НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Факультет інформаційних технологій

Кафедра копм’ютерних наук

Методи та системи штучного інтелекту

Тема №3. Нейронні моделі знань

Київ - 2026

Зміст

Нейронні моделі представлення знань (штучні нейронні мережі – ШНМ) – це математичні моделі біологічних процесів, які відбуваються у мозку людини при розв’язанні тієї чи іншої задачі.

Штучна нейронна мережа, а також її програмне та апаратне втілення будується за принципом організації та функціонування біологічних нейронних мереж – мереж нервових клітин живого організму.

Штучна нейронна мережа являє собою систему з'єднаних і взаємодіючих між собою простих процесорів (штучних нейронів). Такі процесори зазвичай досить прості (особливо в порівнянні з процесорами, використовуваними в персональних комп'ютерах). Кожен процесор подібної мережі має справу тільки з сигналами, які він періодично отримує, і сигналами, які він періодично посилає іншим процесорам. Будучи з'єднаними в досить велику мережу з керованою взаємодією, такі окремо прості процесори разом здатні виконувати досить складні завдання.

Перевагою штучних нейронних мереж перед іншими моделями представлення знань є здатність до навчання (так званого «машинного навчання»).

Машинне навчання (*англ.: Machine learning – ML*) – клас методів штучного інтелекту, характерною рисою яких є не пряме розв’язання нової задачі за допомогою нового алгоритму, а застосування для цього алгоритмів розв’язання множини подібних задач, які були успішно досліджені у минулому.

Навчання штучної нейронної мережі полягає у знаходженні коефіцієнтів зв’язків між нейронами. В процесі навчання нейронна мережа здатна виявляти складні залежності між вхідними і вихідними даними, а також виконувати узагальнення. В разі успішного навчання мережа здатна досягнути вірного результату розв’язання нової задачі навіть у випадках неповноти вхідних даних, а також при їх частковому спотворенні.

Формально навчання нейронних мереж зводиться до розв’язання задачі багатопараметричної нелінійної оптимізації.

Штучні нейронні мережі використовуються в системах штучного інтелекту (зокрема – в роботизованих системах) для розв’язання задач розпізнавання образів, класифікації, прогнозування, управління тощо.

Задача **розпізнавання образів** полягає у встановленні класу об’єктів, якому належить новий об’єкт, що розпізнається.

Теорія розпізнавання образів – розділ кібернетики, що розвиває теоретичні основи й методи класифікації і ідентифікації предметів, явищ, процесів, сигналів, ситуацій і т. п. об'єктів, які характеризуються кінцевим набором деяких властивостей і ознак.

Здатність штучної нейронної мережі до **прогнозування** безпосередньо випливають з її здатності до узагальнення і виділення прихованих залежностей між вхідними та вихідними даними. Після навчання мережа здатна передбачити майбутнє значення якоїсь послідовності даних на основі декількох попередніх значень та існуючих зараз факторів.

Задачі **управління** в штучних нейронних мережах близькі до задач класифікації.

Класифікації підлягають ситуації, характеристики яких надходять на вхід нейронної мережі. На виході мережі при цьому повинна з'явитися ознака рішення, яке вона прийняла. При цьому в якості вхідних сигналів використовуються характеристики стану керованої системи.

1. Біологічний нейрон

Нервова система і мозок людини складаються з нейронів, з'єднаних між собою нервовими волокнами.

Нервові волокна здатні передавати електричні імпульси між нейронами. Всі процеси передачі подразнень від шкіри, вух і очей до мозку, процеси мислення і управління діями – все це реалізовано в живому організмі як передача електричних імпульсів між нейронами.

Нейрон (нервова клітина) є особливою біологічною клітиною, яка обробляє інформацію (рис. 1).

Нейрон складається з тіла (cell body) або соми (soma) та відростків нервових волокон двох типів:

• **дендритів** (dendrites), по яким приймаються імпульси;

• єдиного **аксона** (axon), по якому нейрон може передавати імпульс.

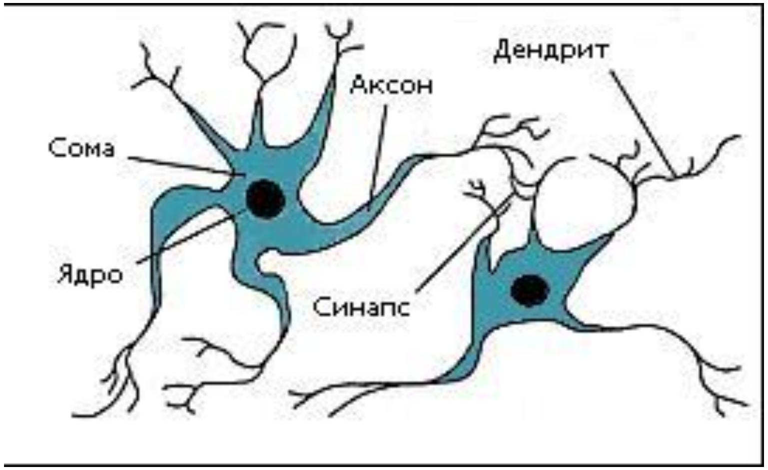


Рис. 1 – Взаємозв'язок біологічних нейронів

Тіло нейрона складається з ядра (nucleus), яке містить інформацію про його спадкові властивості, та плазми, що володіє молекулярними засобами для виробництва необхідних нейрону матеріалів.

Нейрон отримує сигнали (імпульси) від аксонів інших нейронів через дендрити (приймачі) і передає сигнали, що генеруються тілом клітки, вздовж свого аксона (передавача), який в кінці розгалужується на множину волокон (strands).

На закінченнях цих волокон знаходяться спеціальні утворення – синапси (synapses), які впливають на величину сигналу.

Синапс є функціональним вузлом (точкою контакту) між двома нейронами: аксоном одного нейрона і дендритом іншого.

Синапси можуть бути збуджуючими або гальмуючими залежно від того, збільшують вони результуючий сигнал чи навпаки.

Прийнято вважати, що кожен синапс має певну **вагу**, значення якої визначає зміну його результуючого сигналу.

Ваги синапсів можуть змінюватися з часом, отже, може змінюватися і поведінка нейронів-приймачів, на які спрямований результуючий сигнал синапсу.

Ваги синапсів можуть налаштовуватися сигналами, що проходять через нього. Завдяки цьому синапси можуть «навчатися» в залежності від активності процесів, в яких вони беруть участь.

Ця залежність від передісторії діє як пам'ять, що відповідальна за пам'ять людини.

Коли імпульс досягає синаптичного закінчення, вивільняються хімічні речовини, названі нейротрансмітерами.

Нейротрансмітери дифундують через синаптичну щілину, збуджуючи або гальмуючи (в залежності від ваги синапсу) здатність нейрона-приймача генерувати електричні імпульси.

Людський мозок містить 86 мільярдів нейронів; приблизно 16 мільярдів нейронів знаходяться в корі головного мозку.

Кожен нейрон має приблизно від 1000 до 10000 зв'язків з іншими нейронами, що доводить загальну кількість нейронних зв'язків у людському мозку до 100 трлн.

Нейрони взаємодіють короткими серіями імпульсів тривалістю, як правило, кілька мілісекунд.

Повідомлення між нейронами передаються за допомогою частотно-імпульсної модуляції.

Частотно-імпульсна модуляція – це вид кодування аналогового електричного сигналу послідовністю однакових прямокутних імпульсів, частота яких на деякому відрізку часу пропорційна середній величині аналогового сигналу.

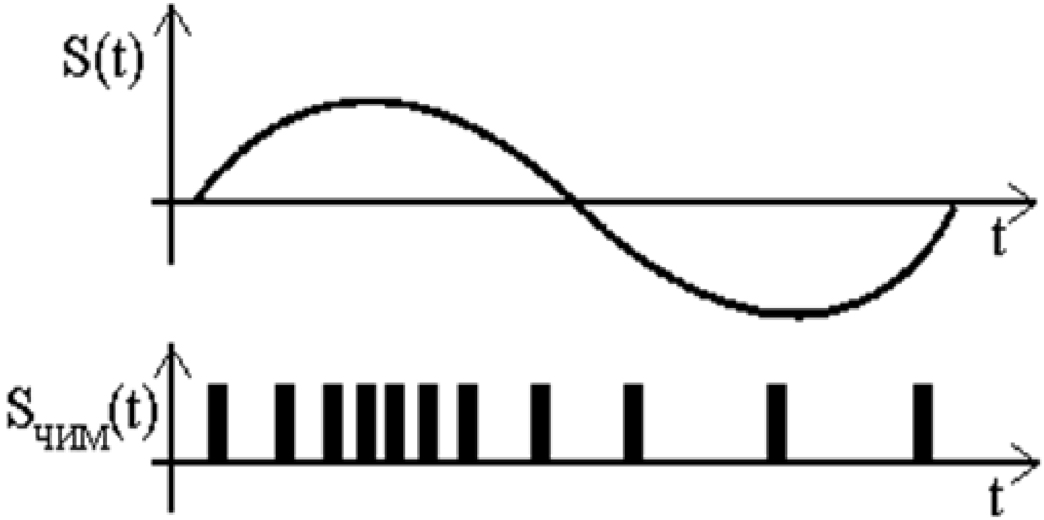
Частота імпульсів може змінюватися від декількох одиниць до сотень герц, що в мільйон разів повільніше, ніж швидкодіючі електронні схеми. Тим не менш складні задачі (наприклад – розпізнавання образів) людина вирішує за кілька сотень мілісекунд.

Це означає, що обчислення у мозку людини вимагають не більше 100 послідовних стадій.

Існує гіпотеза, що для розв’язання складних задач мозок «ініціює» виконання паралельних програм, що містять близько 100 кроків.

Звідси випливає, що кількість інформації, що посилається від одного нейрона іншому, має бути дуже малим (декілька біт).

Є припущення, що основна інформація не передається між нейронами безпосередньо, а «схоплюється» і розподіляється у зв'язках між ними.



Ілюстрація частотно-імпульсної модуляції

2. Модель нейрона

Опис біологічного нейрона визначає основні риси, які закладені у нейронні обчислювальні моделі.

Кожен обчислювальний елемент підраховує значення деякої функції своїх входів та передає результат до приєднаних до нього елементів мережі.

Кінцеві результати є наслідком паралельної та розподіленої обробки даних в мережі, утвореної нейронними сполуками та пороговими значеннями.

Перша формальна модель штучного нейрона була запропонована в 1943 році відомим американським фізіологом Уорреном Мак-Каллоком і його учнем Вальтером Піттсом.

Тоді ж ними було сформульовано фундаментальне твердження про те, що будь-яка функція нервової системи, яка може бути логічно описана за допомогою кінцевого числа слів, може бути реалізована мережею штучних нейронів.

