



СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів ОС "Магістр"

Спеціальності:

**174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології
та робототехніка»**

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики
Шостак Сергій Володимирович



ТЕМА 6: ЗАДАЧА ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

- 1. Загальна постановка задачі лінійного цілочислового програмування і методи її розв'язання
- 2. Метод Р. Гоморі розв'язання задач лінійного цілочислового програмування



ЦІКАВА ЗАДАЧА

«До табунника прийшли три козаки купувати коней. «Добре, я вам продам коней, — сказав табунник, — першому я продам півтабуна і ще півконя, другому — половину коней, що залишаться, і ще півконя, третій також здобуде половину коней, що залишаться, з півконем. Собі ж я залишу тільки 5 коней». Здивувалися козаки, як це табунник буде розділяти коней на частини. Але після деяких роздумів вони заспокоїлися, і угода відбулася»

(Задача з книги, виданої у XVIII столітті).



ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

- Розділ математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення усіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисельності, називається ***цілочисловим програмуванням.***
- Найбільш вивченими задачами цілочислового програмування є задачі лінійного цілочислового програмування.

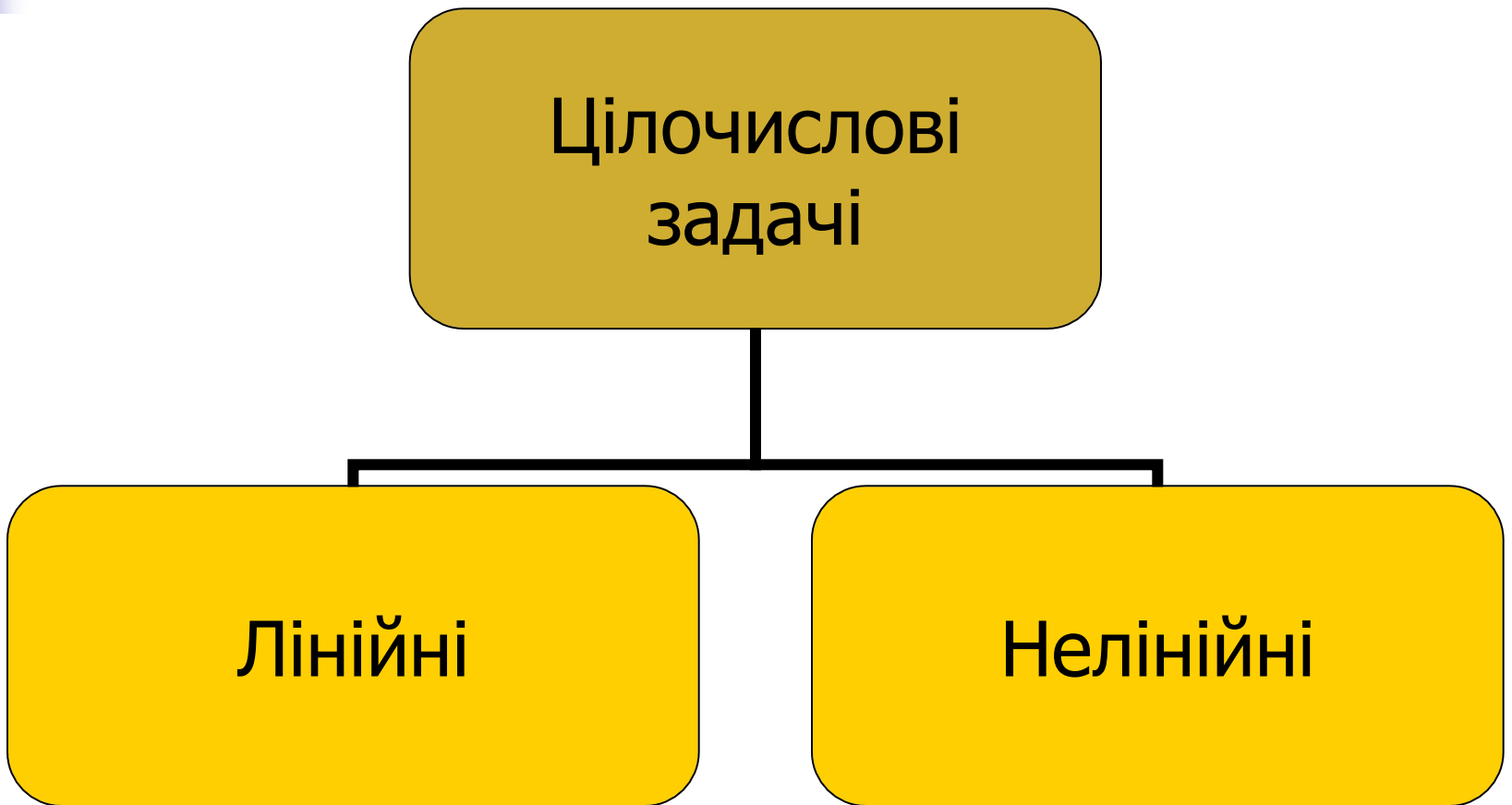
ПРИКЛАДИ ЦІЛОЧИСЛОВИХ ЗАДАЧ



- вибір послідовності виробничих процесів;
- календарне планування роботи підприємства;
- планування та забезпечення матеріально-технічного постачання,
- розміщення підприємств,
- розподіл капіталовкладень,
- планування використання обладнання тощо.



Види цілочислових задач





Загальна постановка задачі

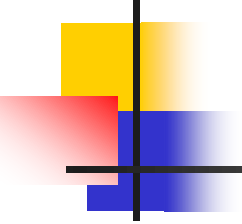
Математична модель задачі

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0$$

x_j - цілі числа



Геометрична інтерпретація розв'язку

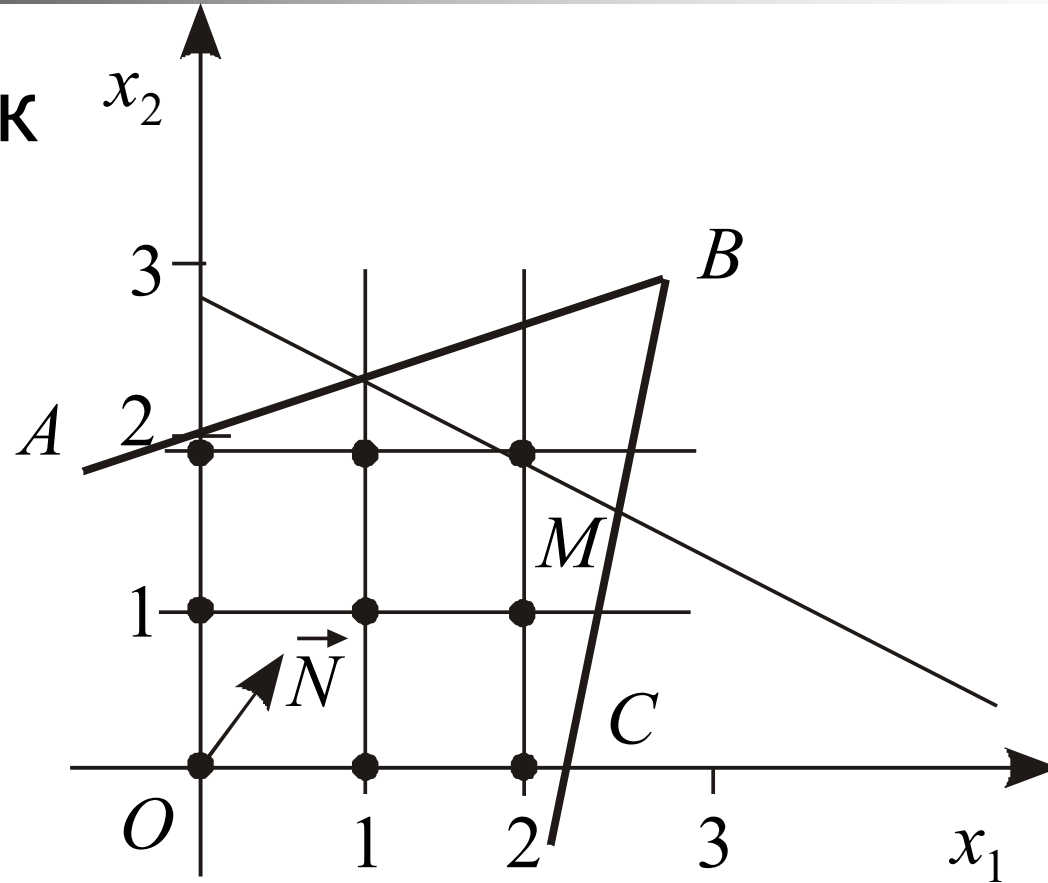
- геометрично множина допустимих планів будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що знаходяться всередині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі.

