СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів ОС “Магістр”

Спеціальності:

174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема3: БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

3. 1. Основні поняття.

3.2. Функції однієї змінної.

3.3. Функції двох змінних.

3.4. Функції n змінних.

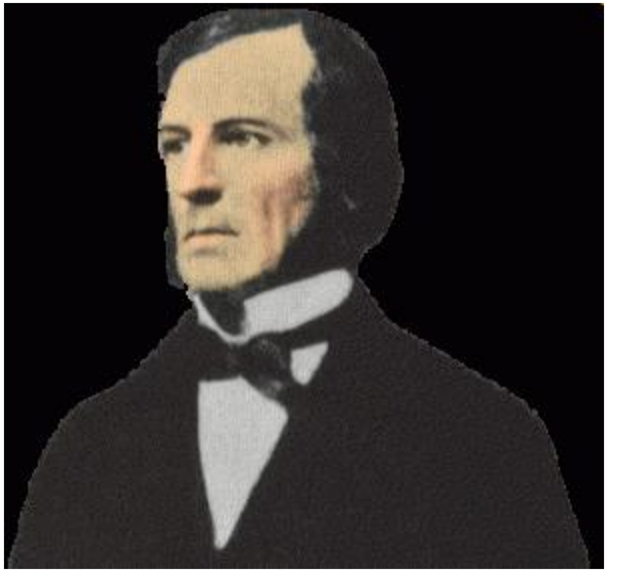
3.5. Істотні та неістотні (фіктивні) змінні.

Двійкова система числення

- Для зображення інформації в комп'ютерах використовується двійкова система числення. Таким чином, всі операції, які виконує комп'ютер, проводяться на множині {0,1}.

БУЛЕВА АЛГЕБРА

- Всі перетворення на множині {0,1} зручно формально зображати за допомогою апарата двійкової логіки, який був розроблений Джорджем Булем у середині XIX століття. Ця алгебраїчна структура називається **булевою алгеброю.**

