B_1 + \left(\delta_{22}-\frac{1}{3m\theta^2}\right)B_2 + \delta_{2p}P_0 &= 0.\end{aligned} \tag{16.66}$$

Тут B_1, B_2 – невідомі амплітудні величини сил інерції, що діють в напрямах можливих переміщень і виражаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}B_1 &= \tilde{m}_1 A_1\theta^2 = mA_1\theta^2,\\ B_2 &= \tilde{m}_2 A_2\theta^2 = 3mA_2\theta^2.\end{aligned} \tag{16.67}$$

Коефіцієнти системи алгебраїчних рівнянь

До рівнянь (16.66) входять переміщення, які були обчислені під час розрахунку на вільні коливання і складають матрицю податливості (16.49). Для визначення вантажних коефіцієнтів δ_{1p}, δ_{2p} необхідно побудувати в рамі епюру M_p, зумовлену дією одиничного зовнішнього навантаження (рис.16.4,*а*).

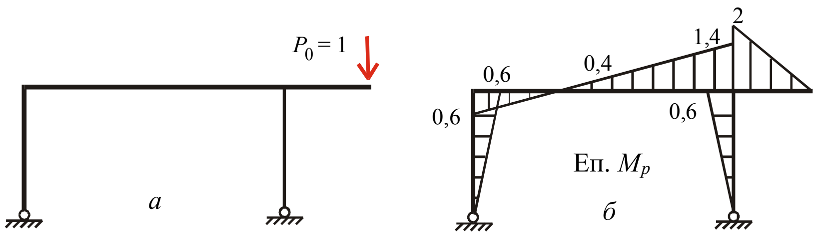


Рис.16.4

Означений вантажний стан збігається із допоміжним станом, від дії першої сили інерції (рис.16.2,*а*). Тому епюра M_p (рис.16.4,*а*) дорівнює епюрі M_1 (рис.16.2,*в*):

$$M_p = M_1. \tag{16.68}$$

Отже, вантажні переміщення

$$\delta_{1p} = \sum\int_0^l \frac{M_1 M_p}{EI}dx = \sum\int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI}dx = \delta_{11} = \frac{3,533}{EI},$$
$$\delta_{2p} = \sum\int_0^l \frac{M_2 M_p}{EI}dx = \sum\int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI}dx = \delta_{21} = \frac{1,5}{EI}. \tag{16.69}$$

За умовою задачі $P_0 = 10\,кН$, циклічна частота змушених коливань

$$\theta = 0,9\omega_1 = 0,9 \cdot 0,22\sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,198\sqrt{\frac{EI}{m}}; \tag{16.70}$$

$$\theta^2 = 0,0392\frac{EI}{m}.$$

Для визначення головних коефіцієнтів системи (16.66) обчислимо величини

$$\frac{1}{m\theta^2} = \frac{1}{m \cdot 0,0392\frac{EI}{m}} = \frac{25,4876}{EI},$$
$$\frac{1}{3m\theta^2} = \frac{8,4959}{EI}. \tag{16.71}$$

Розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

Підставивши всі зазначені величини до (16.66) і скоротивши на величину EI, одержимо остаточно

$$\begin{array}{rcrcrl} -21,955B_1 & + & 1,5B_2 & + & 35,33 & = 0, \\ 1,5B_1 & - & 1,746B_2 & + & 15 & = 0. \end{array} \tag{16.72}$$

Розв'язавши систему (16.72) маємо:

$$B_1 = 2,333;$$
$$B_2 = 10,594. \tag{16.73}$$

Для перевірки підставимо знайдені величини до сумарного рівняння

$$-20,455B_1 - 0,246B_2 + 0,246 = 0;$$
$$-20,455 \cdot 2,333 - 0,246 \cdot 10,594 + 50,33 == -50,327 + 50,33 = 0,003 \approx 0.$$

