



# СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

---

для студентів ОС "Магістр"

Спеціальності:

**174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології  
та робототехніка»**

Автор:

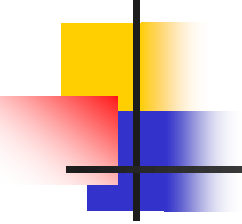
Доцент кафедри вищої та прикладної математики  
Шостак Сергій Володимирович

# ТЕМА 8 :

# ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

---

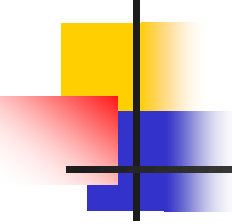
1. Економіко-математична модель транспортної задачі
  2. Початковий розподіл поставчань
    - 2.1. Правило врахування найменших затрат
    - 2.2. Правило „північно-західного кута”
  3. Перерозподіл поставчань
  4. Оцінка клітинок. Знаходження оптимального розподілу поставчань
  5. Відкрита модель транспортної задачі
  6. Виродження в транспортних задачах
  7. Алгоритм розв'язання транспортної задачі
- Контрольні запитання



# Специфіка транспортної задачі

---

- Виділення транспортної задачі в окремий розділ обумовлено тим, що ця задача має специфічну економіко-математичну модель і розв'язується не універсальним симплекс-методом, а за допомогою так званого розподільного методу і його різноманітних модифікацій.



# Найпростіші транспортні задачі

---

- Найпростішими транспортними задачами є задачі про перевезення деякого однорідного вантажу з пункту відправки (від постачальника) в пункт призначення (до споживача) при забезпеченні мінімальних затрат на перевезення.



# Початкові умови транспортної задачі

---

- За звичай початкові умови таких задач записують у вигляді таблиці. Наприклад, за  $m$  позначимо постачальників, а за  $n$  споживачів.
- показники  $C_{ij}$  означають затрати на перевезення одиниці вантажу від  $i$ -го постачальника ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) до  $j$ -го споживача ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $A_i$  – потужність  $i$ -го постачальника в запланований період (запаси вантажу),  $B_j$  – потреба  $j$ -го споживача в запланований період.
- через  $x_{ij}$  позначають постачання (кількість вантажу), яке заплановано для перевезення від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача.

# Математична модель транспортної задачі

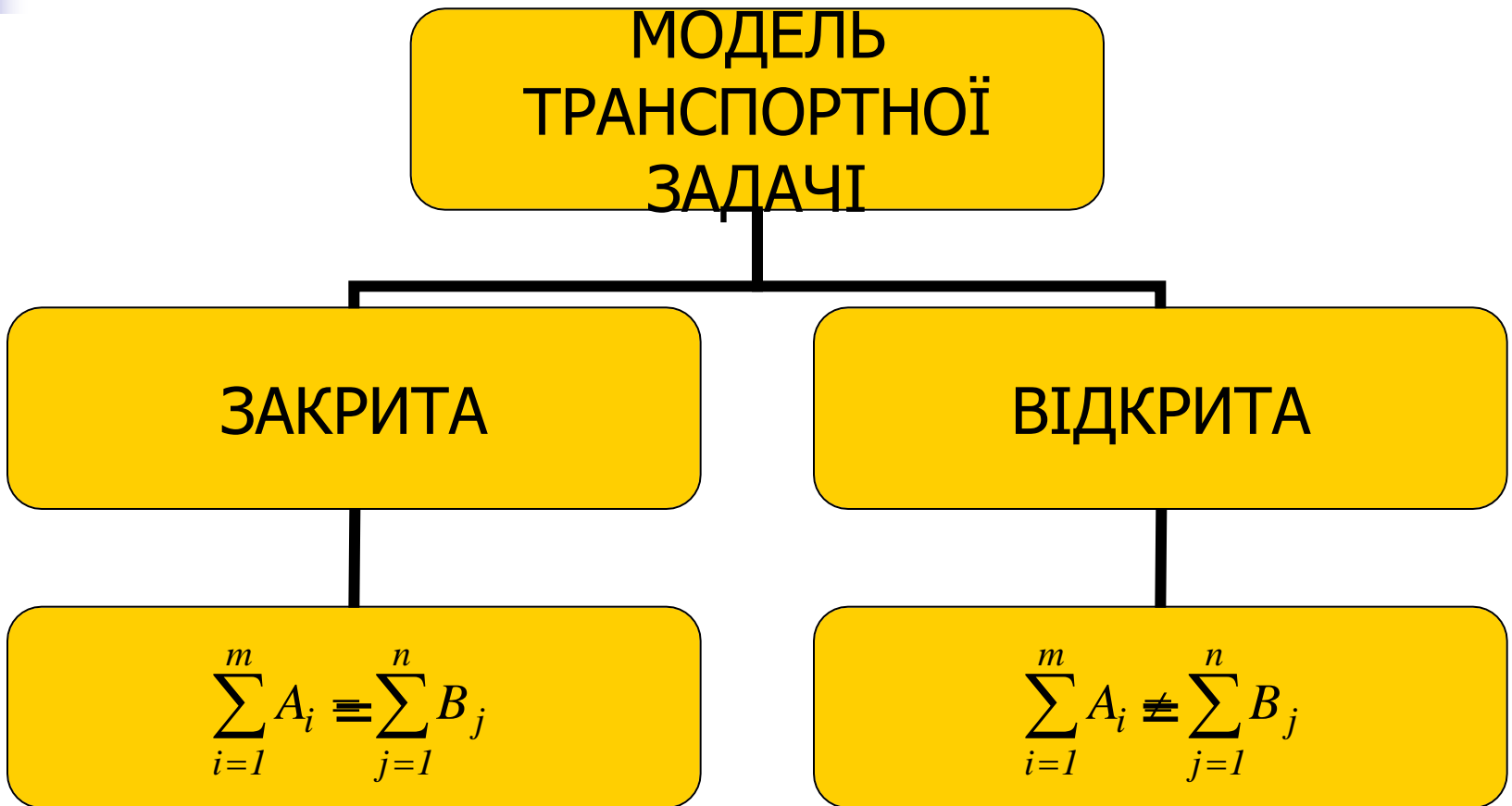
- Математично задача зводиться до знаходження мінімуму цільової функції, яка задає сумарні затрати на перевезення всього вантажу, тобто функції