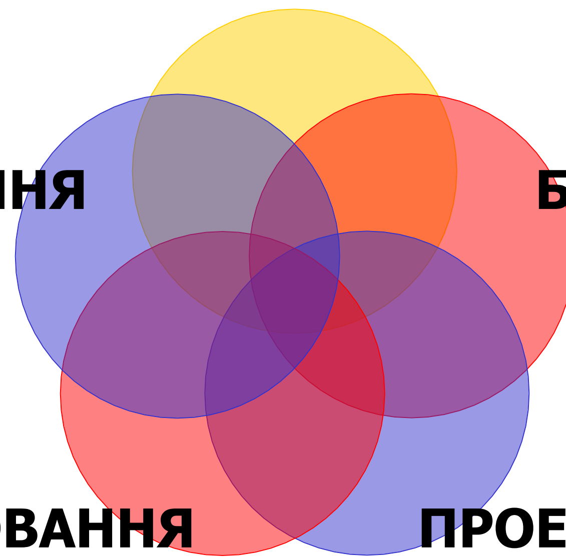


ОСНОВНІ ЗАСТОСУВАННЯ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

ЗАДАЧІ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ

ЛОГІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

РОБОТА З БАЗАМИ ДАНИХ



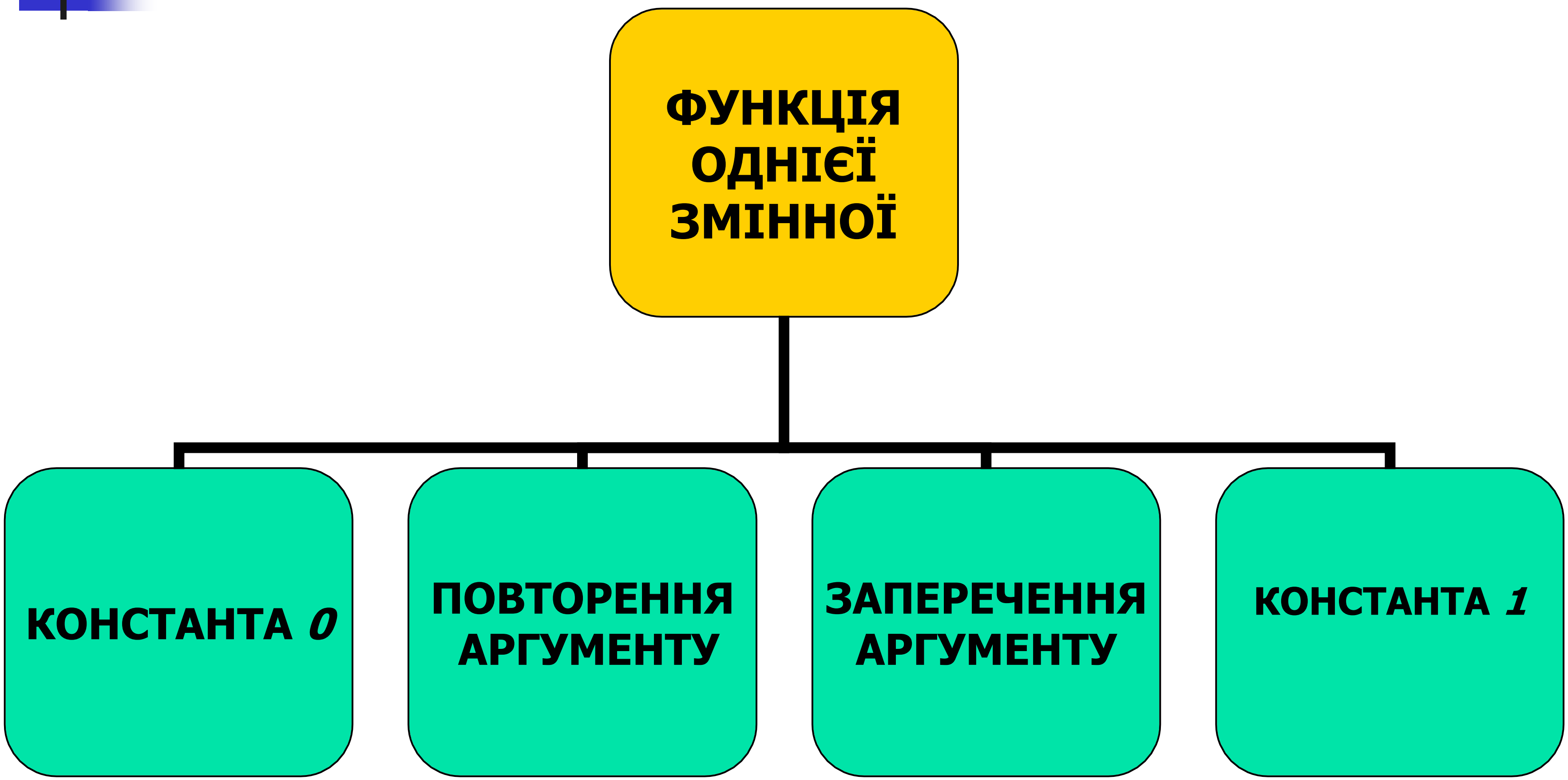
КОНСТРУЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ

ПРОЕКТУВАННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ

ФУНКЦІЯ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

- Позначимо*:* $E_2=\{0,1\}$;
- $E_2^n = E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2$ – прямий добуток *n* співмножників; $(x_1,..,x_n) \in E_2$
- ***Означення 3.1.*** *Функцією алгебри логіки* називається закон, що здійснює відображення $E_2^n \Rightarrow E_2$, яке є всюди визначеним і функціональним.

ВИДИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ



ФУНКЦІЯ КОНСТАНТА *0*

- таблиця істинності для функції ***константа 0***, записується $f_0(x) \equiv 0$;

x	$f_0(x)$
0	0
1	0

ФУНКЦІЯ ПОВТОРЕННЯ АРГУМЕНТУ

- функція $f_1(x)$ називається **функцією повторення аргументу**, записується $f_1(x)= x$, і має наступну таблицю істинності:

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

ФУНКЦІЯ ЗАПЕРЕЧЕННЯ АРГУМЕНТУ

- функція $f_2(x)$ називається ***функцією заперечення аргументу*** і записується

$f_2(x) = \overline{x}$ і має наступну таблицю істинності:

x	$f_2(x)$
0 1	1 0

ФУНКЦІЯ КОНСТАНТА 1

- функція $f_3(x)$ записується $f_3(x) \equiv 1$ і називається ***константою 1*** та має наступну таблицю істинності:

x	$f_3(x)$
0	1
1	1

НУМЕРАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

- Якщо стандартним розташуванням змінної *x* вважати 0 в першому рядку і 1 в другому, то функції f_0, f_1, f_2, f_3 визначаються однозначно наборами значень: $f_0=(0,0)$, $f_1=(0,1)$, $f_2=(1,0)$ і $f_3=(1,1)$.
- Для зручності функції занумеровано так, що двійковий код номера збігається з набором значень функції.

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

- Розглянемо функції двох змінних $f(x_1,x_2)$. Функції двох змінних визначені на множині $E=\{(0\ 0),(0\ 1),(1\ 0),(1\ 1)\}$
- Число всіх булевих функцій від ″n″ аргументів дорівнює 2^2^n (2^n – це два у степені n)
- Отже, число функцій двох змінних дорівнює 2^4=16, занумеруємо їх числами від 0 до 15 так, щоб двійковий код номера збігався з набором значень функції.

ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

x_1 x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ, ЩО НЕ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЗМІННИХ x1 чи x2

- З приведених функцій шість функцій не залежать від x_1, чи x_2, чи обох разом. Це $f_0=0$ - константа нуля,

$f_{15}=1$ - константа одиниці, функції повторення $f_3=x_1$ і $f_5=x_2$, а також функції заперечення $f_{10}=\overline{x}_2$ і $f_{12}=\overline{x}_1$.

Булева функція кон'юнкції (логічного множення)

- ***Булева функція кон'юнкції (логічного множення)***

$f1(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2)$ читається

«***кон'юнкція x_1 і x_2***», іноді замість знака $\wedge$ використовують знак • або & або взагалі його опускають.

Цю операцію називають також ***логічним множенням,*** тому що її таблиця істинності збігається з таблицею множення для чисел "0" і "1", тобто дорівнює одиниці тільки при одиничних аргументах.

Булєва функція диз'юнкції (логічного додавання)

- $f_7(x_1,x_2) = (x_1 \vee x_2)$, читається «***x₁ диз'юнкція x₂***», її називають ***логічним додаванням***.

Дана функція дорівнює одиниці, якщо хоча б один з аргументів дорівнює одиниці.

Булева функція додавання по модулю два (виключає « або»)

- $f_6(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2)$ – ***додавання x₁ і x₂ по модулю два***.

Дана функція дорівнює одиниці на незбіжних наборах x_1 і x_2

(f_6=($\bar{x}_1$ і x_2) чи (x_1 і $\bar{x}_2$))

Булева функція «стріла Пірса» (заперечення диз'юнкції)

- $f_8(x_1,x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$, читаєтся

«***x_1* стрілка Пірса *x_2***» і вона збігається з ***запереченням диз’юнкції***.

Дана функція приймає одиничне значення тільки при нульових значеннях x_1 і x_2. У цьому зв'язку f_8 є запереченням диз'юнкції, $f_8 = \overline{f_7}$.

Булева функція еквівалентності (рівнозначності)

- $f_9(x_1,x_2) = (x_1 \sim x_2)$, читається

  «x₁ еквівалентно x₂».

  Дана функція дорівнює одиниці на співпадаючих наборах x_1 і x_2.