Рівняння руху мас системи при змушених коливаннях

Амплітуди переміщень мас визначимо за формулами (16.25):

$$A_1 = \frac{B_1}{\tilde{m}_1\theta^2} = B_1\frac{1}{m\theta^2} = 2{,}333\cdot\frac{25{,}4876}{EI} = \frac{59{,}4626}{EI};$$
$$A_2 = \frac{B_2}{\tilde{m}_2\theta^2} = B_2\frac{1}{3m\theta^2} = 10{,}594\cdot\frac{8{,}4959}{EI} = \frac{90{,}0056}{EI}. \quad (16.74)$$

Таким чином, рух мас системи при змушених коливаннях відбувається за такими законами:

$$y_1 = \frac{59{,}4626}{EI}\sin\theta t,$$
$$y_2 = \frac{90{,}0056}{EI}\sin\theta t. \quad (16.75)$$

Побудова навантаженої схеми рами

Перш ніж будувати епюри зусиль, необхідно показати всі сили, які діють на раму в процесі змушених коливань. Така схема амплітудних сил інерції і динамічного навантаження показана на рис.16.5.

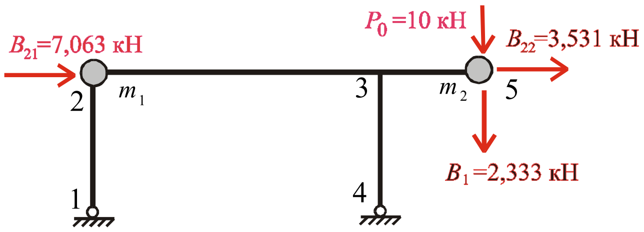


Рис.16.5

При побудові схеми спільна для обох мас сила інерції B_2, що діє в горизонтальному напрямі, розподілена між масами пропорційно їх величинам:

$$B_{21} = \frac{m_1}{m_1+m_2}B_2 = \frac{2m}{2m+m}\cdot 10{,}594\ \text{кН} = 7{,}063\ кН;$$
$$B_{22} = \frac{m_2}{m_1+m_2}B_2 = \frac{m}{2m+m}\cdot 10{,}594\ \text{кН} = 3{,}531\ кН. \quad (16.76)$$

Побудова динамічних епюр зусиль

Динамічні епюри зусиль будуються за формулами (16.24). Так, для побудови епюри згинальних моментів необхідно скористатися формулою

$$M_д = M_1B_1 + M_2B_2 + M_pP_0. \quad (16.77)$$

Процес побудови амплітудної епюри згинальних моментів $M_д$ показано на рис. 16.2.6.

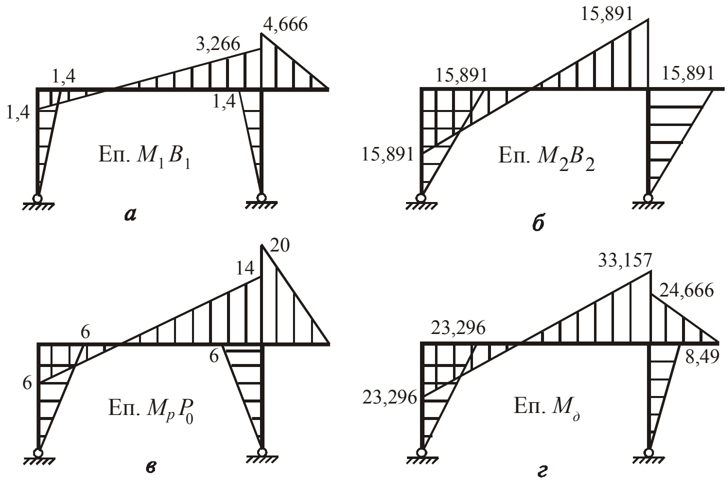


Рис.16.6

Динамічна епюра $Q_д$ (рис.16.7) побудована на базі диференціальної залежності з епюрою $M_д$:

