# Лабораторна робота №2

**Тема заняття:** Знаходження оцінок параметрів лінійної моделі за методом найменших квадратів

**Мета заняття:** практично навчитися ідентифікувати закон функціонування лінійного технологічного об’єкта, що описується лінійним рівнянням виду $y = a + bx$

**Місце проведення** лабораторної роботи: комп’ютерний клас

**Засоби:** комп’ютерні програмні системи MathCad, MatType

## 1. Теоретичні основи

*1. Передумови застосування методу найменших квадратів*

Запишемо економетричну модель у матричній формі так:

$$Y = AX + u, \tag{1}$$

де $Y$ — вектор значень залежної змінної;

$X$ – матриця незалежних змінних розміром $n \times m$ ($n$ – число спостережень, $m$ – кількість незалежних змінних);

$A$ – вектор оцінок параметрів моделі;

$u$ – вектор залишків (ще кажуть: збурень, відхилень) – випадковий складник.

Щоб застосовувати процедуру МНК для оцінки параметрів моделі, необхідне виконання таких умов:

1) математичне сподівання залишків дорівнює нулю, тобто

$$M(u) = 0; \tag{2}$$

2) значення $u_i$ вектора залишків $u$ незалежні між собою і мають постійну дисперсію, тобто

$$M(uu') = \sigma^2 E, \tag{3}$$

де $E$ — одинична матриця;

3) незалежні змінні моделі статистично не пов’язані із залишками:

$$M(x'u) = 0; \tag{4}$$

4) незалежні змінні моделі утворюють лінійно незалежну систему векторів, тобто, незалежні змінні не повинні бути *мультиколінеарними* – $|X'X| \neq 0$:

$$\operatorname{var}(x_k' x_j) = 0,\ k \neq j;$$

$$\operatorname{var}(x_k' x_j) = 1,\ k = j, \tag{5}$$

де $X_k$ – $k$-й вектор матриці пояснювальних змінних; $X_j$ – $j$-й вектор цієї матриці пояснювальних змінних $X$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$.

Явище мультиколінеарністі змінних призводить до серйозних проблем і насамперед до ненадійності оцінки параметрів моделі, робить їх чутливими до вибраної специфікації моделі та до конкретного набору даних. Це значить, що знижується рівень довіри до результатів моделювання за допомогою 1МНК. Отже, незважаючи на те, що це явище є досить поширеним, воно є ще й дуже небажаним.

*2. Оцінювання параметрів лінійної моделі*

Для спрощення розглянемо випадок лінійної функції одного аргументу. Нехай з досліду отримані пари даних спостережень (ще кажуть: точки спостережень):

$$\begin{cases} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ \ldots \\ x_n, y_n \end{cases} \tag{6}$$

Графічно в декартовій системі координат це показано на рис. 1.

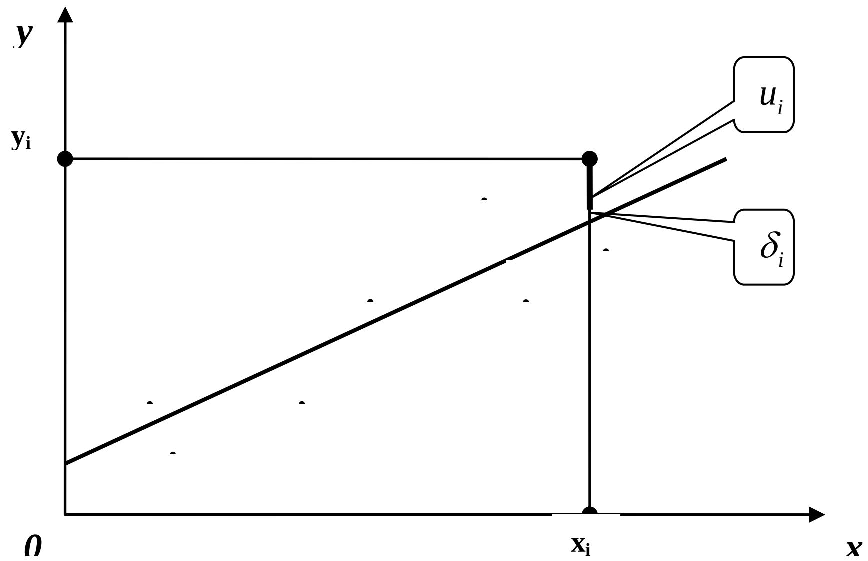


Рис. 1. Графічна інтерпретація ідеї методу найменших квадратів

Потрібно знайти рівняння прямої (в загальному вигляді з вільним членом *b*) в системі координат (*Ox, Oy*):

$$y = ax + b \tag{7}$$

таке, яке щонайкраще узгоджується з дослідними точками спостережень. Зрозуміло, що додавши в рівняння (7) залишок $u_i$, отримаємо модель виду (1).