Позначення:

x_i – вхідні сигнали нейрона; $i=\overline{1,n}$;

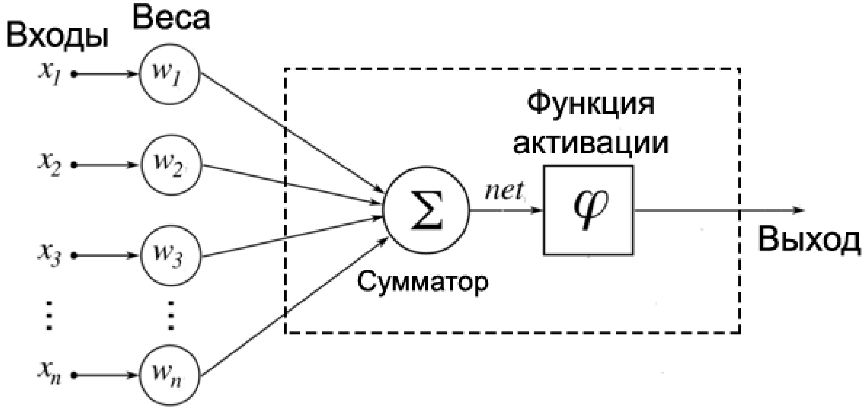
w_i – вагові коефіцієнти синапсів; $i=\overline{1,n}$;

Σ – позначення суматора (в деяких літературних джерелах – *net*);

s – зважена сума вхідних сигналів;

$\varphi(s)$ – порогова функція активації нейрона (*англ.: Activation function*);

y – вихідний сигнал нейрона.



Модель нейрона Мак-Каллока – Піттса

Вхідні сигнали x_i, $i=\overline{1,n}$ – це дані, що надходять з зовнішнього середовища або від інших нейронів.

Діапазони значень вхідних сигналів можуть відрізнятися для різних моделей. Зазвичай значення вхідних сигналів є дискретними (бінарними) і визначаються множинами $\{0,1\}$ або $\{-1,1\}$. У деяких випадках вхідні сигнали можуть набувати будь-яких дійсних значень.

Нейрон отримує вхідні сигнали за допомогою вхідних зв'язків (синапсів) з певними ваговими коефіцієнтами w_i.

Суматор обчислює зважену суму (*net*) вхідних сигналів:

$$s=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i .$$

У деяких випадках до зваженої суми вхідних сигналів додається константа b, що має назву **зміщення** і надає можливість зміщувати функцію активації нейрона $\varphi(s)$ вздовж числової осі відносно точки 0:

$$s=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b .$$

Функція активації нейрона $\varphi(s)$ є нелінійною і може обиратися довільно в залежності від задачі, що розглядається.

Значення цієї функції визначає вихідний сигнал штучного нейрону:

$$y=\varphi(s) .$$

Функції активації, що застосовуються у штучних нейронних мережах, наведені у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Функції активізації нейронів

Назва	Формула	Діапазон значень
Лінійна	$\varphi(s) = ks$	$(-\infty, \infty)$
Напівлінійна	$\varphi(s) = \begin{cases} ks \ \text{при} \ s > 0 \\ 0 \ \text{при} \ s \le 0 \end{cases}$	$(0, \infty)$
Логістична (сигмоїдальна)	$\varphi(s) = \dfrac{1}{1+e^{-as}}$	$(0,1)$
Гіперболічний тангенс (сигмоїдальна)	$\varphi(s) = \dfrac{e^{as} - e^{-as}}{e^{as} + e^{-as}}$	$(-1,1)$
Експоненціальна	$\varphi(s) = e^{-as}$	$(0, \infty)$
Синусоїдальна	$\varphi(s) = \sin(s)$	$(-1,1)$
Сигмоїдальна (раціональна)	$\varphi(s) = \dfrac{s}{a+\lvert s \rvert}$	$(-1,1)$
Крокова (лінійна з насиченням)	$\varphi(s) = \begin{cases} -1 \ \text{при} \ s \le -1 \\ s \ \text{при} \ 1 < s < 1 \\ 1 \ \text{при} \ s \ge 1 \end{cases}$	$(-1,1)$
Одиничного стрибка (порогова)	$\varphi(s) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ s - b < 0 \\ 1 \ \text{при} \ s - b \ge 0 \end{cases}$	$(0,1)$
Модульна	$\varphi(s) = \lvert s \rvert$	$(0, \infty)$
Знакова (сигнатурна)	$\varphi(s) = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ s > 0 \\ -1 \ \text{при} \ s \le 0 \end{cases}$	$(-1,1)$
Квадратична	$\varphi(s) = s^2$	$(0, \infty)$

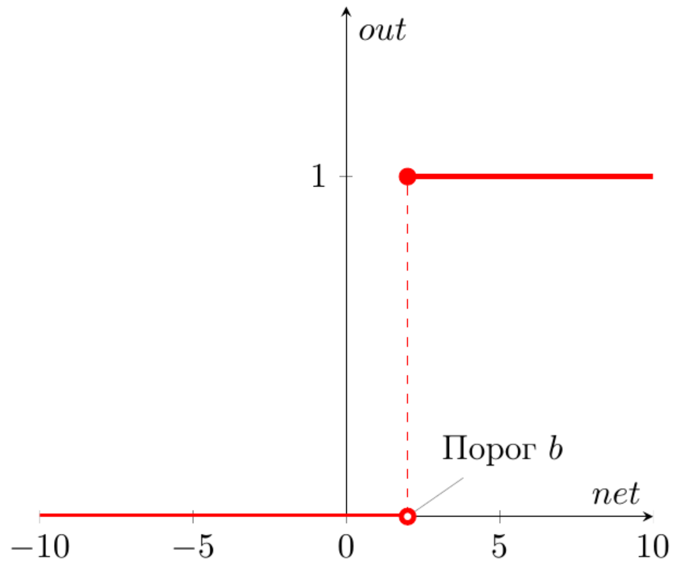
Функція одиничного стрибка є найпростішою функцією активації штучного нейрона.

Вона відбивається формулою:

$$\varphi(s)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; s-b<0 \\ 1 \;\; при \;\; s-b\ge 0\end{cases}.$$

При її застосуванні вихідний сигнал нейрона приймає одне з двох можливих значень:

$$y=0,\ \text{якщо}\ \ s<b;$$
$$y=1,\ \text{якщо}\ \ s\ge b.$$



Найчастіше у штучних нейронних мережах використовується **логістична функція** активації:

$$\varphi(s) = \frac{1}{1+e^{-as}},$$

де a – параметр, який характеризує ступінь крутості функції.

Вважається, що вона більш наближена до реальних процесів, які відбуваються у біологічних нейронах.

На відміну від функції одиничного стрибка логістична функція надає вихідному сигналу штучного нейрону значення в діапазоні від 0 до 1:

$$0 < y < 1.$$

Логістична функція має такі властивості, що роблять її привабливою при побудові штучних нейронних мереж:

- вона є «функцією, що стискає», тобто незалежно від аргументу (зваженої суми вхідних сигналів) вихідний сигнал завжди буде в межах від 0 до 1;
- вона гнучкіша, ніж функція одиничного стрибка, оскільки її значенням може бути будь-яке число між 0 та 1;
- у всіх точках вона має похідну, і ця похідна може бути виражена через цю ж саму функцію:

$$\varphi'(s) = a \cdot \varphi(s)[1-\varphi(s)].$$

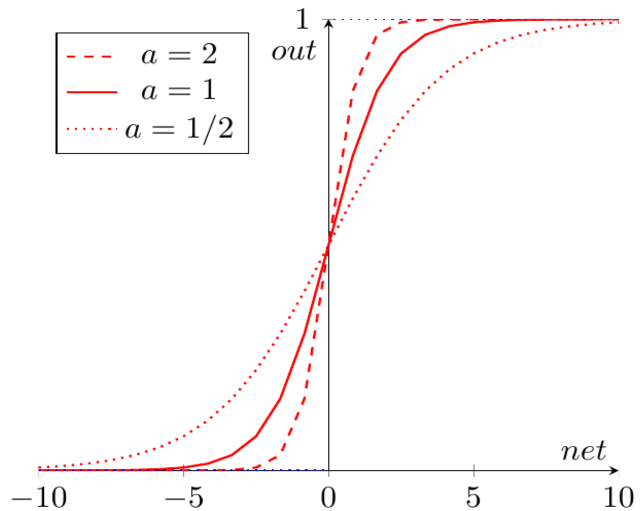
При зменшенні значення параметру a логістична функція стає більш пологою.

При $a = 0$ вироджується у горизонтальну лінію на рівні 0,5.

При збільшенні значення параметру a логістична функція наближається до виду функції одиничного стрибка з порогом 0.

Логістична функція диференційована на всій осі абсцис, що використовується в деяких алгоритмах навчання.

Крім того, вона має властивість підсилювати слабкі сигнали краще, ніж великі, і запобігає насичення від великих сигналів, оскільки вони відповідають областям значень аргументу s, де логістична функція має пологий нахил.



Приклад Виведення рішень на основі штучного нейрону.

Припустимо, ви шукаєте відповідь на питання: їхати на море чи ні.

На шукане рішення впливають такі фактори:

1) вартість поїздки;
2) погода на морі;
3) обстановка на роботі;
4) наявність їдальні на пляжі.

Кожному фактору зіставляється окремий вхід нейрону.

Вхідні сигнали x_i, $i=\overline{1,4}$ оцінюються значеннями 0 або 1.

Наприклад, якщо вартість поїздки вас задовольняє, то $x_1=1$; в іншому випадку $x_1=0$.

Якщо погода на морі хороша, то $x_2=1$; в іншому випадку $x_2=0$.

Якщо обстановка на роботі дозволяє поїздку, то $x_3=1$; в іншому випадку $x_3=0$.

Якщо на пляжі є їдальня, то $x_4=1$; в іншому випадку $x_4=0$.

Кожному входу нейрону зіставлені вагові коефіцієнти w_i, $i=\overline{1,4}$, які характеризують ступень важливості кожного з перелічених факторів для вироблення шуканого рішення.

Нехай вагові коефіцієнти будуть такими:

$$w_1=5; \quad w_2=4, \quad w_3=1, \quad w_4=1.$$

Припустимо, на вхід нейрону надійшли сигнали:

$$x_1=1, \quad x_2=0, \quad x_3=0, \quad x_4=1,$$

які відбивають ситуацію «вартість поїздки задовільна, погода на морі погана, обстановка на роботі не дозволяє поїздку, їдальня на пляжі є».

Зважена сума такого набору вхідних сигналів:

$$s=\sum_{i=1}^{4} w_i x_i = 5\cdot 1+4\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1=6.$$

Нехай функцією активації для даного прикладу буде функція одиничного стрибка з пороговим зміщенням $b=5$:

$$\varphi(s)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ s-5<0\\ 1 \ \text{при} \ s-5\geq 0\end{cases}.$$

Оскільки

$$s-b=6-5=1\geq 0,$$

функція активації приймає значення $\varphi(s)=1$, а нейрон генерує відповідний вихідний сигнал:

$$y=\varphi(s)=1,$$

який визначає рішення «Їхати на море».

Якщо поїздка виявилася би занадто дорогою, погода – поганою, але обстановка з роботою була би нормальною і на пляжі була би їдальня, то вхідні сигнали нейрону були би такими:

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=1, \quad x_4=1.$$

У цьому випадку зважена сума вхідних сигналів дорівнювала би 2, а вихідний сигнал $y=\varphi(s)=0$, що визначає рішення «На море не їхати».