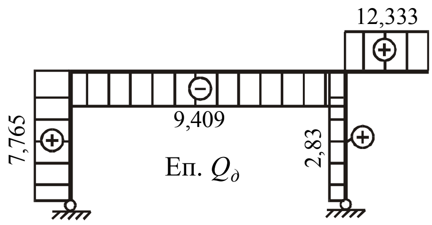


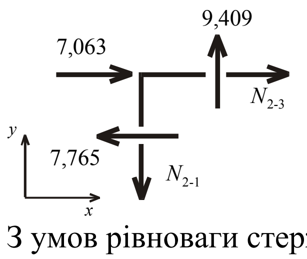
Рис.16.7

$$Q_{1-2} = \frac{23,296}{3} = 7,765 \ \ кН; \qquad Q_{3-4} = \frac{8,49}{3} = 2,83 \ \ кН,$$

$$Q_{2-3} = -\frac{23,296 + 33,157}{6} = -9,409 \ \ кН; \quad Q_{3-5} = \frac{24,666}{2} = 12,333 \ \ кН.$$

Амплітудні поздовжні сили можуть бути обчислені виходячи з рівноваги елементів рами:

З умов рівноваги вузла 2:



$$\sum F_x = \quad N_{2-3} + 7,063 - 7,765 = 0;$$

$$N_{2-3} = 0,702 \ \ кН.$$

$$\sum F_y = \quad -N_{2-1} + 9,409 = 0;$$

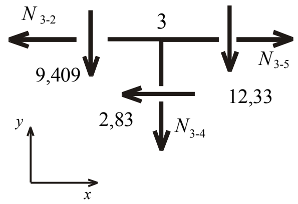
$$N_{2-1} = 9,409 \ кН.$$

З умов рівноваги стержня 2-3:

$$\sum F_x = N_{3-2} - N_{2-3} = 0;$$

$$N_{3-2} = N_{2-3} = 0,702 \ \ кН.$$

З умов рівноваги вузла 3:



$$\sum F_x = \quad N_{3-5} - N_{3-2} - 2{,}83 = 0;$$
$$N_{3-5} = 3{,}532 \ \ \kappa H.$$
$$\sum F_y = \quad -N_{3-4} - 12{,}33 - 9{,}409 = 0;$$
$$N_{3-4} = -21{,}739 \ \ \kappa H.$$

Динамічна епюра N_∂ поздовжніх сил наведена на рис.16.8.

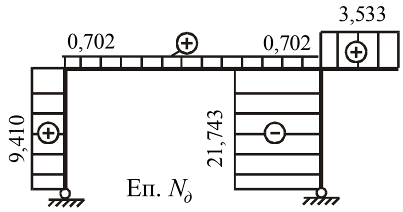


Рис.16.8

Кінематична перевірка розрахунку

Для перевірки порівняємо амплітудні переміщення мас (16.74), обчислені за формулами (16.25), з відповідними переміщеннями, визначеними за формулою Мора (16.26).

$$\Delta_{1\partial} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_{p1}M_\partial}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0+4\cdot 1\cdot 4{,}930+2\cdot 33{,}157\right)+$$
$$+\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 24{,}666\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{43{,}017}{EI}+\frac{16{,}444}{EI}=\frac{59{,}461}{EI}\approx\frac{59{,}4626}{EI}.$$

$$\Delta_{2\partial} = \quad \sum\int_0^l \frac{M_{p2}M_\partial}{EI}dx = \frac{6}{6\cdot 2EI}\left(0+4\cdot 1{,}5\cdot 4{,}930+3\cdot 33{,}157\right)+$$
$$+\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 8{,}49=\frac{64{,}525}{EI}+\frac{25{,}47}{EI}=\frac{89{,}995}{EI}\approx\frac{90{,}0056}{EI}.$$

16.2.3. Розрахунок на змушені коливання розкладанням навантаження по головним формам коливань

Обчислення коефіцієнтів розкладення

Для кожної головної форми коливань необхідно за формулою (16.28) обчислити коефіцієнт H_j. Компоненти зовнішніх навантажень $P_i(t)$ по напрямках можливих переміщень (рис.16.1) мають такі значення:

$$P_1(t) = P_0 = 10 \ \ \kappa H; \quad P_2(t) = 0.$$

Зведені маси обчислено у співвідношеннях (16.36). Величини амплітуд вільних коливань записано у вигляді векторів (16.61) і (16.64).

