СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів ОС “Магістр”

Спеціальності:

174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

ТЕМА 5 :
КАНОНІЧНИЙ ВИГЛЯД ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДЕЯКІ МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ

1. Поняття про математичне моделювання
2. Приведення довільної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду
3. Система обмежень та її розв’язки
4. Основні теореми лінійного програмування
5. Геометричний метод розв’язання задач лінійного програмування

Поняття моделювання

Моделювання – це процес дослідження реальних систем, що включає побудову моделі, дослідження її властивостей та перенесення одержаних відомостей на реальну систему.

Основні етапи побудови моделі :

- постановка завдання моделювання
- вибір виду моделі
- перевірка моделі на достовірність
- застосування моделі
- оновлення моделі

Задача лінійного програмування

- В загальному випадку задача лінійного програмування формулюється наступним чином: серед розв’язків системи лінійних рівнянь, де коефіцієнти – задані постійні величини, знайти такий, при якому цільова функція (лінійна форма) приймає максимальне значення.

Система обмежень задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

Загальний вигляд цільової функції (лінійної форми)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

оптимальний план задачі

Розв’язок , $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ при якому функція F досягає максимуму, називається ***оптимальним розв’язком*** *або* ***оптимальним планом задачі***

матрично-векторний спосіб запису задач ЛП

$$AX = B,$$

де ***A*** - відповідно матриця коефіцієнтів біля невідомих, ***X*** - вектор-стовпчик з невідомих та ***B*** - вектор-стовпчик з правих частин рівнянь системи обмежень.

основна матриця системи обмежень

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Розширена матриця системи обмежень

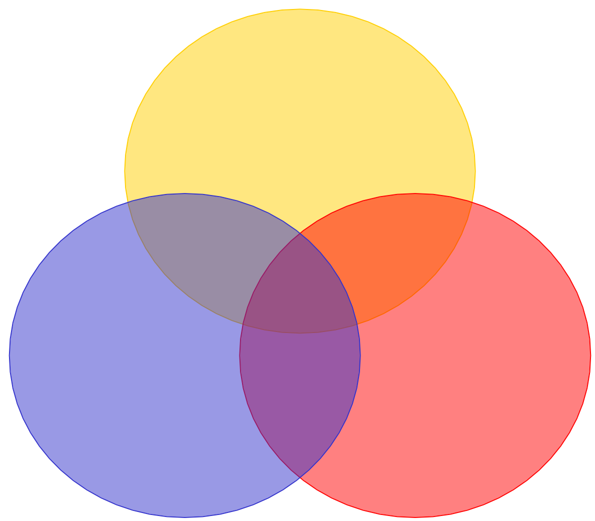
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Приведення довільної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду

- В більшості задач лінійного програмування обмеження задаються не у вигляді рівнянь, а у вигляді нерівностей, при чому можливі різні форми таких систем
- Система обмежень може бути також змішаною, тобто в ній частина обмежень записана у вигляді рівнянь , частина – у вигляді нерівностей
- Будь-яку систему обмежень можна привести до системи рівнянь вигляду . Для цього достатньо до лівої частини кожної нерівності додати або відняти невід'ємне число – *додаткову змінну* такої величини, щоб відповідна нерівність стала рівністю – перетворилась в рівняння

Можливі випадки системи обмежень

несумісна



сумісна і має єдиний розв’язок

Сумісна і має безліч розв’язків

Основні теореми лінійного програмування

- **Теорема 1**. Множина всіх допустимих розв’язків системи обмежень задачі лінійного програмування є випуклою
- **Теорема 2.** Якщо існує, і притому єдиний, оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з однією з кутових точок множини допустимих розв’язків

  системи обмежень
- **Теорема 3**. Кожному допустимому базисному розв’язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка області допустимих розв’язків системи обмежень
- **Теорема 4.** Кожній кутовій точці множини допустимих розв’язків системи обмежень відповідає допустимий базисний розв’язок

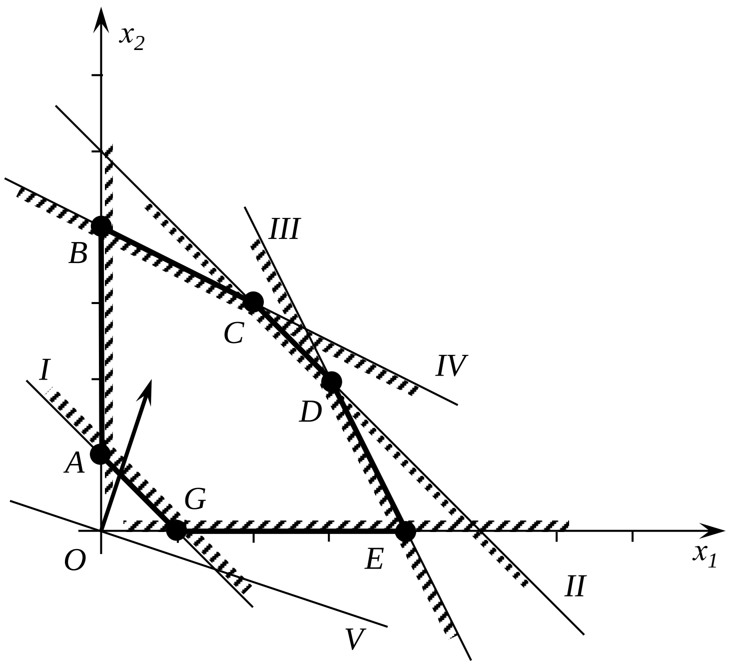
Геометричне розв’язання задач лінійного програмування

- Геометричний метод розв’язання можна застосовувати тільки для систем обмежень з двома або трьома змінними.
- Геометричний метод має досить вузькі рамки для свого застосування.
- Геометричний метод викликає певний інтерес при виробленні наочних представлень про задачі лінійного програмування.
- Дозволяє геометрично підтвердити справедливість основних теорем лінійного програмування.

Застосування геометичного методу

- **Геометричний метод**
  - **Дві змінні**
    - **На площині**
  - **Три змінні**
    - **У просторі**

Приклад вигляду обмежень на площині



Алгоритм геометричного методу

1) будуються граничні прямі обмежень задачі;

2) визначається многокутник розв’язків;

3) будується вектор градієнт цільової функції;

4) визначаються точки екстремуму;

5) обчислюється оптимальне значення цільової функції.