Використання в якості функції активації $\varphi(s)$ логістичної функції або гіперболічного тангенсу наближає ситуацію, що розглядалася у наведеному прикладі, до реальності, оскільки вихідний сигнал нейрону може набувати не тільки бінарні значення (0 або 1), а такі, що належать до відповідних інтервалів числової осі.

Особливо це важливо у випадках, коли суб'єкт прийняття рішення не до кінця впевнений – чи варто їхати?

Наприклад, якщо вихідний сигнал нейрону $y=0{,}8$, це може означати, що їхати все-таки варто, а при $y=0{,}2$ від поїздки слід утриматися.

3. Штучні нейронні мережі

Під штучними нейронними мережами (ШНМ) розуміють обчислювальні структури, які моделюють біологічні процеси, що зазвичай асоціюються з процесами людського мозку.

Вони являють собою розподілені і паралельні системи, здатні до адаптивного навчання шляхом аналізу впливів з боку зовнішнього середовища.

Елементарним перетворювачем в даних мережах є штучний нейрон або просто нейрон, названий так за аналогією з біологічним прототипом.

Штучна нейронна мережа являє собою сукупність нейроподібних елементів (штучних нейронів), певним чином з'єднаних один з одним та з зовнішнім середовищем за допомогою зв'язків, що характеризуються ваговими коефіцієнтами синапсів.

Залежно від міста нейронів в топології нейронної мережі та функцій, які ними виконуються, виділяють три типи нейронів:

- **вхідні нейрони**, які отримують вектор вхідних сигналів з боку зовнішнього середовища (обчислювальні процедури в них зазвичай не здійснюються, а зовнішні сигнали передаються з входу на вихід з необхідним посиленням або ослабленням);
- **вихідні нейрони**, які генерують вихідні сигнали нейронної мережі;
- **проміжні нейрони**, які виконують основні обчислювальні операції, але не входять до складу вхідних і вихідних нейронів.

У загальному випадку штучні нейронні мережі мають шарувату структуру.

Відповідно до типів нейронів розрізняють:

- вхідний шар мережі, до складу якого входять вхідні нейрони;
- вихідний шар мережі, який містить вихідні нейрони;
- проміжні (приховані) шари мережі, утворені проміжними нейронами.

4. Класифікація штучних нейронних мереж

Штучні нейронні мережі прийнято ділити на два великих класи:

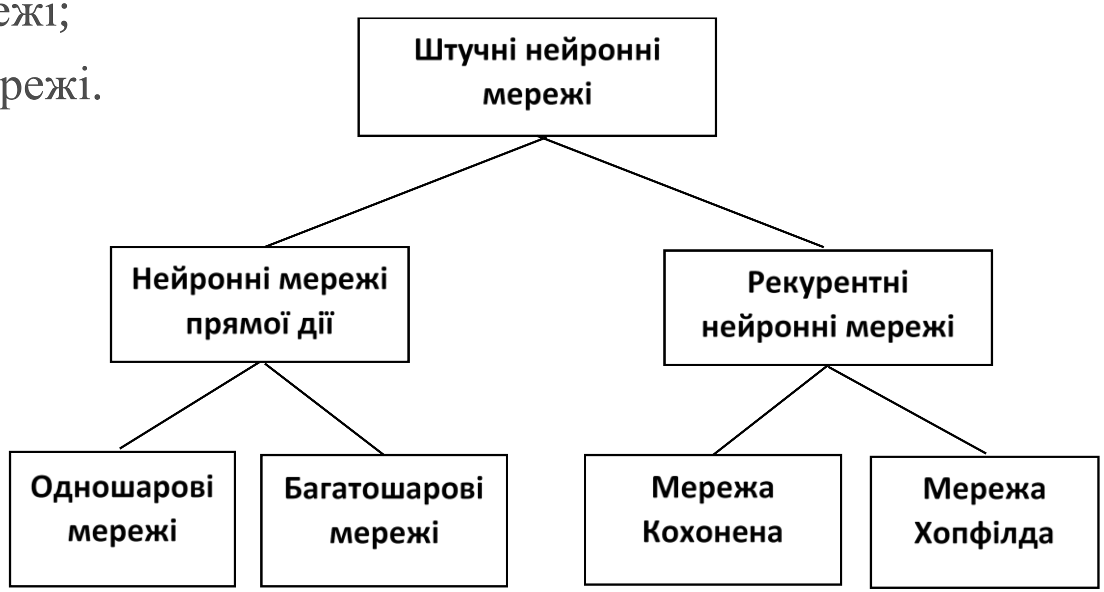
• **мережі прямої дії** або прямого розповсюдження сигналів (*Feedforward neural network, feedforward-мережі*);

• **мережі зі зворотними зв'язками** або рекурентні нейронні мережі (*Recurrent neural network*).

Відмітною особливістю штучних нейронних мереж прямої дії є те, що інформація (сигнали) в них передається лише в один бік: від входу мережі до її виходу.

Серед мереж прямої дії розрізняють:

- одношарові нейронні мережі;
- багатошарові нейронні мережі.

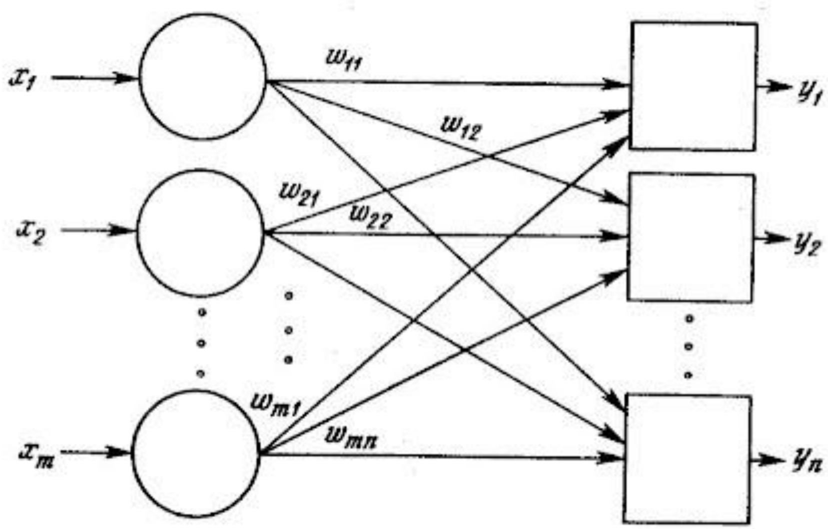


Одношарові нейронні мережі (*Single-layer neural network*) містять єдиний шар нейронів, які приймають і обробляють вхідні сигнали та генерують вихідні сигнали мереж.

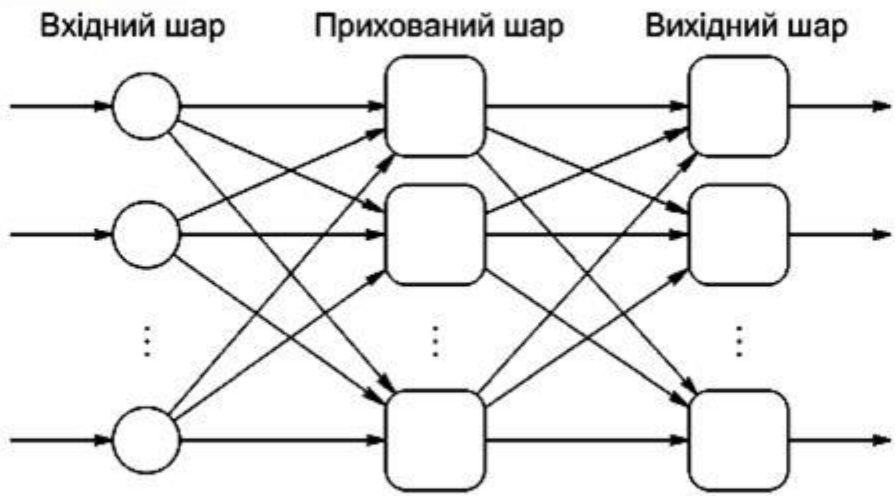
В одношарових нейронних мережах єдиний шар одночасно виконує функції і вхідного, і проміжного, і вихідного шару.

Квадратами позначені нейрони, а колами – вхідні сигнали одношарової нейронної мережі.

.



Багатошарова нейронна мережа (*Multilayer neural network*) – нейронна мережа, яка крім вхідного та вихідного шарів містить один чи декілька розташованих між ними проміжних (прихованих) шарів нейронів.



У багатошарових нейронних мережах нейрони об'єднуються в шари.

Кожен шар містить сукупність нейронів з єдиними вхідними сигналами.

Число нейронів в шарі може бути довільним і не залежить від кількості нейронів в інших шарах.

У загальному випадку вважається, що мережа складається з r шарів, пронумерованих у напрямку проходження сигналів (зазвичай зліва направо).

Вхідний шар часто нумерують як нульовий.

Зовнішні вхідні сигнали подаються на входи нейронів вхідного шару, а виходами мережі є вихідні сигнали останнь r-го шару.

Зв'язки від виходів нейронів деякого q-го шару $(1 \le q \le r-1)$ до входів нейронів наступного $(q+1)$-го шару називаються послідовними.

Вхідний шар приймає вхідні сигнали нейронної мережі, змінюючи при необхідності їх величину, та передає їх у проміжний шар.

У проміжному шарі здійснюються необхідні обчислення, результати яких передаються у наступний проміжний шар або (якщо проміжний шар є останнім) – у вихідний шар.

Вихідний шар формує вихідні сигнали нейронної мережі, які подаються у зовнішнє середовище.

Вихідними сигналами нейронної мережі прямої дії можуть бути всі або деякі вихідні сигнали нейронів вихідного шару.

Рекурентні нейронні мережі (мережі із зворотними зв'язками) відрізняються тим, що в них вихідний сигнал нейрону, розташованого у q-у шарі $(q>1)$, може подаватися:

- на його власний вхід;
- на входи інших нейронів цього ж шару;
- на входи попередніх шарів нейронної мережі.

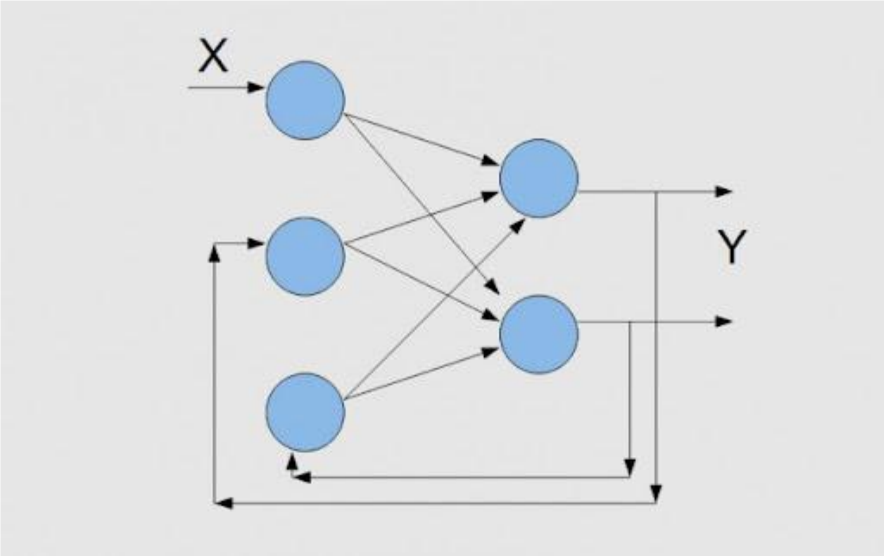
Іншими словами, в рекурентних нейронних мережах допускається розповсюдження сигналів у зворотному напрямі: від виходів до входів

В рекурентних нейронних мережах вихідний сигнал нейрону визначається не тільки вхідним сигналом, але й його попередніми вихідними сигналами.