Отже, для першої головної форми

$$H_1 = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i(t) a_{i1}}{\sum_{i=1}^{2} \tilde{m}_i a_{i1}^2} = \frac{P_1(t) a_{11} + P_2(t) a_{21}}{\tilde{m}_1 a_{11}^2 + \tilde{m}_2 a_{21}^2} = \frac{10 \cdot 0,263 + 0}{m \cdot 0,263^2 + 3m \cdot 1^2} = \frac{0,8569}{m}.$$

Для другої головної форми

$$H_2 = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i(t) a_{i2}}{\sum_{i=1}^{2} \tilde{m}_i a_{i2}^2} = \frac{P_1(t) a_{12} + P_2(t) a_{22}}{\tilde{m}_1 a_{12}^2 + \tilde{m}_2 a_{22}^2} = \frac{10 \cdot 1 + 0}{m \cdot 1^2 + 3m \cdot \left(-0,088\right)^2} = \frac{9,774}{m}.$$

Визначення навантажень, відповідних головним формам

Сили, відповідні силам інерції головних форм, визначаються за формулою (16.27).

Для першої головної форми

$$P_{11} = \tilde{m}_1 a_{11} H_1 = m \cdot 0,263 \cdot \frac{0,8569}{m} = 0,2254 \ \ кН;$$

$$P_{21} = \tilde{m}_2 a_{21} H_1 = 3m \cdot 1 \cdot \frac{0,8569}{m} = 2,5707 \ \ кН.$$

Для другої головної форми

$$P_{12} = \tilde{m}_1 a_{12} H_2 = m \cdot 1 \cdot \frac{9,774}{m} = 9,774 \ \ кН;$$

$$P_{22} = \tilde{m}_2 a_{22} H_2 = 3m \cdot \left(-0.088\right) \cdot \frac{9,774}{m} = -2,5745 \ \ кН.$$

Виконаємо перевірку розкладення:

$$P_1(t) = P_{11} + P_{12} = 0,2254 + 9,774 = 9,9994 \approx 10;$$
$$P_2(t) = P_{21} + P_{22} = 2,5707 + \left(-2,5745\right) = -0,0038 \approx 0.$$

Побудова епюр від навантажень, відповідних головним формам коливань

Навантаження, відповідне першій головній формі, наведено на рис.16.9,*а*.

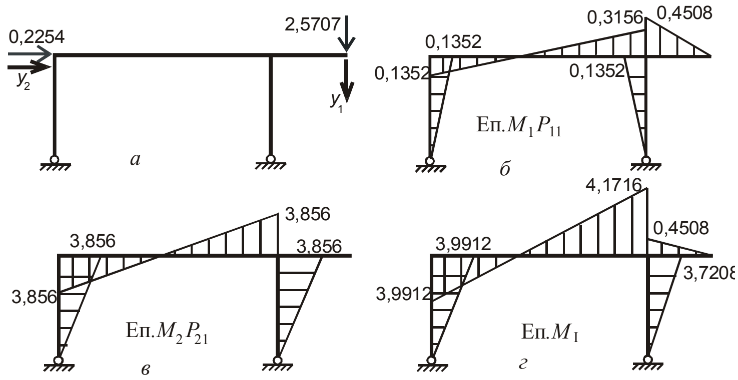


Рис.16.9

Епюра згинальних моментів M_{I} від даного навантаження (рис.16.9,*г*) може бути побудована за способом накладення

$$M_{\mathrm{I}} = M_1 P_{11} + M_2 P_{21} = 0,2254 M_1 + 2,5707 M_2 .$$

Графіки доданків цієї формули побудовано на рис. 16.9,*б* і 16.9,*в*.

Навантаження, відповідне першій головній формі, наведено на рис.16.10,*а*.