Знаходження оптимального розв'язку

- Для знаходження цілочислового оптимального розв'язку прямокутника, що відповідає цільовій функції, пересуваємо у напрямку вектора нормалі до перетину з кутовою точкою цілочислової сітки. Координати цієї точки і є оптимальним цілочисловим розв'язком задачі

Приклад цілочислової сітки

Рисунок





Методи цілочислового програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:

методи відтинання;

комбінаторні методи;

2) наближені методи.



Схема методів

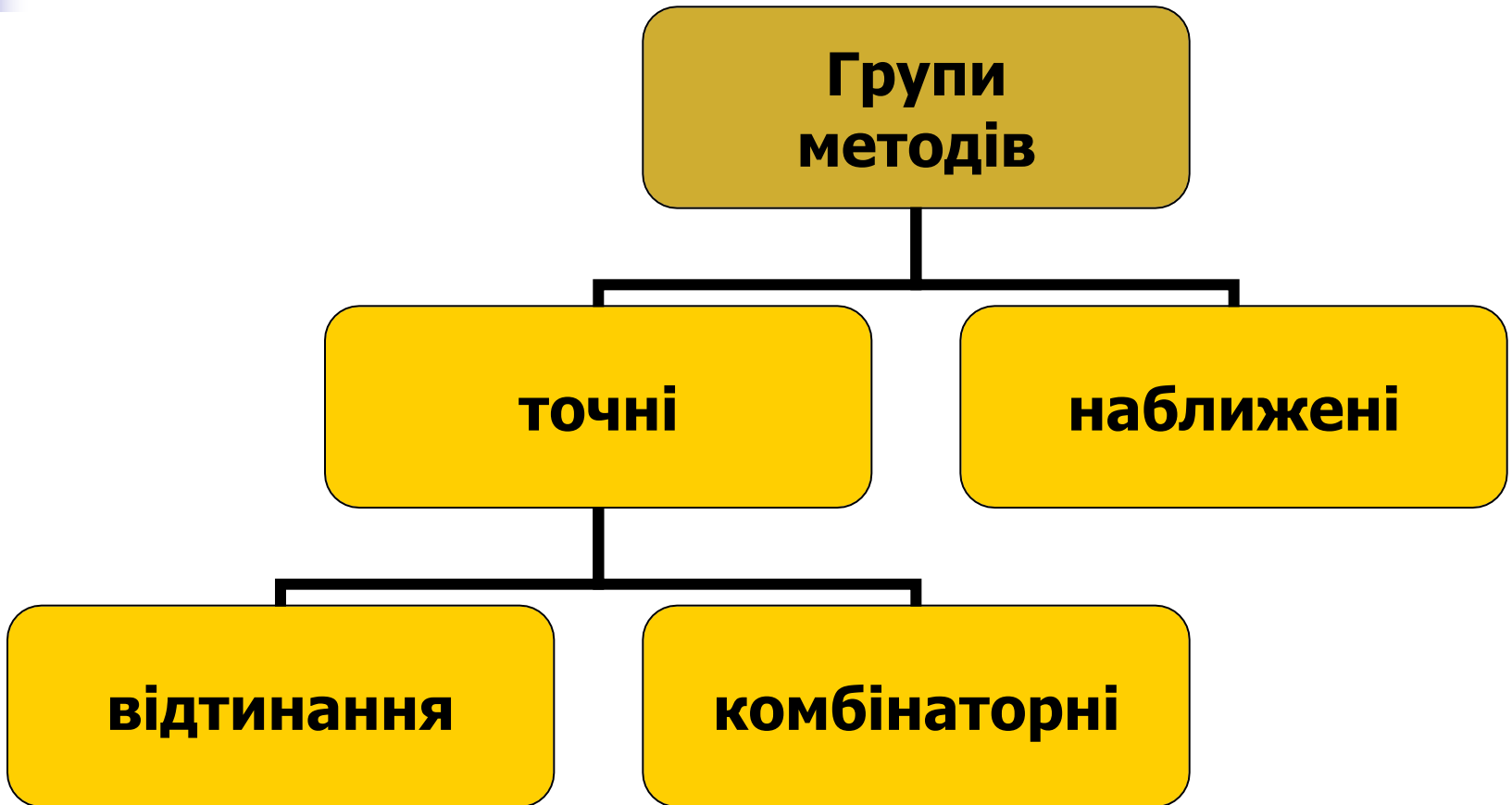
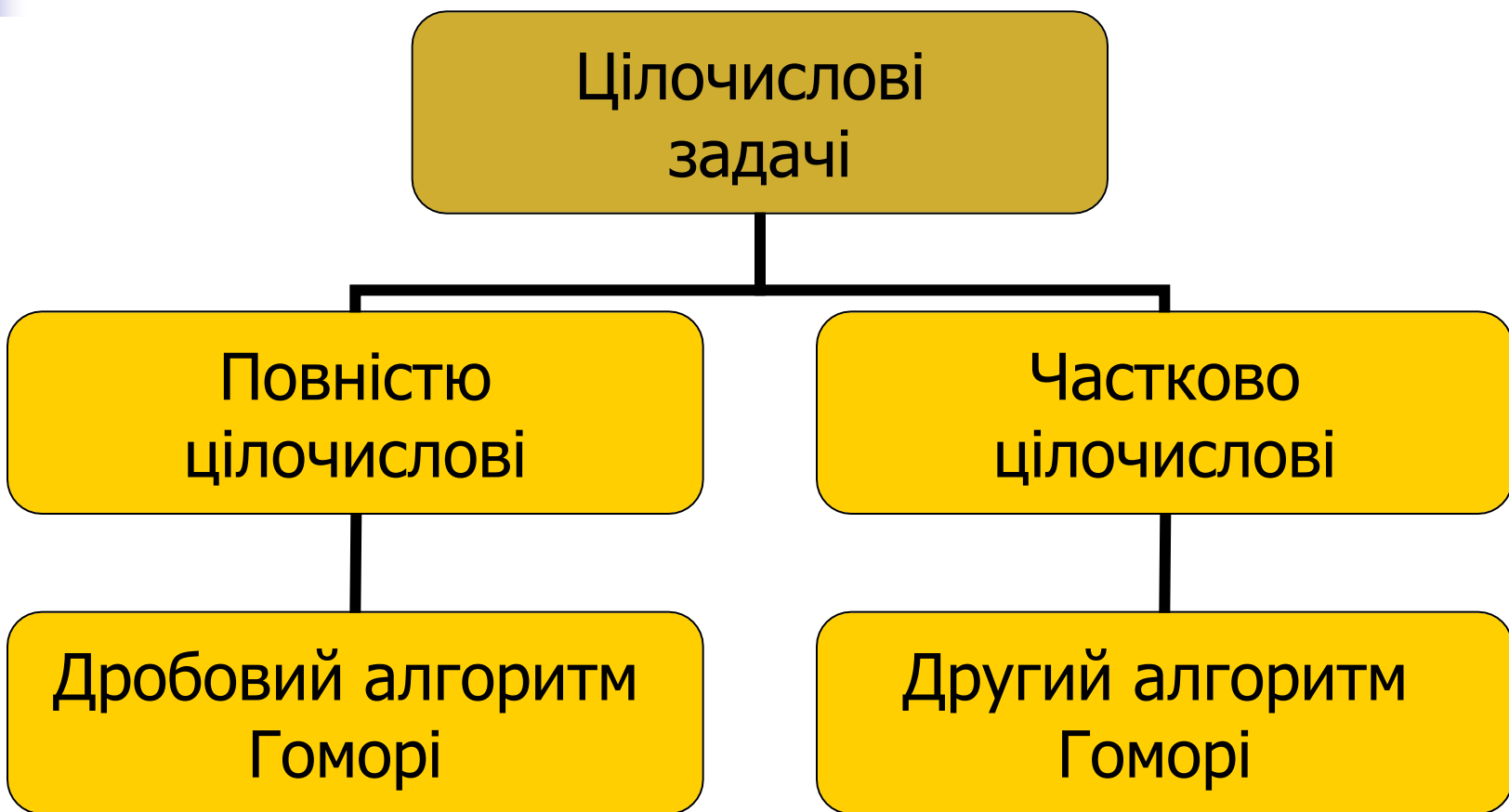


Схема застосування методів відтинання





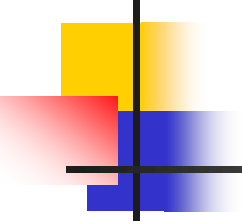
Ідея комбінаторних методів

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв'язків.