Подібні нейронні мережі дозволяють відновлювати і доповнювати вхідні сигнали, що властиво короткочасній пам'яті людини.

Вихідними сигналами рекурентної мережі можуть бути всі або деякі вихідні сигнали нейронів вихідного шару після кількох тактів функціонування мережі.

Уніфікованої структури рекурентних нейронних мереж не існує внаслідок нескінченного різноманіття можливих зв'язків між елементами кожної з них. Відомі лише окремі мережі зі зворотними зв'язками (мережа Кохонена, мережа Хопфілда тощо), які будуть розглянуті у подальшому.



5. Перцептрони

Найбільш розповсюдженим класом нейронних мереж прямої дії є перцептрони.

Перцептрон або **персептрон** (*англ. Perceptron від лат. perceptio – сприйняття; нім. Perzeptron*) – математична або комп'ютерна модель сприйняття інформації мозком (кібернетична модель мозку), запропонована Френком Розенблаттом в 1957 році і вперше реалізована у вигляді електронної обчислювальної машини «Марк-1» в 1960 році.

Перцептрон став однією з перших моделей нейромереж, а «Марк-1» – першим у світі нейрокомп'ютером.

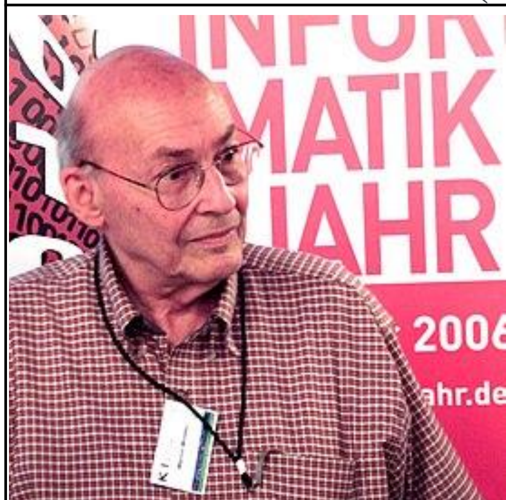
<table>
<tr><td colspan="2">Френк Розенблатт (Frank Rosenblatt)
(1928 – 1971)</td></tr>
<tr><td></td><td>Відомий американський учений у галузі психології, нейрофізіології і штучного інтелекту.
Народився в Нью-Йорку.
Закінчив Принстонський університет.
В 1958-1960 роках в Корнельському університеті створив обчислювальну систему «Марк-1», яку вважають першим у світі нейрокомп'ютером.</td></tr>
</table>

Перцептрон – нейронна мережа, що складається з множини елементів (штучних нейронів) трьох типів:

1) датчиків (сенсорів, рецепторів – S-елементів);
2) асоціативних елементів (A-елементів);
3) реагуючих елементів (R-елементів).

Сигнали, що надходять від датчиків, передаються асоціативним елементам, а потім елементам реагування.

Перцептрони дозволяють створити набір «асоціацій» між вхідними стимулами та необхідною реакцією на виході. У біологічному плані це відповідає перетворенню, наприклад, зорової інформації на фізіологічну відповідь від рухових нейронів

Марвін Лі Мінський (*Marvin Lee Minsky*) (1927 – 2016)	
	Американський дослідник в галузі штучного інтелекту, співзасновник лабораторії штучного інтелекту Массачусетського Технологічного Інституту. Автор праць з штучного інтелекту та філософії. Доктор філософії. Член Національної академії наук США, Американської академії мистецтв і наук, Національної інженерної академії США, Асоціації з розвитку штучного інтелекту.

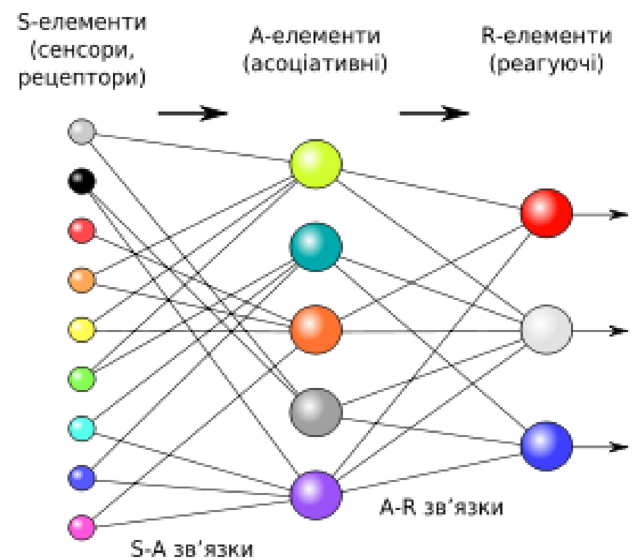


Схема перцептрону

Відповідно до сучасної термінології перцептрони можуть бути класифіковані як штучні нейронні мережі з такими характеристиками:

- поширення сигналу – пряме;
- прихований шар – один;
- функції активації – порогові.

Терміни та визначення:

Простий *S*-елемент (сенсорний) – нейрон (чутливий елемент), який під впливом якогось із видів енергії (наприклад, світла, звуку, тиску, тепла тощо) виробляє сигнал.

Множина *S*-елементів утворює шар сенсорів чи рецепторів. У фізичному втіленні вони відповідають, наприклад, світлочутливим клітинам сітківки ока або фоторезисторам матриці камери.

Кожен рецептор може бути в одному з двох станів – спокою або збудження.

У стані збудження він передає одиничний сигнал у наступний шар, тобто асоціативним елементам.

Якщо вхідний сигнал *S*-елементу перевищує деякий поріг θ, на його виході з’являється вихідний сигнал +1, інакше – сигнал 0.

Ваги *(S-A)*-зв'язків (тобто зв'язків, що йдуть від -елементів до *A*-елементів) можуть мати значення з множини {-1,0,1}.

Простий A**-елемент** (асоціативний) – нейрон (логічний вирішальний елемент).

Множина A-елементів утворює проміжний шар перцептрону.

A-елементи називають асоціативними, тому що кожному такому елементу зазвичай відповідає певний набір (асоціація) S-елементів.

A-елемент активізується, як тільки кількість сигналів від S-елементів на його вході перевищує деяку величину θ.

Сигнали від A-елементів, що збудилися, у свою чергу, передаються в суматор R, причому сигнал x_i від i-го асоціативного елемента передається з коефіцієнтом w_i, який має назву ваги $(A-R)$-зв’язку (тобто зв'язку, що йде від A-елемента до R-елемента).

A-елемент видає вихідний сигнал +1, коли алгебраїчна сума його вхідних сигналів перевищує деяку порогову величину θ; в іншому випадку його вихідний сигнал дорівнює 0.

Ваги $(A-R)$-зв'язків можуть бути довільними.

Простий R-**елемент** (такий, що реагує, тобто діє) – нейрон, який обчислює та видає вихідний сигнал перцептрону.

Множина R-елементів утворює вихідний шар перцептрону.

R-елемент підраховує суму значень вхідних сигналів, помножених на ваги $(A-R)$-зв'язків, і генерує вихідний сигнал перцептрона:

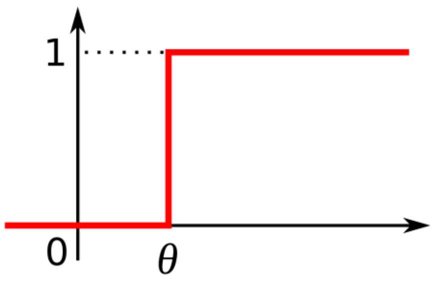
$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо} \ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i > \theta \\ -1, \ \textit{якщо} \ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le \theta \end{cases}.$$

R-елемент видає сигнал $+1$, якщо сума його вхідних сигналів є строго додатною, і сигнал -1, якщо сума його вхідних сигналів є суворо від'ємною.

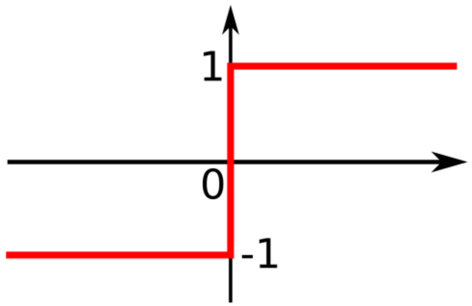
Якщо сума вхідних сигналів R-елементу дорівнює нулю, вихід вважається або рівним нулю або невизначеним.

Якщо на виході будь-якого S-, A- або R-елемента з'являється сигнал $+1$, то кажуть, що елемент є **активним** або **збудженим**.

Усі розглянуті елементи називаються простими, оскільки вони реалізують стрибкоподібні функції активації.



Порогова функція активації, що реалізується простими S- та A-елементами



Порогова функція активації, що реалізується простим R-елементом

Простий перцептрон – штучна нейронна мережа (система), яка задовольняє таким п'яти умовам:

1) у системі є лише один R-елемент (пов'язаний з усіма A-елементами);

2) система являє собою мережу з послідовними зв'язками, що йдуть тільки від S-елементів до A-елементів та від A-елементів до R-елементів;

3) ваги всіх $(S-A)$-зв'язків незмінні;

4) час передачі сигналу по кожному зв'язку дорівнює або нулю, або деякій сталій величині;

5) значення активуючих функцій S-, A- та R-елементів визначаються зваженою алгебраїчною сумою всіх сигналів, що одночасно надходять на вхід елемента.

Елементарний перцептрон – простий перцептрон, у якого всі елементи прості.

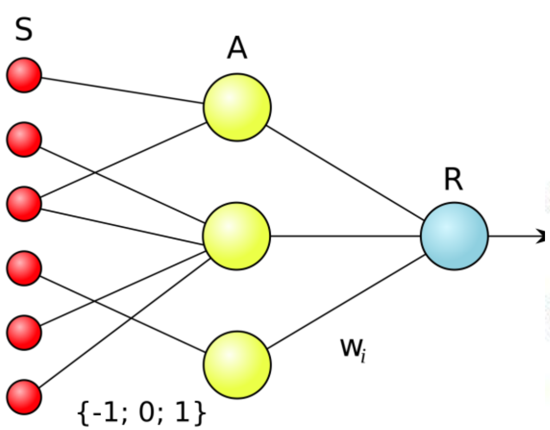


Схема елементарного перцептрона

Перцептрон описується змінною **матрицею взаємодії** W, елементами якої є вагові коефіцієнти зв'язків між S-, A- та R-елементами:

$$W = \|w_{ij}\| ,$$

де w_{ij} – вага зв'язку між i-м та j-м елементами перцептрона; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

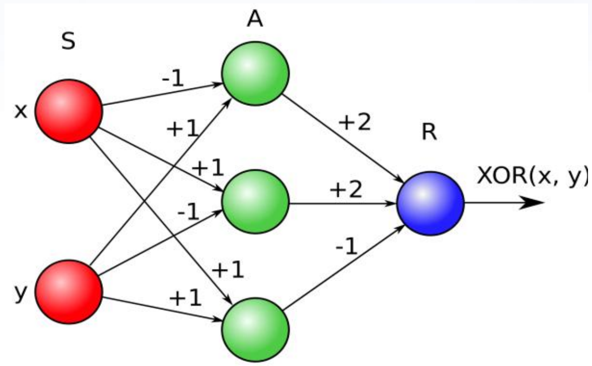
Для кожного поточного стану перцептрона вагові коефіцієнти w_{ij} визначаються послідовністю минулих станів активності мережі.

