СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів ОС “Магістр”

Спеціальності:

174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

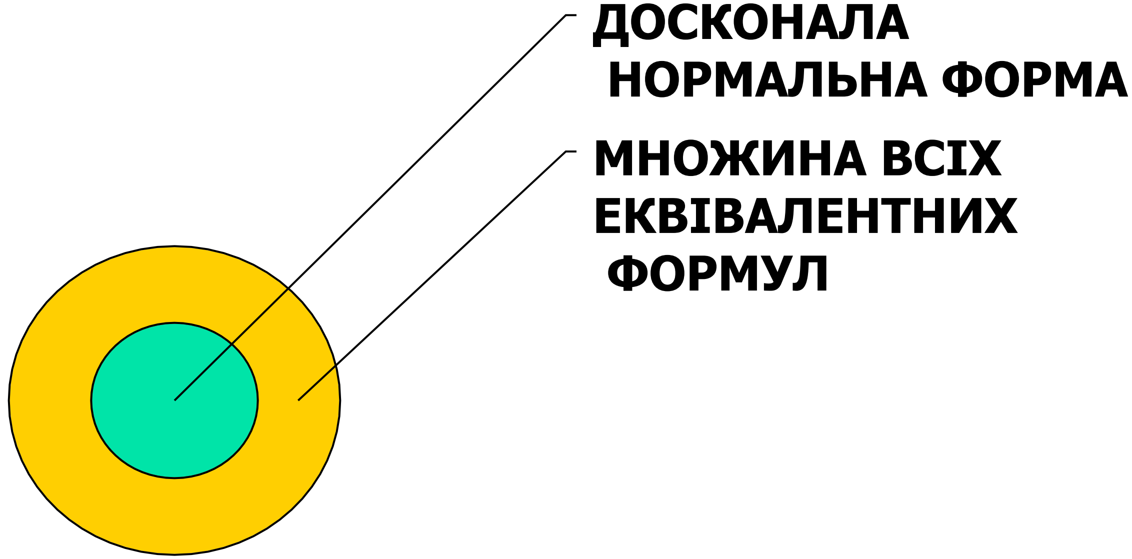
Тема4: Диз’юнктивні та кон’юнктивні розкладання булевих функцій

- ***5.1. Теорема про розкладання функції за змінними.***
- ***5.2. Диз’юнктивна нормальна форма (ДНФ). Довершена диз’юнктивна нормальна форма (ДДНФ).***
- ***5.3. Кон’юнктивна нормальна форма (КНФ). Довершена кон’юнктивна нормальна форма (ДКНФ).***
- ***5.4. Основні поняття мінімізації функцій.***
- ***5.5. Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.***

ДОСКОНАЛА НОРМАЛЬНА ФОРМА

- Серед множин еквівалентних формул, що зображують обрану булеву функцію f, виділяється одна формула, яка називається ***досконалою нормальною формою*** функції f.

СТРУКТУРА ЕКВІВАЛЕНТНИХ ФОРМУЛ БУЛЕВОЇ ФУНКЦІЇ



ВИДИ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ

НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

- Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)
- Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)

Двійковий параметр σ

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \sigma = 0, \\ x, \sigma = 1. \end{cases}$$

Теорема про розкладання функції за змінними

- **Теорема 5.1**.*(про розкладання функції за змінними)*

Нехай f(x_1, ..., x_n) $\in P_2$. Тоді для будь- якого m: 1 ≤ m ≤ n справедливе представлення:

f(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n)=

$$\bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,x_{m+1},\ldots,x_n) \quad ,$$

де диз’юнкція береться по всіх наборах з 0 і 1, яке називається розкладанням функції f за змінними *x*1, ..., *xn*.

ПРИКЛАД РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

- **Приклад 5.1.** $m = 1$, запишемо розкладання за змінною x:
- $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$\bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots x_n)$$

ПРИКЛАД РОЗКЛАДАННЯ ЗА ДВОМА ЗМІННИМИ

- **Приклад 5.2.** m=2, запишемо розкладання за змінними x і :
- $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ = $\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,\ldots,x_n)$ =

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 f(0,0) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0,1) \vee x_1\bar{x}_2 f(1,0) \vee x_1 x_2 f(1,1)$$

Довершена диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)

- ***Наслідок 1.*** Будь яку функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$, що не дорівнює тотожньо нулю можна представити в вигляді:

