СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів ОС “Магістр”

Спеціальності:

174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема2: ВІДНОШЕННЯ

1. ***Декартів добуток множин.***
2. ***Означення відношень. Приклади.***
3. ***Способи задання бінарних відношень.***
4. ***Властивості бінарних відношень.***

ДЕКАРТІВ ДОБУТОК МНОЖИН

Декартовим добутком **$A \times B$**

множин A і B називається множина всіх пар вигляду (a_i, b_j) , в яких перша компонента належить множині A

$(a_i \in A)$, а друга - множині B $(b_j \in B)$.

Приклад декартового добутку множин

- **Нехай A={α,β) і B={ β ,c}.**

- **Тоді A×B {(α,β),(α,c),(β,β),(β,c)}.**

ДЕКАРТІВ ДОБУТОК n-МНОЖИН

Декартовим добутком множин A_1, A_2, ..., A_n *називається множина $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ всіх можливих впорядкованих наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,в яких перша компонента належить множини A_1, друга компонента належить множині A_2, ..., n-а компонента належить множини A_n:*

$$A_1 x A_2 x \ldots x A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 x A_2 x \ldots x A_n \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

- Розглянемо добуток $A \times A = A^2$.
- Підмножина $R \subset A^2$ називається **бінарним відношенням на множині А.** Тобто елементи a_1 і a_2 перебувають у відношенні R, якщо $(a_1,a_2) \in R \subset A \times A$

 і це записують так: $a_1 R a_2$.

 Якщо n=1, то відношення називають

Приклади відношень на множині натуральних чисел N

- 1. R = «≤» (менше, рівне), наприклад, (2; 3) $\in$ R, оскільки 2 < 3; (3;3) $\in$ R, бо 3 ≤ 3; (5; 4) $\notin$ R, бо нерівність 5 < 4 не справджується;
- 2. R=”Мати спільний дільник відмінний від 1". (3;6) $\in$ R; (12;4) $\in$ R;

Приклади відношень на R2 (на площині)

1. R=«бути симетричним відносно осі Ох», $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, якщо

   $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$.

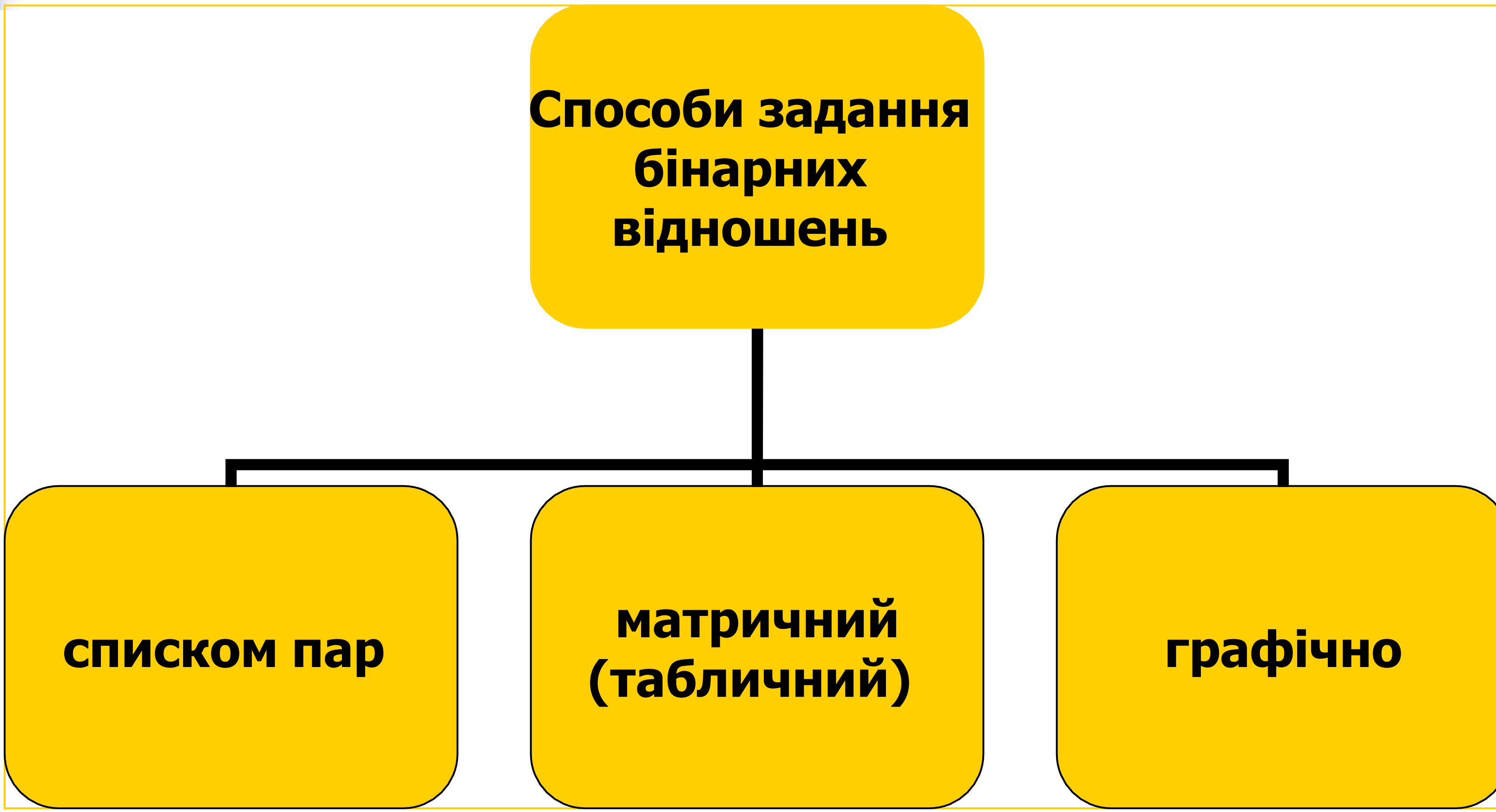
2. R = "розміщуватись на однаковій відстані від початку координат":