Нехай ми знайшли таку пряму. Позначимо через $\delta_i$ (тут $\delta_i$ має той самий зміст, що й $u_i$ в найпростішій економетричній моделі (1) – рис. 1) відстань дослідної *i*-ї точки від цієї прямої. З рівняння (7) виходить, що

$$\delta_i = y_i - ax_i - b\,. \tag{8}$$

Чим менше число $\delta$ за абсолютною величиною, тим краще підібрана пряма (7). За характеристику точності підбору прямої (3.7) можна прийняти суму квадратів

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 . \qquad (9)$$

Покажемо, як можна підібрати пряму (7) так, щоб сума квадратів $S$ була мінімальною. З рівнянь (8) і (9) отримуємо

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 . \qquad (10)$$

Очевидно, що умови мінімуму $S$ будуть

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \qquad (11) \text{ і } (12)$$

Рівняння (11) і (12) можна записати у такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb \qquad (13) \text{ і } (14)$$

З рівнянь (13) і (14) легко знайти $a$ і $b$ за дослідними значеннями $x_i$ і $y_i$. Пряма (7), визначена рівняннями (13) і (14), називається прямою, отриманою за методом найменших квадратів (цією назвою підкреслюється те, що сума квадратів $S$ має мінімум). Система рівнянь (13) і (14), з яких визначається пряма (7), називається *системою нормальних рівнянь.*

Отже, розв'язком системи нормальних рівнянь відносно коефіцієнтів a і b буде:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (15)$$

## 3. Практична робота

Нехай невідома «ідеальна» лінійна модель технологічного об'єкта має вид:

$$y = ax + b \Rightarrow y = 1 + 1.2x \qquad (16)$$

На реальну залежну змінну діє шум $u$, так що реально модель має вид:

$$y = 1 + 1.2x + u \qquad (17)$$

Інтенсивність шуму $u$ для кожного варіанту завдання задається наступним алгоритмом:

$$u = \pm[n + \text{int}(N/2)]\%, \text{ якщо } u \succ \text{int}(N/2)$$
$$u = \pm[n]\%, \text{ якщо } u \succ \text{int}(N/2), \qquad (18)$$

де $n$ – порядковий номер студента в журналі,
$N$ – кількість студентів у групі за списком,
*int* – означає врахування тільки цілої частини від ділення *(N/2)*.

## 2. Приклад: Знаходження рівня шуму *u* та побудови вихідної таблиці даних

1. Знаходимо рівень шуму $u$ для індивідуального варіанту студента, наприклад, у групі 23 студенти, а порядковий номер студента – 7. Тоді

$$u = 7 + \text{int}(23/2) = 7 + 11 = \pm 18\%.$$

2. Будуємо таблицю даних (n = 5).

| Y (точне значення) | X | Y* (з врахуванням шуму) |
|---|---|---|
| 2.2 | 1 | 1.804 |
| 3.4 | 2 | 2,788 |
| 4.6 | 3 | 5,428 |
| 5.8 | 4 | 6,844 |
| 7.0 | 5 | 5,740 |

**Завдання.**

1. Застосовуючи (17) і (18) побудувати таблицю експериментальних даних (матриця 1×10), за якою оцінити невідомі параметри $a$ і $b$ моделі.
2. Побудувати графік в декартовій системі координат із нанесеними точками таблиці даних.

**Питання для самоконтролю**

1. Назвіть етапи побудови лінійної моделі.
3. Що означає специфікація моделі?
4. Коли для оцінки параметрів моделі можна застосувати 1МНК?
5. Запишіть оператор оцінювання 1МНК. Як його можна дістати?