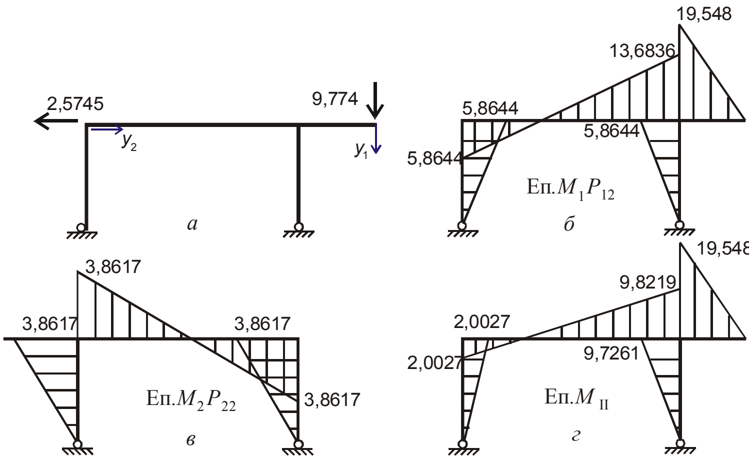


Рис.16.10

Епюра згинальних моментів M_{II} від даного навантаження (рис.16.10,*г*) також може бути побудована за способом накладення

$$M_{\mathrm{II}} = M_1 P_{12} + M_2 P_{22} = 9,774 M_1 + \left(-2,5745\right) M_2 .$$

Визначення динамічних коефіцієнтів

За формулою (16.29) визначимо величини динамічних коефіцієнтів для кожної головної форми. Власні частоти ω_1, ω_2 й частота динамічного навантаження θ були обчислені раніше (16.58), (16.70).

$$\mu_{\mathrm{I}} = \frac{1}{1-\left(\theta/\omega_{1}\right)^{2}} = \frac{1}{1-\left(0{,}198/0{,}22\right)^{2}} = 5{,}253;$$

$$\mu_{\mathrm{II}} = \frac{1}{1-\left(\theta/\omega_{2}\right)^{2}} = \frac{1}{1-\left(0{,}198/0{,}564\right)^{2}} = 1{,}140.$$

Побудова динамічної епюри згинальних моментів

Дійсна динамічна епюра згинальних моментів M_{∂} (рис.16.11,*в*) будується як сума епюр від кожного окремого навантаження, які помножені на відповідні динамічні коефіцієнти

$$M_{\partial} = M_{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}}.$$

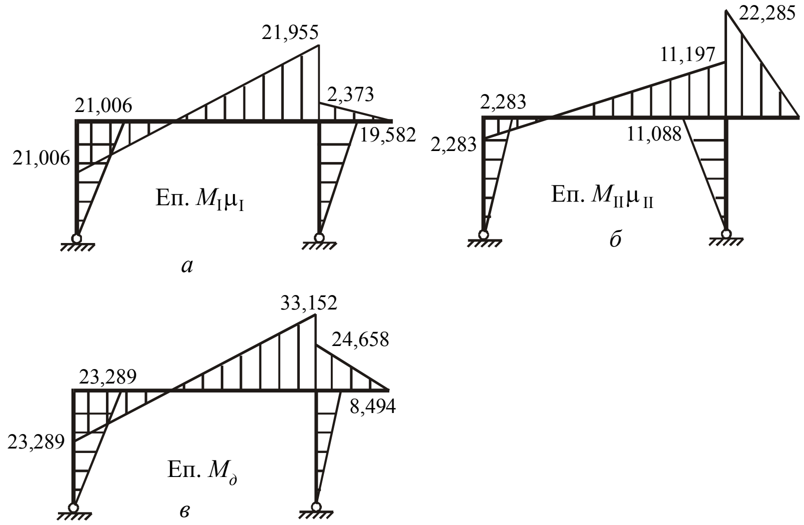


Рис.16.11

Епюра згинальних моментів M_{∂}, побудована шляхом розкладання динамічного навантаження по головним формам вільних коливань, практично збігається з епюрою, побудованою безпосереднім розв’язком системи диференціальних рівнянь руху (рис.16.6,*г*). Динамічні епюри поперечних Q_{∂} і поздовжніх N_{∂} сил можуть бути побудовані так само, як в п.16.2.

16.3. Виконання розрахунково-графічної роботи з використанням комп’ютерної програми

Розрахунково-графічна робота "Динамічний розрахунок рам" може бути виконана із застосуванням комп’ютерної програми, яка входить до програмного навчального комплексу АСИСТЕНТ. Програма перевіряє розрахунки, виконані "вручну", і в разі відсутності помилок видає результати на принтер або на дисплей. Таким чином, до роботи на комп’ютері можна приступити лише після закінчення "ручного" розрахунку на вільні та змушені коливання.

