Лабораторна робота №3

Дисципліна: Методи і засоби сучасного автоматизованого управління ТП
Тема заняття: Знаходження оцінок параметрів лінійної однофакторної моделі за методом найменших квадратів
Мета заняття: практично навчитися ідентифікувати закон функціонування лінійного технологічного об'єкта, що описується лінійним рівнянням виду $y = a + bx$
Місце проведення лабораторної роботи: комп'ютерний клас
Засоби: комп'ютерні програмні системи MathCad, MatType

1. Теоретичні основи.

Метод найменших квадратів використовується для побудови статичних характеристик технологічних процесів, дані для знаходження яких, отримуються експериментально.

Суть методу полягає у знаходженні коефіцієнтів певного рівняння регресії за умов, що

$$I = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y1)^2 \to \min \qquad (1)$$

де y_i - дані, отримані за результатами експеременту;
n - кількість дослідів
y - дійсне значення випадкової величини за умов, що рівняння регресії – це лінійна залежність

$$y1(x) = a \cdot x + b \qquad (2)$$

де a та b - коефіцієнти;
x - змінна функції $y1$.
Коефіцієнти a і b знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a} I = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right]^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial b} I = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right]^2 \end{cases} \qquad (3)$$

Для рівняння параболи

$$y3(x) = a \cdot (x_i)^2 + bx_i + c \qquad (4)$$

де a, b, c - коефіцієнти, які знаходяться із системи рівнянь.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial a} \left[y_i - a \cdot (x_i)^2 - b \cdot x - c \right]^2 = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{db} \left[y_i - a \cdot (x_i)^2 - b \cdot x - c \right]^2 = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial c} \left[y_i - a \cdot (x_i)^2 - b \cdot x - c \right]^2 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Після відповідних перетворень, отримуємо:

- для лінійної залежності
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a + b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \end{cases} \qquad (6)$$

- для рівняння параболи
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \end{cases} \qquad (7)$$

Для безпосереднього розрахунку коефіцієнтів a та b запишемо визначники:

- для лінійної регресії

$$\Delta = \begin{vmatrix} A2 & n \\ A3 & A2 \end{vmatrix}, \ \Delta a = \begin{vmatrix} A1 & n \\ A4 & A2 \end{vmatrix}, \ \Delta b = \begin{vmatrix} A2 & A1 \\ A3 & A4 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

- для параболічної регресії

$$\Delta = \begin{vmatrix} A6 & A5 & A3 \\ A5 & A3 & A2 \\ A3 & A2 & n \end{vmatrix}, \ \Delta a = \begin{vmatrix} A7 & A5 & A3 \\ A4 & A3 & A2 \\ A1 & A2 & n \end{vmatrix}, \ \Delta b = \begin{vmatrix} A6 & A7 & A3 \\ A5 & A4 & A2 \\ A3 & A1 & n \end{vmatrix}, \ \Delta c = \begin{vmatrix} A6 & A5 & A7 \\ A5 & A3 & A4 \\ A3 & A2 & A1 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

де: $A1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $A2 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $A3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$, $A4 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i$,

$A5 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^3$, $A6 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^4$, $A7 = \sum_{i=1}^{n} (x)^2 \cdot y_i$.

Коефіцієнти a,b,c визначаються як

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \ b = \frac{\Delta b}{\Delta}, \ c = \frac{\Delta c}{\Delta}. \qquad (10)$$

Порядок виконання лабораторної роботи:

1) ввести в комп’ютер дані свого варіанта;
2) визначити коефіцієнти a та b (для лінійної регресії);
3) визначити суму квадратів *I*;
4) вирішити поставлену задачу, використовуючи спеціальні функції “Mathcad”;
5) побудувати графік апроксимації даних за допомогою лінійної регресії;
6) провести апроксимацію експериментальних даних, використовуючи лінійну регресію.

Приклад

1. Вводимо в комп'ютер дані свого варіанту, наприклад:

$a := 8$ $\quad i := 1..n$

$x_i :=$ $\quad y_i :=$

x_i	y_i
1	31.2
2	32.8
3	33.6
4	35.6
5	37.7
6	39.2
7	40
8	39.3

2. Визначимо коефіцієнти a та b

$$A1 := \sum_{i=1}^{n} y_i \quad A2 := \sum_{i=1}^{n} x_i \quad A3 := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad A4 := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad \Delta := \begin{pmatrix} A2 & n \\ A3 & A2 \end{pmatrix} \quad \Delta a := \begin{pmatrix} A1 & n \\ A4 & A2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b := \begin{pmatrix} A2 & A1 \\ A3 & A4 \end{pmatrix} \quad \Delta a := \frac{\Delta a}{\Delta} \quad \Delta b := \frac{\Delta b}{\Delta} \quad a := |a| \quad a = 1.329 \quad b := |b| \quad b = 30.196$$

3. Знаходимо I та записуємо рівняння прямої лінії

$$I := \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right]^2 \quad I = 4.841 \quad yI_i := a \cdot x_i + b$$

Результат розрахунків записуємо в таблицю 1.