метод гілок і меж

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, метод гілок і меж передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв'язків.



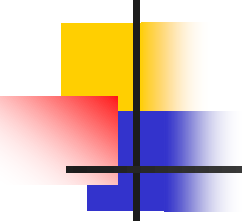
Розв'язування задач із бульовими змінними

- Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.



Суть наближених методів

- Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв'язок за прийнятний час або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.



Зв'язок між наближеними і точними методами

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

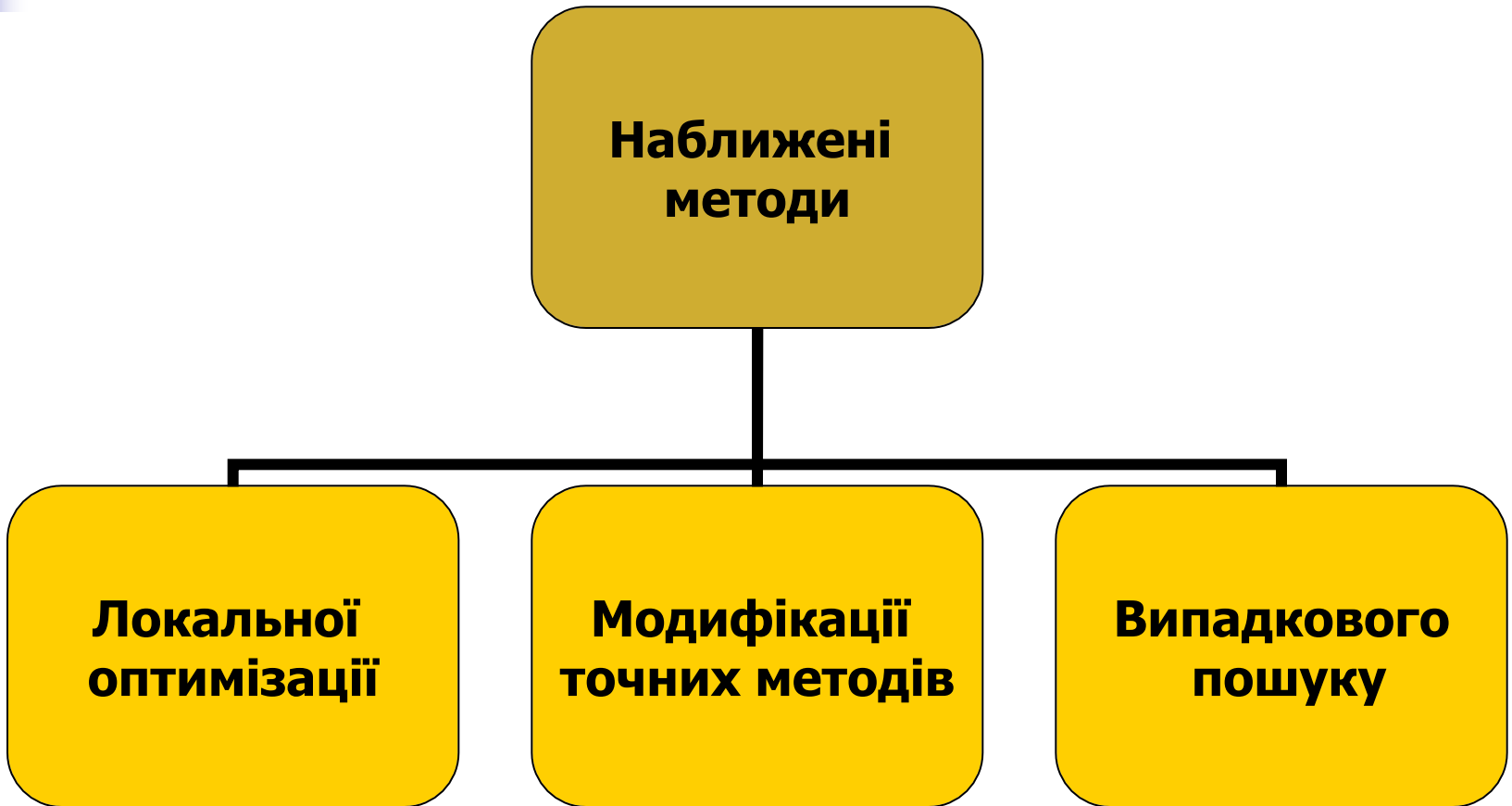


Наближені методи

- До наближених методів належать:
- **метод локальної оптимізації**
(метод вектора спаду);