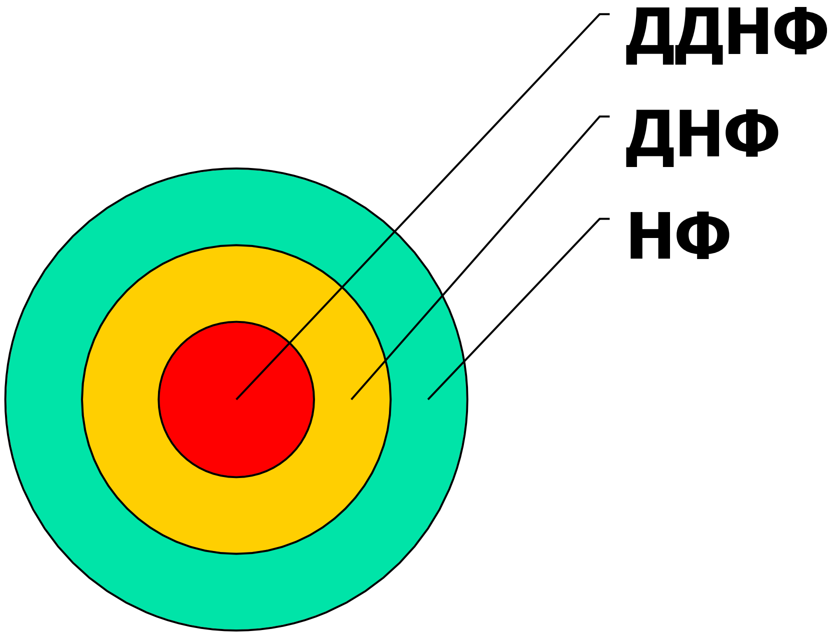
$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_{1\ldots}\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}$$

причому єдиним способом. Цей вигляд називаєтся ***довершеною диз'юнктивною нормальною формою*** функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ і записується **ДДНФ**.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ).

- ДДНФ для $f(x_1, \ldots, x_n)$ – це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій рангу n. Якщо функція представлена у вигляді диз'юнкцій елементарних кон'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної кон'юнкції менше n, то така форма називається ***диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).***

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ДНФ І ДДНФ



ПРЕДСТАВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ЧЕРЕЗ ($\vee$, $\wedge$, $\rceil$)

- ***Наслідок 2.*** Будь яка функція алгебри логіки може бути представлена у вигляді формули через ($\vee$, $\wedge$, $\rceil$):
- а) Якщо $f \equiv 0$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \,\&\, \bar{x}_1$.
- б)Якшо $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ тотожньо, то її можна представити в вигляді ДДНФ, де використовуються лише зв'язки ($\vee$, $\wedge$, $\rceil$) . ДДНФ дає алгоритм представлення функції у вигляді формули через ($\vee$, $\wedge$, $\rceil$) .

ПРИКЛАД СКЛАДАННЯ ДДНФ

- ***Приклад 4.3***. Нехай функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею істинності. Запишемо її у вигляді ДДНФ.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Наборів, на яких функція дорівнює 1, є три: (0, 0, 1), (1, 0, 0) і (1, 0, 1), тому $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) =} \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ).

- ***Наслідок 3.***

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \underset{(\sigma_{1\ldots}\sigma_n):\bar{f}(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=1}{\&}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}) = \underset{(\sigma_{1\ldots}\sigma_n):f(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=0}{\&}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}) =$$