Приклад опису перцептрона, який реалізує логічну операцію XOR.

Операція XOR (виключна диз'юнкція, вирахування за модулем 2) – логічна бітова операція, логічна функція, яка набуває значення «істина» тоді й лише тоді, коли значення «істина» має суто один з її операндів (позначається символом ⊕):

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Перцептрон, який реалізує логічну операцію XOR, має таку структуру:

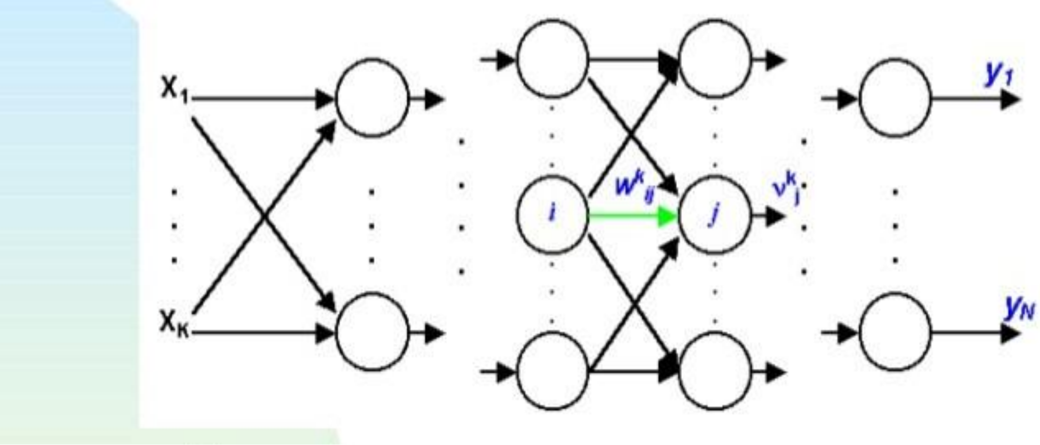


Матриця взаємодії такого перцептрону для деякого стану:

	a_1	a_1	a_1	r
s_1	-1	1	1	0
s_2	1	-1	1	0
a_1	0	0	0	2
a_2	0	0	0	2
a_3	0	0	0	-1

В численних літературних джерелах елементарні перцептрони прийнято називати одношаровими, хоча фактично до їх складу входять три шари: вхідний (S), проміжний (A) та вихідний (R).

Схема багатошарового перцептрона



Позначення:

$x_1, \ldots, x_m$ – вхідні сигнали багатошарового перцептрона;

$w_{ij}^{(k)}$ – ваговий коефіцієнт зв'язку між i-м нейроном $(k-1)$-го шару та j-м нейроном k-го шару перцептрона;

$v_j^{(k)}$ – вихідний сигнал j-го нейрона k-го шару перцептрона;

$y_1, \ldots, y_n$ – вихідні сигнали багатошарового перцептрона.

6. Навчання перцептронів

Метою навчання штучної нейронної мережі є отримання «правильного» вихідного сигналу у відповідь на будь-який набір вхідних сигналів.

Навчання штучної нейронної мережі спрямоване на зменшення різниці між бажаними (еталонними) та отримуваними векторами її вихідних сигналів.

Засобом навчання штучної нейронної мережі є налаштування (коригування) вагових коефіцієнтів її зв'язків та порогів функцій активації.

Такий підхід до терміну «навчання нейронної мережі» відповідає біологічним нейромережам. Мозок людини складається з величезної кількості пов'язаних один з одним нейромереж. Кожна окремо складається з нейронів одного типу (функція активації однакова). Людина навчається завдяки зміні синапсів – елементів, які посилюють або послаблюють вхідні сигнали.

Навчання (*Training*) штучної нейронної мережі полягає у встановленні такого набору вагових коефіцієнтів її зв'язків, при якому вхідні сигнали після проходу мережею перетворюється на «правильний» (чи достатньо наближений до нього) вихідний сигнал.

Існують два підходи до навчання штучних нейронних мереж:

- навчання «з учителем»;
- навчання «без вчителя».

При навчанні **з учителем** передбачається, що існує зовнішнє середовище, яке на етапі навчання:

• надає мережі навчальні приклади (значення входів і відповідні їм значення виходів);

• оцінює правильність функціонування нейронної мережі за своїми критеріями;

• змінює стан нейронної мережі або заохочує (карає) нейронну мережу, запускаючи тим самим механізм зміни її стану.

Під **станом нейронної мережі** зазвичай розуміють ваги синапсів та пороги функцій активізації нейронів.

Навчання з учителем (*Supervised learning*) – вид навчання мережі, у якому її ваги змінюються так, щоб відповіді мережі мінімально відрізнялися від вже готових правильних відповідей.

Суть даного підходу полягає в тому, що на вхід мережі подається певний вхідний сигнал, а отримана відповідь порівнюється з готовою, правильною (еталонною) відповіддю.

Потім за допомогою спеціальних алгоритмів змінюються ваги зв'язків нейронної мережі, після чого на її вхід знову подається вхідний сигнал.

Отримана відповідь знову порівнюється з правильною і т. д.

Цей процес повторюється доти, доки мережа не почне відповідати з прийнятною точністю.

Правильні відповіді визначаються заздалегідь на основі попереднього досвіду розв’язання задачі, що розглядається.

Роль вчителя виконує спеціальна комп’ютерна програма.

Для реалізації алгоритмів навчання створюються так звані навчальні вибірки.

Навчальна вибірка (*Training set*) – кінцевий набір вхідних сигналів (іноді разом із правильними вихідними сигналами), за якими відбувається навчання перцептрону.

Навчальна вибірка – це колекція задач із готовими відповідями, на якій і тренують мережу.

Навчання без вчителя (*Unsupervised learning*) застосовують тоді, коли «правильні» відповіді на вхідні сигнали невідомі.

У цьому випадку вся навчальна вибірка складається з набору суто вхідних сигналів.

При такому «навчанні» мережа здатна самостійно виділяти класи сигналів, що подаються на її вхід, тобто здійснювати кластеризацію вхідних сигналів.

Правильні (еталонні) вихідні сигнали при цьому не демонструються.Для реалізації алгоритмів навчання створюються так звані навчальні вибірки.

Навчальна вибірка (*Training set*) – кінцевий набір вхідних сигналів (іноді разом із правильними вихідними сигналами), за якими відбувається навчання перцептрону.

Навчальна вибірка – це колекція задач із готовими відповідями, на якій і тренують мережу.

Навчання елементарного перцептрону «з учителем»

Метою навчання **перцептрону** є отримання «правільного» вихідного сигналу y у відповідь на будь яку можливу комбінацію вхідних сигналів x_i; $i=\overline{1,n}$.

Навчання елементарного перцептрону полягає у зміні вагових коефіцієнтів $(A-R)$-зв'язків: w_i, $i=\overline{1,m}$.

Вагові коефіцієнти $(S-A)$-зв'язків, які можуть приймати значення з множини $\{-1,0,1\}$, а також значення порогів функцій активації A-елементів вибираються випадковим чином на самому початку процедури навчання і потім не змінюються.

Класичним методом навчання перцептрону з учителем є **метод корекції помилки**, згідно якому вага зв'язку не змінюється до тих пір, поки поточна реакція перцептрона залишається правильною.

При появі неправильної реакції вага змінюється на одиницю, а знак такої зміни ($+$ або $-$) обирається протилежним від знаку помилки.

Приклад елементарного перцептрону, призначеного для розв'язання задачі розпізнавання об'єктів.

Нехай Q – один з об'єктів, що пред'являються на вхід перцептрону для розпізнавання.

Можливі такі варіанти висновків перцептрону:

1) пред'явлений об'єкт Q і перцептрон його ідентифікував;

2) пред'явлений інший об'єкт (не Q) і перцептрон його не ідентифікував як Q;

3) пред'явлений об'єкт Q, але перцептрон його не ідентифікував як Q;

4) пред'явлений інший об'єкт (не Q), але перцептрон його ідентифікував як Q.

У перших двох випадках перцептрон надав правильну відповідь, отже у коригуванні вагових коефіцієнтів немає необхідності.

У третьому випадку (коли перцептрон не розпізнав об'єкт Q) необхідно збільшити вагові коефіцієнти всіх $(A-R)$-зв'язків, через які пройшов сигнал.

У четвертому випадку (коли перцептрон ідентифікував інший об'єкт як Q) необхідно, навпаки, зменшити вагові коефіцієнти всіх $(A-R)$-зв'язків, через які пройшов сигнал.

Припустимо, ми хочемо навчити перцептрон розділяти два класи об'єктів так, щоб при пред'явленні об'єктів першого класу вихід перцептрона був додатним $(+1)$, а при пред'явленні об'єктів другого класу – від'ємним (-1).

Алгоритм рішення

1) Випадково вибираються пороги для A-елементів та встановлюються $(S-A)$-зв'язки (далі вони не змінюватимуться).

2) Початкові вагові коефіцієнти вважаються рівними нулю:

$$w_i = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

3) Перцептрону пред'являється навчальна вибірка: об'єкти (наприклад, кола або квадрати) із зазначенням класу, до якого вони належать.

4) Пред'являється об'єкт першого класу.

При цьому деякі A-елементи збудяться.

Нехай I^A – множина номерів таких елементів.

Коефіцієнти w_i, $i \in I^A$, що відповідають цим збудженим елементам, збільшуємо на 1.

5) Пред'являється об'єкт другого класу.

Коефіцієнти w_i, $i \in I^A$ тих A-елементів, які при цьому збудилися, зменшуємо на 1.

Пункти 4 та 5 наведеного алгоритму виконуються для всієї навчальної вибірки.

В результаті навчання сформуються значення вагових коефіцієнтів $(A-R)$-зв'язків перцептрона w_i, $i = \overline{1,m}$.

Після навчання перцептрон готовий працювати у режимі розпізнавання чи узагальнення. У цьому режимі перцептрону пред'являються раніше невідомі йому об'єкти, і перцептрон повинен встановити, до якого класу вони належать.

Робота перцептрону полягає в наступному: при пред'явленні нового об'єкта A-елементи, що збудилися, передають сигнал R-елементу, рівний сумі відповідних коефіцієнтів w_i, $i \in I^A$.

Якщо ця сума додатна, то приймається рішення, що цей об'єкт належить до першого класу; якщо вона від'ємна – до другого.