Для залучення програми до роботи ввести номер схеми і вхідні дані (рис.16.12).

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ					
L	H	M1	M2	Po	Teta/Omega
6.00000	3.00000	2.00000	1.00000	10.0000	0.9

Рис.16.12

Програма перевіряє величину найбільшого власного (характеристичного) числа. У разі помилки програма перевіряє коефіцієнти δ_{ik} матриці податливості. Якщо старше власне число обчислено правильно, на екран видаються головні форми коливань.

Для перевірки правильності розрахунку на змушені коливання, виконаного вручну, програма пропонує ввести величини амплітудних сил інерції. Схема сил показана на рис 16.13.

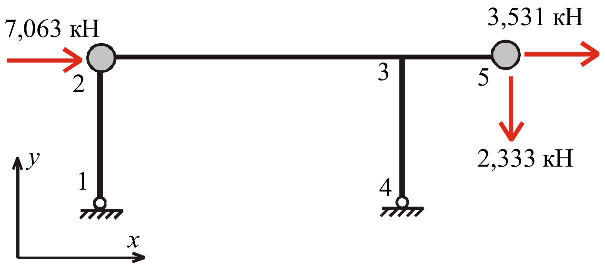


Рис.16.13

Амплітудні величини сил інерції вводяться у віконця діалогового вікна. При цьому сила вважається додатною, якщо її напрям збігається з напрямом відповідної координатної осі.

Якщо сили інерції визначено правильно, на екран дисплея видаються амплітудні епюри згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил, а числові результати виводяться на принтер і додаються до розрахунково-графічної роботи.

16.4. Задачі для самостійного опрацювання

Виконати розрахунок рам (рис.16.14) на вільні та змушені коливання, вважаючи, що динамічні сили змінюються в часі за законом $P(t) = 10\sin\theta t$.

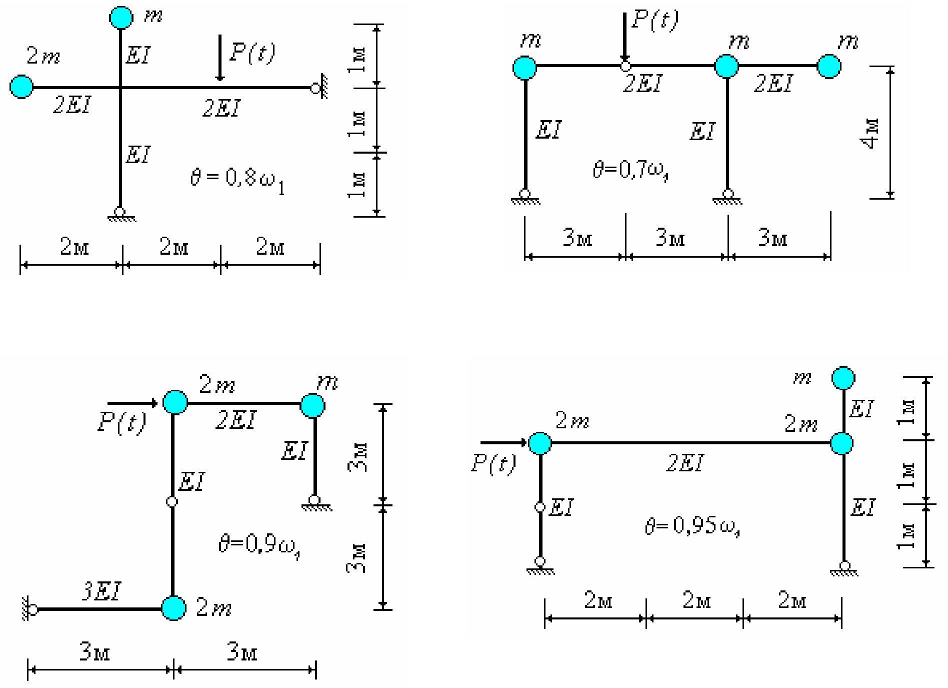


Рис.16.14