   (3;4) R(4;3).

ПРИКЛАДИ ВІДНОШЕНЬ НА МНОЖИНІ ЛЮДЕЙ

- 1) R=”бути студентом однієї групи”;
- 2) R=”бути молодшим”;
- 3) R=”бути знайомим”.

СПОСОБИ ЗАДАННЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ



ПРИКЛАД ВІДНОШЕННЯ ЗАДАНОГО СПИСКОМ ПАР

Відношення ”дільник”, яке складається з пар (*a*,*b*), де *a*- дільник *b*, якщо A={2,3,4,5}, B={2,3,4,5,6,}, має вигляд:

R={(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)}.

СУТЬ МАТРИЧНИНОГО СПОСОБУ ЗАДАННЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

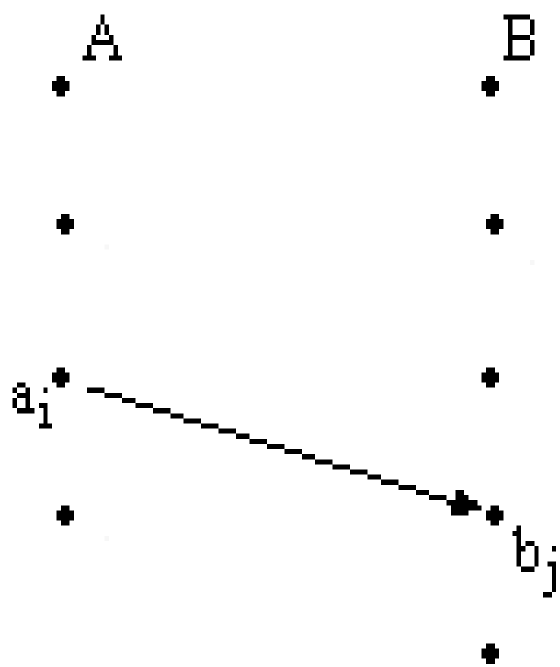
- Відношення $R \subset A \times B$, де $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$,$B=\{b_1,\ldots,b_n\}$, зводиться до побудови таблиці, рядки якої відповідають елементам множини A, а стовпці — елементам множини B; на перетині i-го рядка і j-го стовпця ставится цифра «1», якщо елементи a_i і b_j перебувають у відношенні R, у протилежному випадку — «0».