- **модифікації точних методів;**
- **методи випадкового пошуку та ін.**



Схема наближених методів





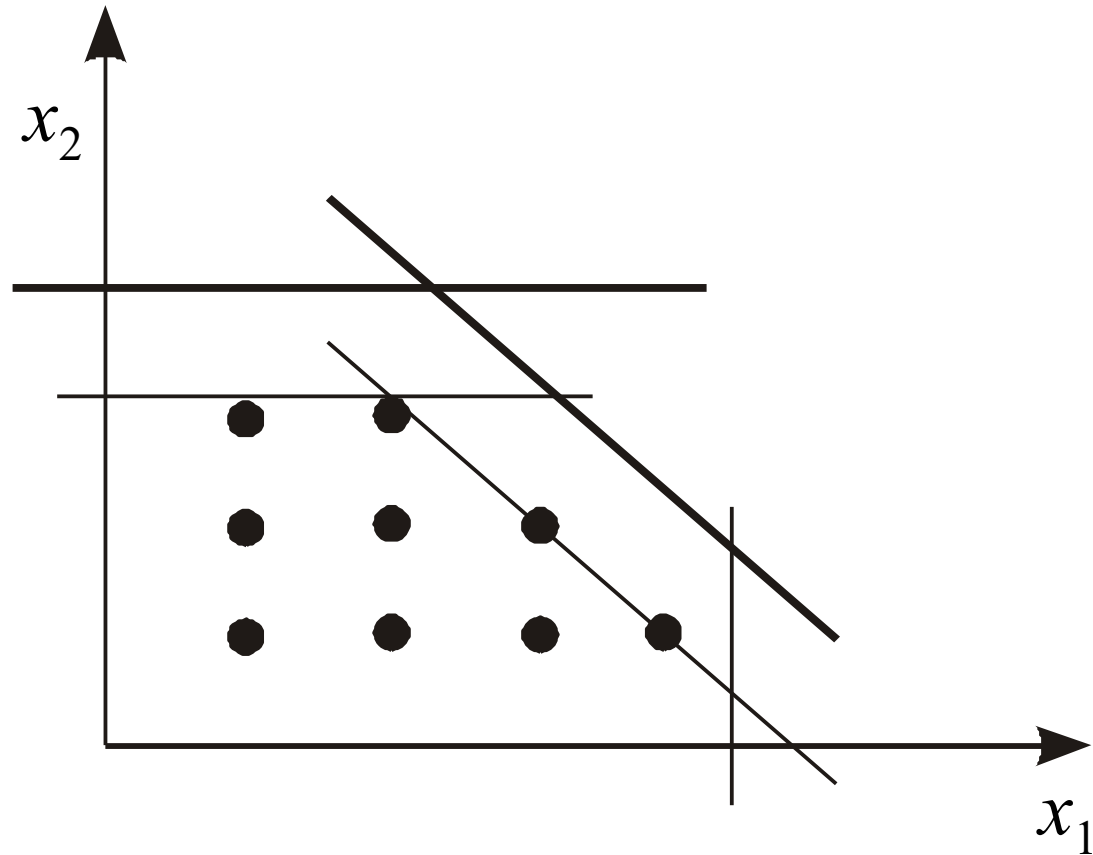
Суть методу Гоморі

- Накладають додаткове обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок. Таке додаткове обмеження називають **правильним відтинанням**. Система лінійних обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв'язується отримана задача лінійного програмування. Якщо її розв'язок знову не задовольняє умови цілочисловості, то будується нове лінійне обмеження, що відтинає отриманий розв'язок, не зачіпаючи цілочислових планів. Процес приєднання додаткових обмежень повторюють доти, доки не буде знайдено цілочислового оптимального плану, або доведено, що його не існує.