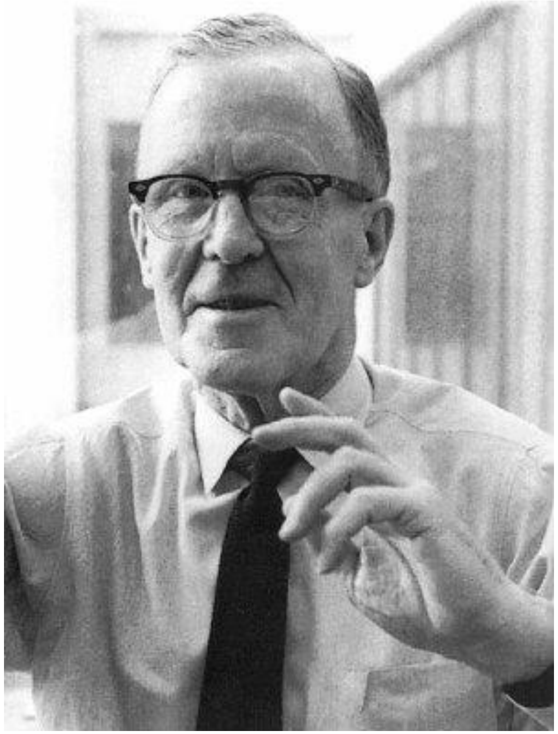
Теорема збіжності елементарного перцептрону (доведена Ф.Розенблаттом за участю інших дослідників, які працювали разом з ним), свідчить, що елементарний перцептрон, навчений за таким алгоритмом, незалежно від початкового стану вагових коефіцієнтів і послідовності появи стимулів завжди приводить до досягнення рішення за скінченний проміжок часу.

Навчання елементарного перцептрону «без вчителя»

В основу методів навчання елементарного перцептрону без вчителя покладені ідеї Д.Хебба про навчання, які можна сформулювати у вигляді двох таких правил (*Hebb's rule, Hebbian learning rule*):

1) Якщо два нейрони з обох боків синапсу (з'єднання) активізуються одночасно (тобто синхронно), то міцність цього з'єднання зростає.

2) Якщо два нейрони з обох боків синапсу активізуються асинхронно, то такий синапс послаблюється або взагалі відмирає.

<table>
<tr><td colspan="2">Дональд Олдінг Хебб (Donald Olding Hebb)
(1904 – 1985)</td></tr>
<tr><td></td><td>Канадський фізіолог і нейропсихолог.

Доктор філософії. Відомий роботами, які призвели до розуміння значення нейронів для процесу навчання.

Його також називають одним із творців теорії штучних нейронних мереж, так як він запропонував перший працюючий алгоритм навчання штучних нейронних мереж.

Член Лондонського королівського товариства (1966), іноземний член Національної академії наук США (1979).</td></tr>
</table>

Для елементарних перцептронів, в яких вхідні і вихідні сигнали можуть приймати значення 0 або 1, правила Д.Хебба можна перефразувати таким чином:

1) Якщо сигнал персептрона невірний і дорівнює 0, необхідно збільшити ваги тих входів, на які була подана одиниця.

2) Якщо сигнал персептрона невірний і дорівнює 1, необхідно зменшити ваги тих входів, на які була подана одиниця.

Алгоритми навчання перцептронів ґрунтуються на понятті системи підкріплення (*термін введений Ф.Розенблаттом*).

Система підкріплення – це набір правил, на підставі яких можна змінювати з плином часу матрицю взаємодії W (або стан пам'яті) нейронної мережі.

Для навчання перцептрону без вчителя застосовується метод, заснований на так званій **альфа-системі підкріплення**.

Згідно цьому методу на кожному кроці алгоритму вагові коефіцієнти всіх активних $(A-R)$-зв'язків перцептрона w_i, $i \in I^A$ змінюються на однакову величину r, а ваги $(A-R)$-зв'язків, які не є активними, залишаються без змін.

В результаті навчання без вчителя елементарний перцептрон в процесі функціонування набуває здатність своїми вихідними сигналами визначати класи об'єктів, що описуються його вхідними сигналами.

7. Навчання багатошарових нейронних мереж

Для навчання багатошарових перцептронів з учителем найчастіше використовується **метод зворотного поширення помилки**.

Згідно цього методу на виході багатошарового перцептрону обчислюється сигнал помилки, який потім послідовно подається на входи кожного шару мережі для коригування вагових коефіцієнтів.

Алгоритми навчання багатошарових перцептронів базуються на так званому **дельта-правилі** (дельта-системі підкріплення), яке є узагальненням і розповсюдженням правил Д.Хебба на випадок, коли значення вхідних сигналів нейронів можуть бути довільними (не тільки рівними 0 або 1).

Суть дельта-правила (*Delta rule*) полягає у наступному.

Нехай d – правильний (еталонний) вихідний сигнал нейронної мережі, а y – фактичний вихідний сигнал.

Помилка (похибка) мережі обчислюється як різниця правильної та реальної відповіді:

$$\delta = d - y\,.$$

Відомо, що вирішальну роль у перетворенні сигналу у нейронній мережі відіграють зв'язки між нейронами. Отже, при отриманні неправильного вихідного сигналу необхідно змінювати вагові коефіцієнти цих зв'язків.

Позначимо через $(i \to j)$ зв'язок, який йде від i-го нейрону до j-го.

Згідно дельта-правилу нове значення вагового коефіцієнта $(i \to j)$-зв'язку на $(k+1)$-у кроці алгоритму навчання розраховується за такою формулою:

$$w_{ij}(k+1) = w_{ij}(k) + \lambda \cdot \delta \cdot x_i,$$

де $w_{ij}(k)$ – значення вагового коефіцієнт $(i \to j)$-зв'язку на попередньому k-у кроці алгоритму навчання нейронній мережі;

x_i – вхідний сигнал, що пройшов по $(i \to j)$-зв'язку;

λ – коефіцієнт швидкості навчання (за змістом співпадає з довжиною кроку приросту аргументів в градієнтному методі безумовної мінімізації нелінійних функцій багатьох змінних).

Зміст наведеної формули такий.

Якщо нейронна мережа відповіла правильно, то очікуваний і реальний результати співпадають.

У цьому випадку $d = y$, отже і добавка до ваги $(i \to j)$-зв'язку буде дорівнювати нулю:

$$\delta = 0.$$

Тобто, вага $w_{ij}(k)$ не змінюється.

Якщо відповідь мережі неправильна і $d > y$, то значення добавки до ваги буде додатне:

$$\delta > 0.$$

У цьому випадку вага $(i \to j)$-зв'язку $w_{ij}(k)$ збільшиться (1-е правило Д.Хебба).

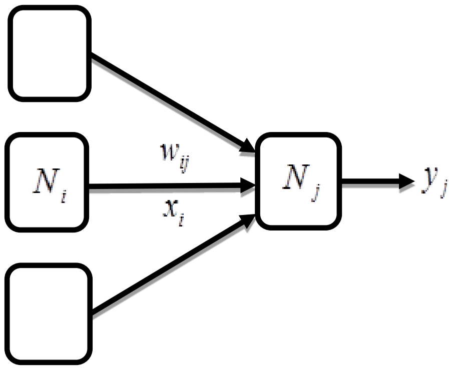
Якщо відповідь мережі неправильна, але $d < y$, то значення добавки до ваги буде від'ємне:

$$\delta < 0.$$

і вага $(i \to j)$-зв'язку $w_{ij}(k)$ зменшиться (2-е правило Д.Хебба).

Чим сильніший сигнал надійшов на вхід нейрону, тим сильніше зміниться вага, пов'язана із цим входом.

Якщо на вхід взагалі не надійшло сигналу $(x_i = 0)$, то й відповідна вага не повинна змінитися (добавка дорівнюватиме 0).



Зв'язок між нейронами N_i та N_j

Для представлення **методу зворотного поширення помилки** у загальному випадку введемо такі позначення:

m – кількість входів багатошарового перцептрону;

n – кількість нейронів, що входять до його складу;

$x = (x_i \mid i = \overline{1,m})$ – вектор вхідних сигналів;

$d = (d_j \mid j = \overline{1,n})$ – вектор еталонних сигналів, які повинні бути отримані від перцептрона під впливом вхідного вектору $x = (x_i \mid i = \overline{1,m})$;

$y = (y_j \mid j = \overline{1,n})$ – отриманий вектор фактичних значень вихідних сигналів перцептрона;

$e = (e_j \mid j = \overline{1,n})$ – вектор помилок, компоненти якого визначаються як різниця між очікуваними і реальними значенням вихідного сигналу нейрону перцептрона:

$$e_j = d_j - y_j; \quad j = \overline{1,n};$$

$w = (w_{ij} \mid i \in I_j^{BX}; j = \overline{1,n})$ – вектор вагових коефіцієнтів зв'язків між нейронами перцептрона;

I_j^{BX} – множина номерів нейронів, від яких j-й нейрон приймає вхідні сигнали (множина номерів нейронів, які в мережі передують j-у нейрону); $j = \overline{1,n}$;

k – номер поточної ітерації алгоритму навчання багатошарового перцептрону;

λ – коефіцієнт швидкості навчання.

Метод зворотного поширення помилки спрямований на мінімізацію **функції середньоквадратичної помилки**:

$$p(y) = \frac{1}{2}\sum_{j-1}^{n}(d_j - y_j)^2 \to \min . \qquad (3.1)$$

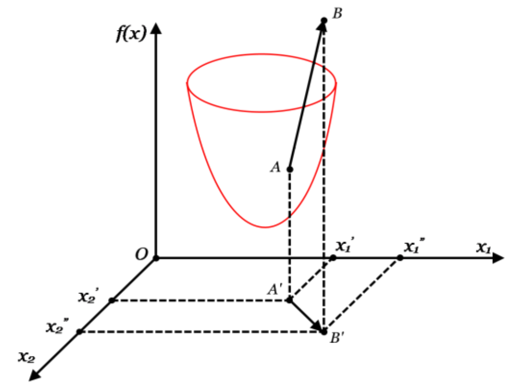
З формули (3.1) видно, що поверхня, яка описується функцією $p(y)$, має форму параболоїди.

Задачею навчання багатошарового перцептрону є знаходження глобального мінімуму цієї поверхні.

Для цього зазвичай застосовується відомий метод градієнтного спуску, призначений для безумовної мінімізації нелінійних функцій багатьох змінних.

Градієнтом (від лат. *gradiens* – крокуючий, зростаючий) будь-якої нелінійної функції (у даному випадку – функції $p(y)$) називають вектор-стовпець $\nabla p(y)$, компонентами якого є часткові похідні даної функції по кожній координаті вектору аргументів $y = (y_j \mid j = \overline{1,n})$ в n-вимірному евклідовому просторі E^n:

$$\nabla p(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p(y)}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial p(y)}{\partial y_2} \\ \dots \\ \dfrac{\partial p(y)}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$



Градієнт $\nabla p(y^*)$, обчислений в деякій точці $y^* \in E^n$, вказує напрямок найбільшого зростання функції $p(y)$ із цієї точки.