Таб.1. Результати розрахунків при використанні лінійної регресії.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y1$	$(y_i - y1)^2$
1	1.0	31.2	1.0	31.2	31.525	0.106
2	2.0	32.8	4.0	65.6	32.854	0.0028
3	3.0	33.6	9.0	100.8	31.182	0.339
4	4.0	35.6	16.0	142.4	35.511	0.0079
5	5.0	37.7	25.0	188.5	35.839	0.741
6	6.0	39.2	36.0	235.2	38.168	1.065
7	7.0	40	49.0	280.0	39.496	0.254
8	8.0	39.3	64.0	314.4	40.825	2.0
$\sum$	36.0	289.4	204.0	1358.1	289.4	4.841

Таб.2. Форма таблиці для розрахунків параметрів моделі

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$	y	$(y_i - yI_i)^2$
1									
2									
..									
n									

4. Вирішення задачі за допомогою спеціальних функцій “Mathcad”:

- задаємо початкові значення коефіцієнтів рівняння прямої лінії $a1$ та $b1$

$$a1 := 10 \quad b1 := 1$$

- за допомогою функції “Given” та “Find” розрахуємо коефіцієнти $a1$ та $b1$. У цьому разі слід пам’ятати, що оператор “Given” вказує на подальше використання системи рівнянь: функція “Find” дозволяє знайти рішення цієї системи

$$Given$$

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{\partial}{\partial a1}(y_i - a1 \cdot x_i - b1)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{\partial}{\partial b1}(y_i - a1 \cdot x_i - b1)^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \end{pmatrix} := Find(a1, b1) \quad a1 = 1.329 \quad b1 = 30.196$$

- знаходимо суму квадратів відхилень I

$$I := \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a \cdot x_i + b)\right]^2 \qquad I = 4.841;$$

- записуємо рівняння прямої лінії, коефіцієнти якого розраховані за допомогою спеціальних функцій “Mathcad”.

$$y2 := a1 \cdot x_i + b1$$

5. Зображуємо графіки *y(x),y1(x),y2(x):*

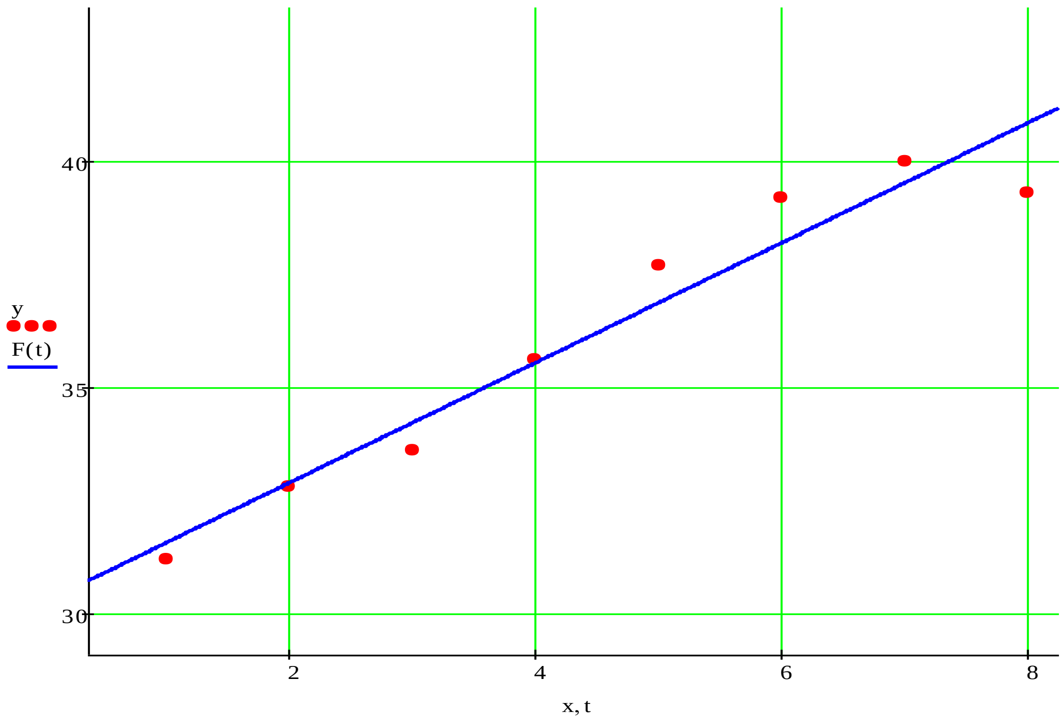

Рис 1. Результати лінійної апроксимації: *y(x)* - дослідні дані; *y1(x)* та *y2(x)* – апроксимації.

Контрольні запитання

1. Пояснити суть методу лінійної апроксимації.
2. Запишіть рівняння, за якими складаються визначники для знаходження коефіцієнтів параболічної регресії.
3. Яка повинна бути кількість аргументів функції “Find” при вирішенні системи рівнянь?
4. Записати визначники для знаходження коефіцієнтів лінійної регресії

Індивідуальні завдання

6. Індивідуальні завдання до виконання лабораторної роботи

Варіант №													
1,13	2,14	3,15	4,16	5,17	6,18	7,19	8,20	9,21	10,22	11,23	12,24	1-12	13-24
Вихідна величина об’єкту керування y(x), у.о												Вхідна величина x,c	
32.2	32.7	33.8	34.7	37.2	38.1	28.2	27.3	22.2	16.2	45.2	46	4.7	0
33.8	34.3	35.4	36.3	38.8	38.7	29.8	28.9	23.8	17.8	46.8	47.6	5.7	3
34.6	35.1	36.2	37.1	39.6	40.5	30.6	29.7	24.6	18.6	47.6	48.4	6.7	4
36.6	37.1	38.2	39.1	41.6	42.5	32.6	31.7	26.6	20.6	49.6	50.4	7.7	5
38.7	38.2	40.3	41.2	43.7	44.6	34.7	33.8	28.7	22.7	51.7	52.5	8.7	6
40.2	40.7	41.8	42.7	45.2	40.1	36.2	35.3	30.2	24.2	53.2	54	9.7	7
41	41.5	42.6	43.5	46	46.9	37	36.1	31	25	54	54.8	10.7	8
40.3	40.8	41.9	42.8	45.3	46.2	36.3	35.4	30.3	24.3	53.3	54.1	11.7	9