Геометрична інтерпретація методу Гоморі

- Геометрично введення додаткового лінійного обмеження означає проведення гіперплощини (прямої), що відтинає від багатогранника (багатокутника) допустимих розв'язків задачі ту його частину, яка містить точки з нецілочисловими координатами, однак не торкається жодної цілочислової точки даної множини. Отриманий новий багатогранник розв'язків містить всі цілі точки, які були в початковому, і розв'язок, що буде отримано на ньому, буде цілочисловим

Приклад застосування методу відтинання

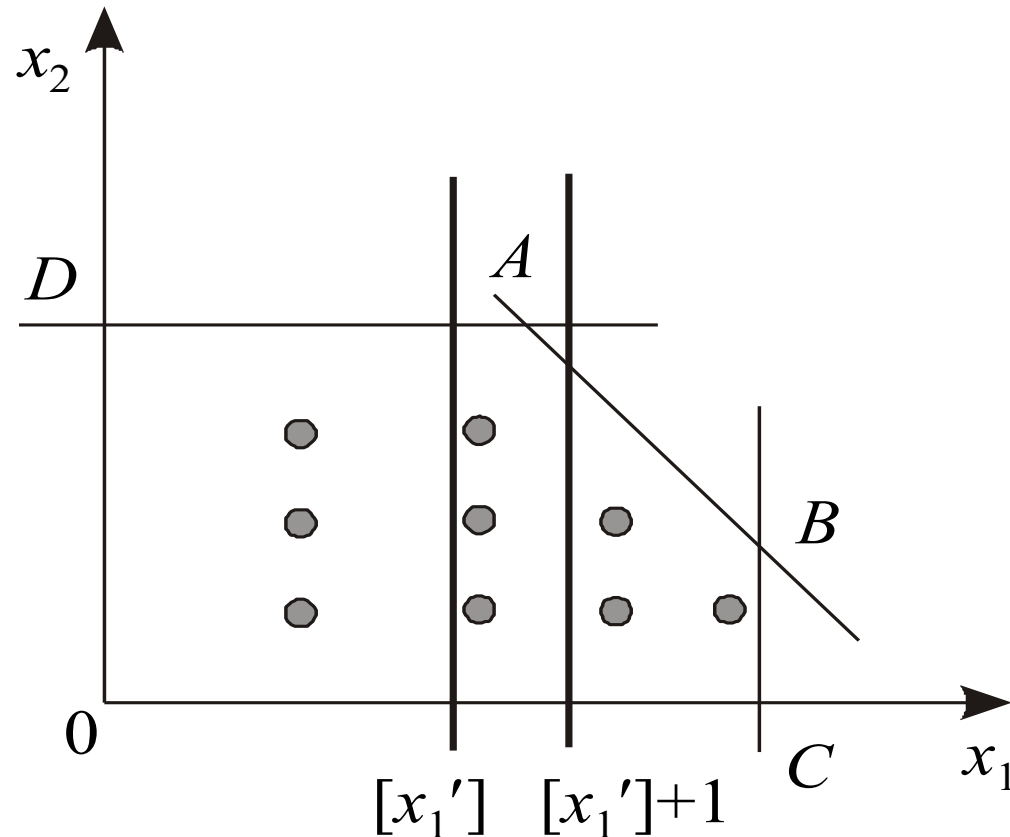




Метод гілок та меж

- Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача. Потім вводиться правило перебору.

Приклад застосування методу гілок та меж





Контрольні запитання

- *1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?*
- *2. Наведіть приклади економічних задач, що належать до цілочислових.*
- *3. Як геометрично можна інтерпретувати розв'язок задачі цілочислового програмування?*
- *4. Охарактеризуйте головні групи методів розв'язування задач цілочислового програмування.*
- *5. Опишіть алгоритм методу Гоморі.*
- *6. Що означає «правильне відтинання»?*
- *7. Опишіть алгоритм методу гілок та меж.*