Булева функція імплікації (логічного проходження)

- $f_{13}(x_1,x_2) = (x_1 \rightarrow x_2)$, читається «***$x_1$ імплікація x_2***» *або читається* «***якщо x_1, то x_2*** », *чи* $f_{13} = \overline{x_1}$ *чи* x_2
- *Дана функція дорівнює одиниці при x_1 рівному нулю і повторює значення x_2 при x_1 рівному одиниці. Тому $f_{11}=x_2\rightarrow x_1$, читається «якщо x_2, то x_1»*

Булева функція «штрих Шеффера» (заперечення конъюнкции)

- $f_{14}(x_1, x_2) = (x_1 | x_2)$, читается

«x_1 штрих Шеффера x_2»

або $f_{14} = \overline{x}_1$ чи $\overline{x}_2$.

Вона є ***запереченням кон'юнкції***.

Дана функція приймає одиничне значення, якщо хоча б x_1 чи x_2 дорівнює нулю. У цьому зв'язку f_{14} є запереченням конъюнкції,

$f_{14} = \overline{f}_1$

Булева функція заперечення (заборони) імплікації

- $f_2=(x_1 \leftarrow x_2)$ чи $f_2=x_1$ і $\overline{x_2}$

В іншій інтерпретації цієї функції $f2=\urcorner(x_1 \rightarrow x_2)$, при цьому ліва і права стрілки розуміються однаково, тобто $x_1 \leftarrow x_2 = x_2 \rightarrow x_1$.

Дана функція дорівнює одиниці тільки при x_1 рівному 1 і x_2 рівному 0. Аналогічно, $f_4=x_2 \leftarrow x_1$ у першій інтерпретації дорівнює одиниці тільки при x_2 рівному 1 і x_1 рівному 0.

ФУНКЦІЇ n ЗМІННИХ

- Розглянемо функції $f(x_1...x_n)$, де $(x_1...x_n) \in E_2^n$, тоді число наборів $(x_1...x_n)$,на яких функція $f(x_1...x_n)$ задана, дорівнює $|E_2^n|=2\wedge n$. Позначимо множину всіх функцій двозначної алгебри логіки P_2. Позначимо через $P_2(n)$ число функцій, що залежать від n змінних. Очевидно, $P_2(n)=2\wedge(2\wedge n)$.

ВИДИ ЗМІННИХ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

- ЗМІННІ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ
  - ІСТОТНІ
  - НЕІСТОТНІ (ФІКТИВНІ)

ІСТОТНІ ТА НАІСТОТНІ ЗМІННІ

- ***Означення 3.3***.

  Функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ ***істотньо залежить від*** $\boldsymbol{x_i}$, якщо існують такі значення $a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n$ змінних

$x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$, що

$f(a_1, \ldots a_{i-1}, 0, a_{i+1} \ldots a_n) \neq f(\mathrm{a}_1 \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1} \ldots a_n)$.

  Тоді змінна x_i називається ***істотньою змінною***. В протилежному випадку x_i називається ***фіктивною змінною***.

ВИЛУЧЕННЯ ФІКТИВНОЇ ЗМІННОЇ

- Нехай x_i є фіктивною змінною для функції $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Тоді її можна вилучити з таблиці истинності, викреслюючи всі рядки виду: $(a_1, ...a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ...a_n)$ або, навпаки, всі рядки виду:

$(a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ...a_n)$ і стовпчик для змінної x_i.

РІВНІСТЬ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

- ***Означення 3.4***. Функції f_1 і f_2 називаються ***рівними***, якщо f_2 можна отримати з f_1 шляхом додавання або вилучення фіктивної змінної.

Контрольні запитання

1. *Яка є відмінна риса логічних функцій?*
2. *Яка функкія є k-значною?*
3. *Що таке однорідна функція?*
4. *Яку функцію називається булевою?*
5. *Які змінні має булева функція?*
6. *Скількі булевих функцій від n аргументів існує?*
7. *Яка різниця між кон’юнкцією та діз’юнкцією, еквіваленцією і сумою по модулю два?*
8. *Що за функції стрілка Пірса та штрих Шеффера?*
9. *Сформулюйте означення істотньої змінної.*
10. *Коли дві булеві функції будуть рівними?*