ПРИКЛАД ЗАДАННЯ ВІДНОШЕННЯ МАТРИЧНИМ СПОСОБОМ

R={(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)}.					
A \ B	$b_1=2$	$b_2=3$	$b_3=4$	$b_4=5$	$b_5=6$
$a_1=2$	1	0	1	0	1
$a_2=3$	0	1	0	0	1
$a_3=4$	0	0	1	0	0
$a_4=5$	0	0	0	1	0

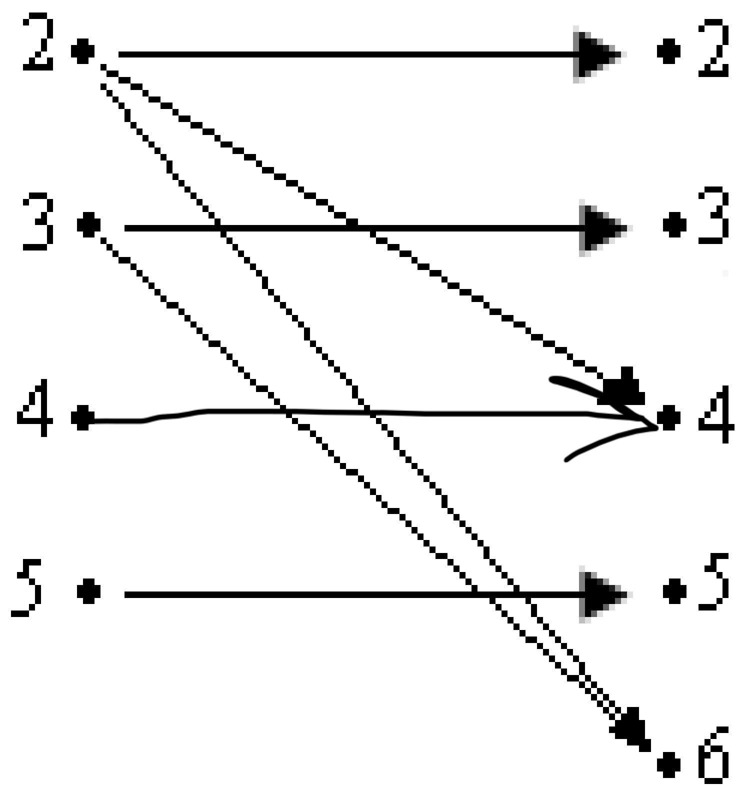
СУТЬ ГРАФІЧНОГО МЕТОДУ ЗАДАННЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

- Елементи множин А і В зображують у вигляді точок площини, а точки площини ai і bj з’єднують стрілкою , спрямованою від ai до bj коли aiRbj