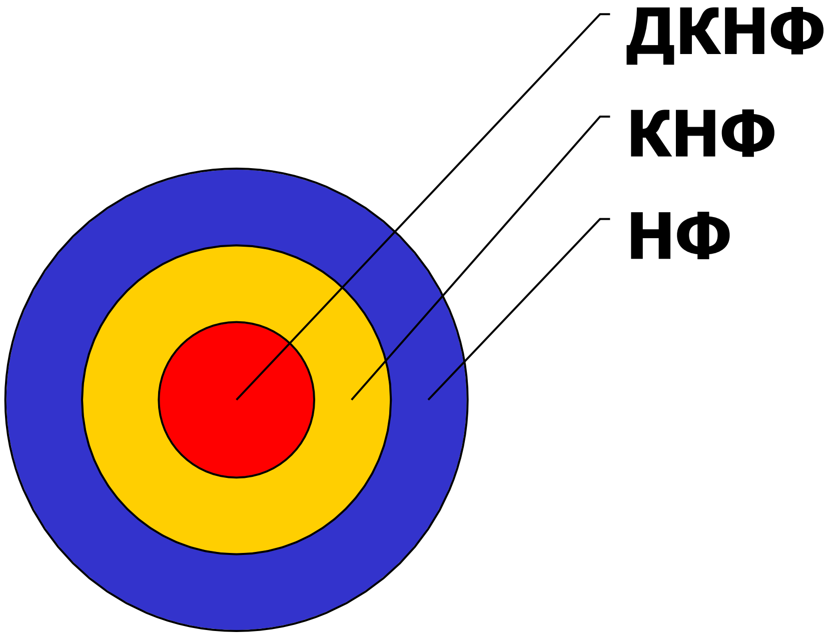
$$= \underset{(\sigma_{1\ldots}\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=0}{\&}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Представлення функції в такому вигляді називається ***довершеною кон'юнктивною нормальною формою*** або коротко – ***ДКНФ***. ДКНФ для $f(x_1, \ldots, x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій рангу *n*.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)

- **КНФ** для $f(x_1, \ldots, x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної диз'юнкції менше n.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ КНФ І ДКНФ



ПРИКЛАД ВІДШУКАННЯ ДДНФ ТА ДКНФ

- Знайдемо ДДНФ И ДКНФ функції:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

ДДНФ: *f(x1,x2,x3) =* $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$;

ДКНФ: *f(x1,x2,x3) =* $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

Поняття мінімізації функцій

- ***Мінімальною ДНФ*** функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається ДНФ, що реалізує функцію f і містить мінімальне число символів змінних в порівнянні з всіма іншими видами ДНФ, що реалізують функцію f.

ТЕОРЕМА ПРО ПРОСТІ ІМПЛІКАНТИ

- **Теорема 5.2.** Будь яка функція реалізується диз’юнкцією всіх своїх простих імлікант .
- (Елементарна кон’юнкція K називаєтся ***імплікантою*** функції f, якщо для будь якого набору =(a_1, ..., a_n) із 0 і 1 умова $K($ $)=1$ тягне $f($ $)=1$.
- Імпліканта K функції f називається ***простою***, якщо вираз, отриманий з неї відкиданням будь яких множників, вже не буде імплікантою функції f.)

Скорочена ДНФ функції

- ***Скорочена ДНФ*** функції *f* є диз'юнкція всіх простих імплікант функції *f*. Будь яка функція *f* реалізується своєю скороченою ДНФ. Для будь якої функції, що не дорівнює тотожньо нулю, існує єдина скорочена ДНФ.

Правила перетворення ДНФ

- Нехай *A* і *B* –довільні формули. Із властивостей булевих операцій випливають наступні оборотні правила перетворення ДНФ:
- 1) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A$ – *повне склеювання* (розгортання);
- 2) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A \vee A \cdot B \vee A \cdot \overline{B}$ – *неповне склеювання*;
- 3) $XA \vee \overline{X}B = XA \vee \overline{X}B \vee AB$ –*узагальнене склеювання*;
- 4) $A \vee A \cdot B = A$ – *поглинання*;
- 5) $A \vee A = A;\ A \,\&\, A = A$ – *ідемпотентність*.

Теорема Квайна

- **Теорема 4.3.(** ***Квайна***). Якщо в ДДНФ функції *f* провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання і вилучення членів що повторюються, то в результаті буде отримано скорочену ДНФ функції *f*.

Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ

- *Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ* зводиться до таких кроків:
- 1. Отримати ДДНФ функции *f*.
- 2. Провести всі операції неповного склеювання.
- 3. Провести всі операції поглинання.

Контрольні запитання

- *Які існують способи задання булевих функцій?*
- *Сформулюйте теорему про розкладання функцій за змінними.*
- *Що таке ДНФ і КНФ, ДДНФ і ДКНФ?*
- *Що є "конституента одиниці" і "конституента нуля"?*
- *Яке представлення булевої функції є аналітичним?*
- *Як ввести відсутню перемінну у який-небудь член ДНФ або КНФ?*
- *Як привести формулу до досконалої форми?*
- *Які існують правила перетворення ДНФ.*
- *Сформулюйте терему Квайна.*
- *Вкажіть алгоритм Квайна.*