8. Нейронні мережі Кохонена

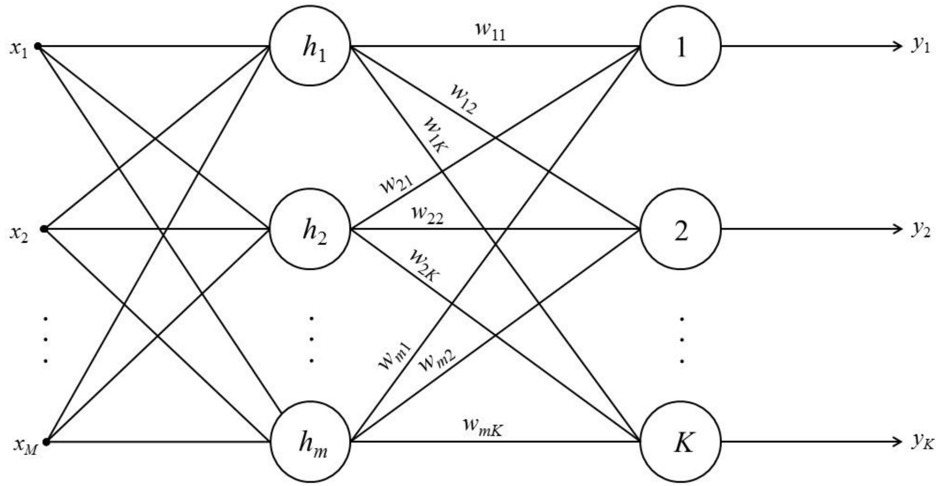
Штучні нейронні мережі Кохонена призначені для розв'язання задач кластеризації, тобто визначення класу, до якого належать об'єкти, опис яких подається на вхід мережі.

Нейронна мережа Кохонена складається з двох шарів:

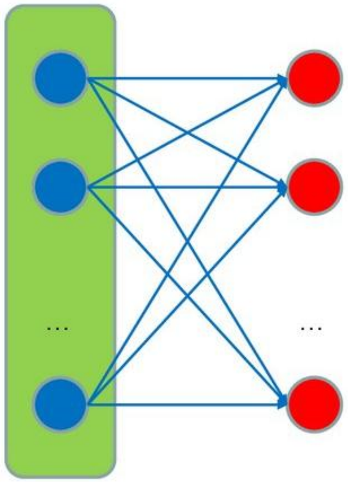
- вхідного шару (шару рецепторів);
- кластерного шару (шару Кохонена – класифікатора).

На рис синім кольором позначені нейрони вхідного шару, червоним – нейрони кластерного шару.

Основним елементом нейронної мережі є так званий **шар Кохонена**, який складається з адаптивних лінійних суматорів («лінійних формальних нейронів»).



Структура мережі Кохонена



Шари мережі Кохонена

Позначення:

M – кількість вхідних каналів мережі (кількість ознак, що характеризують об'єкт дослідження; кількість елементів вектору вхідних сигналів);

K – кількість нейронів у шарі Кохонена (тобто кількості кластерів; кількість елементів вектору вихідних сигналів);

x_i – вхідні сигнали мережі; $i = \overline{1, M}$;

h_i – номери нейронів шару рецепторів; $i = \overline{1, M}$;

w_{ij} – вагові коефіцієнти зв'язків між нейронами-рецепторами та нейронами кластерного шару; $i = \overline{1, M}$; $j = \overline{1, K}$;

y_j – вихідні сигнали мережі; $j = \overline{1, K}$.

Числами натурального ряду від 1 до K позначені номери нейронів шару Кохонена.

Сигнали в мережі Кохонена поширюються від входів до виходів системи у прямому напрямі.

Елементами вектору **вхідних сигналів** $(x_i \mid i = \overline{1, M})$ є дійсні числа, які відбивають ознаки, що характеризують об'єкти класифікації.

Кількість вхідних змінних нейронної мережі M дорівнює числу ознак, що характеризують об'єкт дослідження та на основі яких відбувається віднесення його до того чи іншого класу.

Вхідний шар здійснює **нормалізацію** вхідних сигналів, тобто приведення їх значень до діапазонів [–1, 1] або [0, 1] шляхом поділу на максимальне значення.

Кількість зв'язків між нейронами (вагових коефіцієнтів) мережі Кохонена визначається як добуток:

$$N_w = M \cdot K .$$

На початковому етапі значення вагових коефіцієнтів w_{ij} встановлюються такими:

▪ при нормалізації вхідних сигналів в межах [–1, 1]:

$$\left| w_{ij} \right| \le \frac{1}{\sqrt{M}} ;$$

▪ при нормалізації вхідних сигналів в межах [0, 1]:

$$0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{M}} \le w_{ij} \le 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{M}} ;$$

$$i = \overline{1, M}; \quad j = \overline{1, K} .$$

У подальшому (в процесі навчання нейронної мережі) вони підлягають коригуванню.

Вектор **вихідних сигналів** $(y_j \mid j = \overline{1, K})$ мережі Кохонена визначає клас (**кластер**), якому належить об'єкт класифікації.

Кількість нейронів вихідного шару дорівнює кількості кластерів, серед яких відбувається розподіл об'єктів, що підлягають класифікації.

Вихідні сигнали шару Кохонена формуються за правилом «переможець забирає все».

Для цього обчислюються евклідові відстані R_j між вхідним вектором $(\tilde{x}_i \mid i = \overline{1, M})$ та центрами всіх кластерів:

$$R_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} (\tilde{x}_i - w_{ij})^2}\,; \quad j = \overline{1, K}, \tag{3.8}$$

де $\tilde{x}_i$ – нормоване значення i-го компонента вектору вхідних сигналів.

Вихідному сигналу y_{j^*} привласнюється значення 1, якщо:

$$R_{j^*} = \min\{R_j;\ j = \overline{1, K}\}.$$

Решті вихідних сигналів привласнюються значення 0.

Номер j^* вихідного сигналу $y_{j^*} = 1$ визначає номер кластеру, до якого належить вхідний об'єкт.

Алгоритм самонавчання мережі Кохонена передбачає такі дії.

1. Визначення структури мережі (кількості нейронів шару Кохонена).

2. Генерація випадкових значень вагових коефіцієнтів w_{ij} зв'язків мережі з урахуванням наведених вище обмежень.

3. Подання на входи мережі випадкового навчального прикладу та розрахунок евклідових відстаней R_j між вхідним вектором $(\tilde{x}_i \mid i=\overline{1, M})$ та центрами всіх кластерів за формулою (2.16).

4. За найменшим значенням R_j вибирається j-й нейрон-переможець, який визначає кластер, найбільш близький до вхідного вектору.

Для вибраного нейрона (і тільки для нього) виконується корекція вагових коефіцієнтів:

$$w_{ij}^{(q+1)} = w_{ij}^{(q)} + \lambda(\tilde{x}_i - w_{ij}^{(q)}), \tag{3.9}$$

де q – номер ітерації алгоритму;

λ – коефіцієнт швидкості навчання.

Коефіцієнт швидкості навчання може задаватися постійним значенням в межах діапазону (0, 1] або змінним значенням, що поступово зменшується від етапу до етапу.

Пункти 3 та 4 повторюються у циклі до виконання однієї з умов завершення обчислювального процесу:

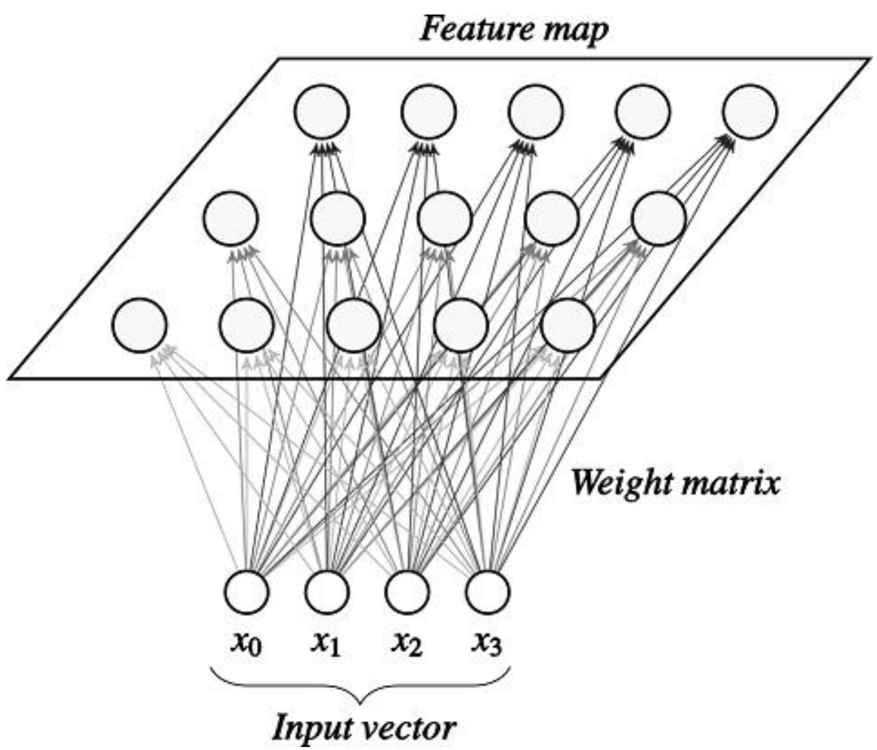
– вичерпано задану граничну кількість етапів навчання;

– не відбулося значної зміни вагових коефіцієнтів у межах заданої точності протягом останнього етапу навчання;

– вичерпано заданий граничний фізичний час навчання.

В результаті самонавчання (самоорганізації) мережі Кохонена утворюється набір кластерів, кожен з яких характеризується своїм центром (значеннями вагових коефіцієнтів відповідного нейрона) та кількістю навчальних прикладів, що його сформували.

Обчислення евклідових відстаней між центрами всіх можливих пар кластерів надає можливість графічно зобразити їх на так званій **карті Кохонена** – двовимірній графічній фігурі, що дозволяє наочно судити не лише про розміри та положення кожного окремо взятого кластера, а й про їх близькість один до одного та взаємне розташування.



Карта Кохонена

9. Нейронні мережі Хопфілда

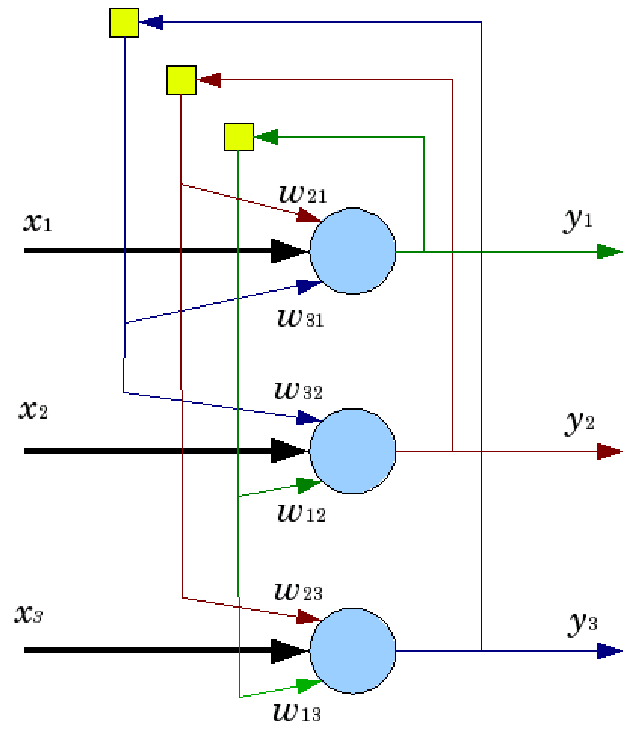
Штучні нейронні мережі Хопфілда належать до класу рекурентних мереж, тобто мереж зі зворотними зв’язками між нейронами.