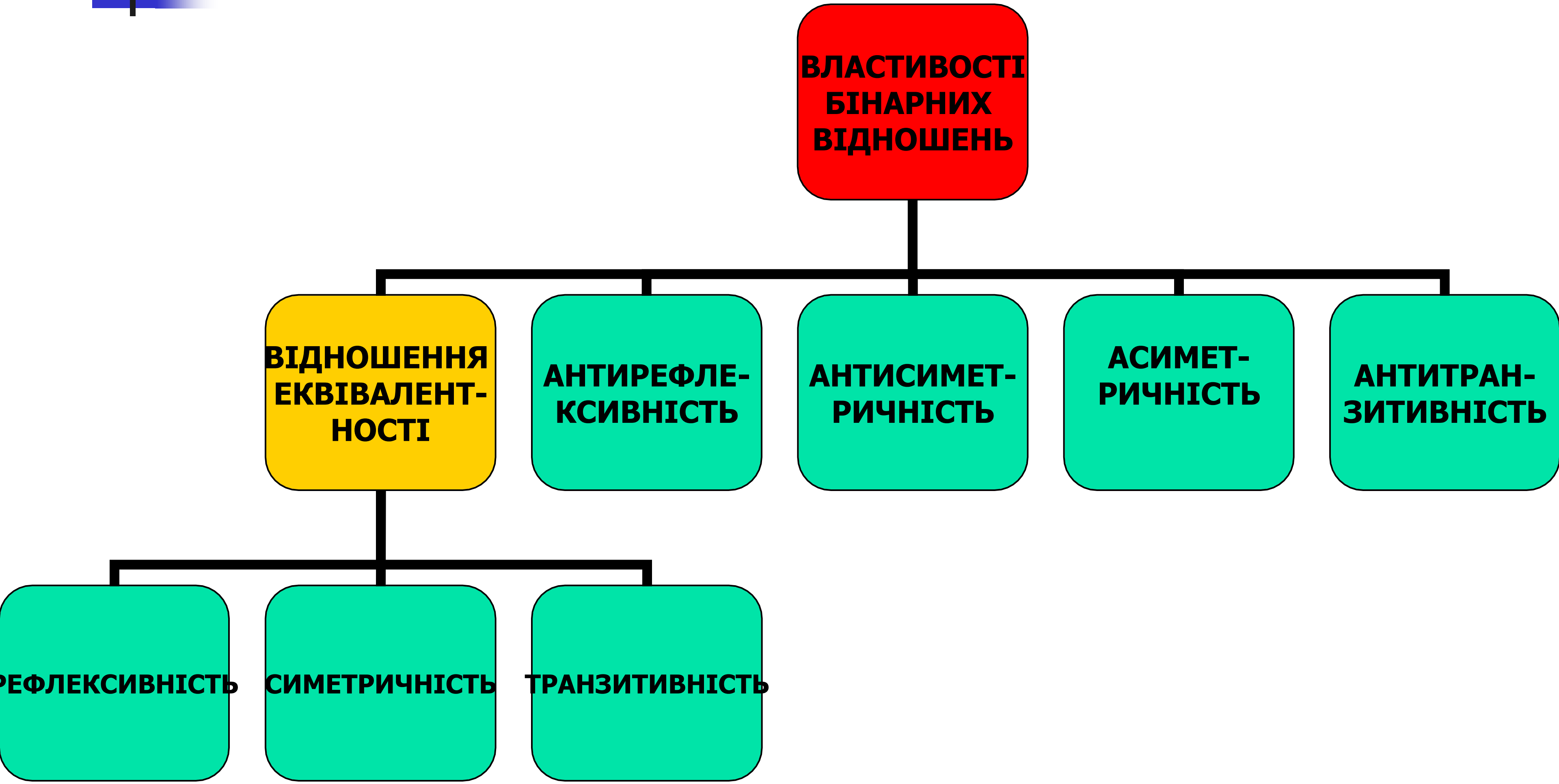


ПРИКЛАД ГРАФІЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ВІДНОШЕНЬ

- R={(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)}.



ВЛАСТИВОСТІ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ



ВІДНОШЕННЯ РЕФЛЕКСИВНОСТІ

- Відношення R на множині A називається ***рефлексивним***, якщо для кожного елемента $a \in A$ виконується aRa.
- Кожний елемент головної діагоналі матриці рефлексивного відношення дорівнює одиниці.

ПРИКЛАД РЕФЛЕКСИВНОГО ВІДНОШЕННЯ

- **A={1,2,3,4}, R= “$\leq$” :**

A	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

ВІДНОШЕННЯ АНТИРЕФЛЕКСИВНОСТІ

- Відношення R називається ***антирефлексивним***, якщо для кожного елемента $a \in A$ не виконується aRa.

ВІДНОШЕННЯ СИМЕТРИЧНОСТІ, АНТИСИМЕТРИЧНОСТІ ТА АСИМЕТРИЧНОСТІ

- Відношення R називається ***симетричним***, якщо з того, що aRb випливає bRa. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі.
- Відношення називається ***антисиметричним***, якщо із aRb і bRa випливає, що a = b. Прикладом такого відношення є відношення нестрогої нерівності: "$\leq$" або "$\leq$".
- Відношення R називається ***асиметричним***, якщо з того, що aRb не випливає bRa.

ВІДНОШЕННЯ ТРАНЗИТИВНОСТІ

- Відношення R називається *транзитивним*, якщо для кожних, елементів $a, b, c \in A$ таких, що aRb і bRc виконується aRc.

ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

- Відношення R називається *відношенням* ***еквівалентності***, якщо
- Воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.
- Прикладом такого відношення є відношення «рівності » на множині дійсних чисел.