Мережі Хопфілда використовуються для розв’язання задач розпізнавання та відновлення пошкоджених зображень і текстів («образів»), а також деяких найпростіших задач комбінаторної оптимізації.

Крім того, мережі Хопфілда розглядаються як моделі асоціативної пам’яті людини.

Мережа Хопфілда є одношаровою і складається з штучних нейронів

Кожен нейрон мережі Хопфілда пов'язаний з усіма іншими нейронами: вихід кожного з нейронів подається на входи всіх інших нейронів.



Позначення:

x_i – вхідні сигнали мережі; $i = \overline{1, N}$;

w_{ij} – вагові коефіцієнти зв’язків між нейронами; $i, j = \overline{1, N}$;

y_j – вихідні сигнали мережі; $j = \overline{1, N}$.

Функції активації всіх нейронів мережі Хопфілда є пороговими біполярними (знаковими, сигнатурними):

$$f_j(s_j)=\begin{cases}1 \text{ при } s_j>0 \\ -1 \text{ при } s_j\le 0\end{cases},$$

де s_j – зважена сума сигналів зворотного зв'язку, які поступають на вхід j-го нейрону:

$$s_j=\sum_{i=1,i\ne j}^{N} w_{ij}x_{ij}; \quad j=\overline{1,N}.$$

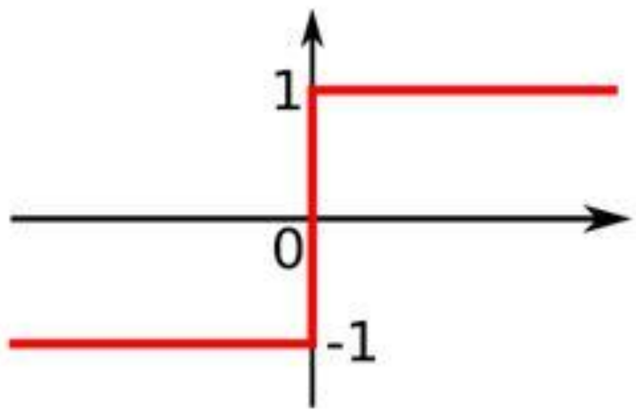


Рис. 3.24 – Функції активації нейронів мережі Хопфілда

Значення вхідних $(x_i \mid i=\overline{1,N})$ і вихідних $(y_j \mid j=\overline{1,N})$ сигналів мережі Хопфілда належать множині $\{-1,1\}$.

Термін «сигнатурний» походить від назви математичної операції signum (*лат.: «знак»*), яка відображається формулою:

$$sign(z)=\begin{cases}-1, & якщо\ \ z<0\\ 0, & якщо\ \ z=0\\ 1, & якщо\ \ z>0\end{cases}.$$

Мережа Хопфілда описується матрицею W взаємодій (зв'язків) між нейронами:

$$W=\left\|w_{ij}\right\|;\ \ i,j=\overline{1,N}.$$

Матриця W є квадратною симетричною матрицею, в якій $w_{ij}=w_{ji}$, а діагональні елементи дорівнюють нулю: $w_{ii}=0$, що виключає ефект впливу нейрону на самого себе.

Наприклад, якщо вхідний сигнал визначається 10 параметрами, то нейронна мережа Хопфілда формується з одного рівня з 10 нейронами. Кожен нейрон зв'язується з усіма іншими 9-ма нейронами. Таким чином у мережі утворюється 90=10×9 зв'язків. Для кожного зв'язку визначається ваговий коефіцієнт w_{ij}. Всі ваги зв'язків утворюють матрицю взаємодій W, яка має розмірність 10×10 і заповнюється у процесі навчання.

Для сигнатурної функції активації вихідний сигнал мережі Хопфілда формується за формулою:

$$y_j = f_j(s_j) = sign\left(\sum_{i=1, i \neq j}^{N} w_{ij} x_{ij}\right); \; j = \overline{1, N}. \qquad (3.10)$$

Вхідними даними при проектуванні мережі Хопфілда, призначеної для розв'язання задач **відновлення пошкоджених образів**, є множина бінарних векторів $X_k = (x_{ik} \mid i = \overline{1, N})$, $k = \overline{1, r}$, кожен з яких відображає **еталонні** ознаки того чи іншого образу, що підлягають розпізнаванню та відновленню; $x_{ik} \in \{-1, 1\}$; k – номер образу; r – кількість образів, що розглядаються.

Для цієї задачі матриця вагових коефіцієнтів формується за формулою:

$$W = \sum_{k=1}^{r} X_k X_k^T,$$

де X_k^T – транспонований вектор еталонних ознак k-го образу.

У розгорнутому вигляді цю формулу можна представити таким чином:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{r} x_{ki} x_{kj}; \; i, j = \overline{1, N},$$

де x_{ki} – i-й елемент вектору X_k;

x_{kj} – j-й елемент вектору X_k; $k = \overline{1, r}$.

Приклад Мережа Хопфілда складається з п'яти нейронів: $N = 5$. Задані три еталонні вектори: $X_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $X_2 = (-1, 1, 1, -1, -1)$ та $X_3 = (1, 1, -1, 1, 1)$.

Матриця вагових коефіцієнтів мережі така:

$$W = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

У визначенні вагових коефіцієнтів w_{ij}, $i, j = \overline{1, N}$ полягає **навчання** мережі Хопфілда, яке здійснюється за одну ітерацію.

Функціонування мережі Хопфілда полягає у наступному.

Якщо на вхід мережі поступає деякий вектор X^{BX}, який співпадає з одним із еталонних векторів X_k, $1 \le k \le r$, то вектор значень вихідних сигналів $Y = (y_j \mid j = \overline{1, N})$ буде співпадати з цим еталонним вхідним вектором X_k: $Y = X_k$. Це означає, що вхідний образ є неушкодженим і мережа його розпізнала.

Якщо на вхід мережі поступає деякий вектор X^{BX}, який не є еталонним, то вектор значень вихідних сигналів не буде з ним співпадати: $Y \ne X^{BX}$. Це означає, що цей образ є пошкодженим, або він не був врахований при проектуванні мережі.

В останньому випадку здійснюється ітераційний алгоритм відновлення вхідного образу, тобто пошуку еталонного образу, найбільш близького до вхідного.

Для цього на кожній t-й ітерації алгоритму визначається новий вектор $X^{BX}(t)$, елементами якого є скориговані значення елементів вхідного вектору X^{BX}; $t = 1, 2, \ldots$

Обчислення значень елементів $x_i^{BX}(t)$, $i = \overline{1, N}$ скоригованих векторів $X^{BX}(t)$ здійснюється за формулою:

$$x_i^{BX}(t) = \begin{cases} +1, \; \textit{якщо} \;\; s_i(t) > 0 \\ x_i^{BX}(t-1), \; \textit{якщо} \;\; s_i(t) = 0 \\ -1, \; \textit{якщо} \;\; s_i(t) < 0 \end{cases}, \qquad (3.11)$$

де $s_i(t)$ – зважена сума сигналів зворотного зв'язку, які поступають на вхід i-го нейрону на початку t-ї ітерації:

$$s_i(t) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} w_{ij} x_j^{BX}(t-1); \ \ i=\overline{1, N}.$$

На першій ітерації вектор $X^{BX}(0)$ приймається рівним вхідному вектору: $X^{BX}(0) = X^{BX}$.

Обчислення завершуються, коли після чергової t-ї ітерації скоригований вектор $X^{BX}(t)$ залишиться без змін: $X^{BX}(t) = X^{BX}(t-1)$.

Якщо остаточний скоригований вхідний вектор $X^{BX}(t)$ співпаде з одним із еталонних векторів X_k; $1 \le k \le r$, це означає, що вхідний образ був пошкоджений, але відновлений і приведений до відповідного класу передбачених образів.

Якщо виявляється, що остаточний скоригований вхідний вектор $X^{BX}(t)$ не співпадає ні з одним із еталонних векторів X_k; $1 \le k \le r$, це свідчить про те, що вхідний образ не був передбачений при проектування нейронної мережі.

Приклад На вхід мережі Хопфілда, розглянутої у попередньому прикладі 3.1, поступив вектор $X^{BX} = (1, 1, -1, 1, 1)$, який співпадає з еталонним вектором X_3.

Зважені суми вхідних сигналів нейронів:

$$s_1 = 7;\ s_2 = 3;\ s_3 = -9;\ s_4 = 7;\ s_5 = 7.$$

Отриманий вектор значень вихідних сигналів $Y = (1, 1, -1, 1, 1)$ співпадає з еталонним вектором X_3.

Висновок: вхідний образ не є пошкодженим і мережа його розпізнала.

Приклад На вхід мережі Хопфілда, розглянутої у прикладі 3.1, поступив вектор $X^{BX} = (1, 1, 1, 1, 1)$, який не збігається з жодним із еталонних вхідних векторів.

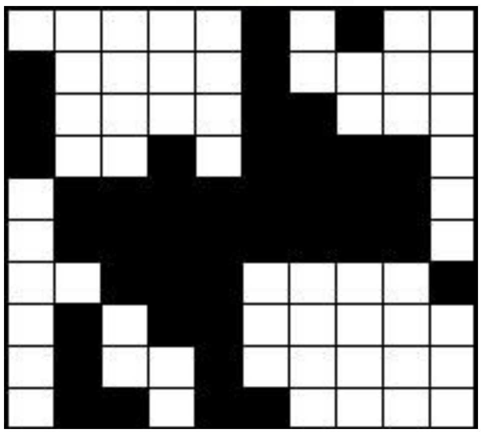
Зважені суми вхідних сигналів нейронів:

$$s_1 = 5;\ s_2 = 1;\ s_3 = -3;\ s_4 = 3;\ s_5 = 5.$$

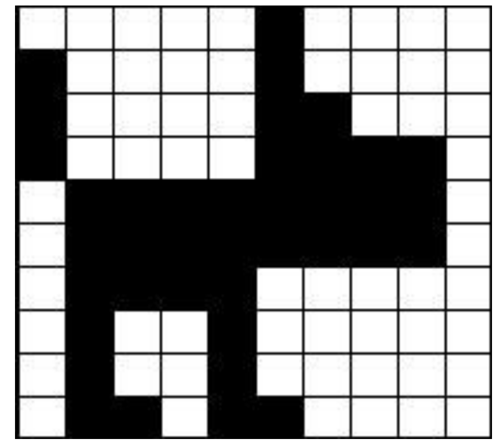
Отриманий вектор значень вихідних сигналів $Y = (1, 1, -1, 1, 1)$ співпадає з еталонним вектором X_3.

Висновок: еталонний вектор X_3 є найближчим до вхідного вектору X^{BX}, а їх незначна розбіжність може бути наслідком пошкодження вхідного образу.

Приклад відновлення пошкодженого образу



Вхідний образ (пошкоджений)



Вихідний образ (відновлений)