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

при обмеженнях

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = A_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = A_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = A_m, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = B_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = B_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = B_n. \end{array} \right. \quad (1)$$

# Види математичних моделей транспортних задач

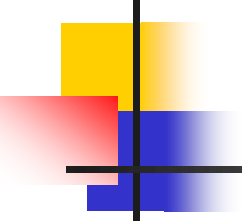


# Особливості економіко-математичної

## моделі транспортної задачі

- Відмітимо деякі особливості економіко-математичної моделі транспортної задачі в порівнянні з моделями, які розглядалися в попередніх розділах:
- – система (1) має вигляд рівнянь, тому відповідає необхідність вводити додаткові змінні;
- – матриця коефіцієнтів при змінних в системі (1) складається тільки з одиниць та нулів;
- – система (1) є системою  $n + m$  рівнянь з  $nm$  невідомими. Зауважимо, що  $n$  – кількість рядків та стовпчиків у таблиці, відповідно.





# Метод розв'язання транспортної задачі

---

- Специфічність економіко-математичної моделі транспортної задачі привела до появи особливого методу її розв'язку – **розподільного методу**, а в подальшому – до різних модифікацій цього методу.
- При цьому всі теоретичні передумови, які лежать в основі симплексного методу, зберігаються.



# Розподіл постачань

---

- Будь-який розв'язок транспортної задачі називається **розподілом постачань**. Так як постачання не може бути від'ємним, то мова йде тільки про допустимі розв'язки.
- Оптимальному розв'язку транспортної задачі відповідає оптимальний розподіл постачань, при якому цільова функція досягає свого мінімуму.
- В процесі розв'язку задачі потрібно отримати цей оптимальний розподіл постачань, якому відповідає якийсь допустимий базисний розв'язок системи обмежень.



# Суть розподільного методу

---

- При розподільному методі розв'язку транспортної задачі послідовно використовують розрахункові таблиці, які відповідають тому чи іншому кроку розв'язку. Кожна така таблиця включає визначення розподілу поставчань. Так як розподіл поставчань повинен відповідати базисному розв'язку, то клітинки таблиці повинні відповідати основним (базисним – додатним) і неосновним (вільним – рівним нулю) змінним.



# Запис розподілу постачань

---

- На практиці в клітинки, які відповідають основним змінним, записують постачання, а клітинки, які відповідають неосновним змінним, залишають не заповненими (вільними).



# Спосіб заповнення клітинок

---

- спосіб заповнення клітинок: в верхньому лівому куті записуємо показник затрат на перевезення одиниці вантажу від  $i$ -го постачальника ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) до  $j$ -го споживача ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), а в нижньому правому – постачання.
- Число заповнених клітинок визначається числом основних змінних системи обмежень (1), а останнє рівне числу лінійно незалежних рівнянь системи.

# Суть розв'язку транспортної задачі



---

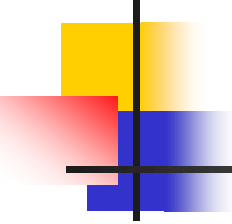
- Розв'язок транспортної задачі полягає в переході від одного розподілу постачань до іншого: від однієї таблиці до іншої. Новий розподіл постачань повинен знижувати або, в будь-якому випадку, не збільшувати загальну вартість затрат на перевезення. Перерозподіл постачань потрібно здійснювати до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний розподіл постачань.

# Етапи розв'язку транспортної задачі

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

I ЕТАП  
ОПОРНИЙ ПЛАН

II ЕТАП  
ОПТИМАЛЬНИЙ ПЛАН



# Початковий розподіл постачань (опорний план)

---

- Щоб здійснити перехід від одного розподілу постачань до іншого, потрібно мати **вихідний (початковий)** розподіл постачань.
- Перед тим, як розпочати заповнювати клітинки постачаннями, потрібно встановити кількість таких клітинок. Вона визначається кількістю лінійно незалежних рівнянь системи обмежень (1).





# Методи знаходження опорного плану

---

- Існують різні способи заповнення таблиці , а отже і отримання початкового розподілу поставчань. Для цьго використовують методи:
- **врахування найменших затрат (мінімальної вартості)**
- **діагональний („північно-західного кута“)**
- **подвійних відміток**
- **диференціальних рент та інші**



# Методи знаходження оптимального плану

---

- Для перевірки опорного плану на оптимальність користуються методами :
- **потенціалів**
- **розподільчим**



# Суть методу врахування найменших затрат

---

- Суть цього методу полягає в тому, що в першу чергу стараються заповнити клітинки, які мають найменший показник затрат на перевезення одиниці вантажу.



# Суть методу „північно-західного кута”

---

- В цьому випадку не звертають увагу на показники затрат на перевезення одиниці вантажу в клітинках. Починають рухатися з клітинки  $[1.1]$  – „північно-західного кута” таблиці, сходами спускаються вниз до клітинки  $[m.n]$ , виключаючи при цьому або один рядок, або один стовпчик. На останньому кроці виключається останній  $m$ -й рядок і останній  $n$ -й стовпчик.



# Поняття циклу

---

- **Циклом** називається замкнутий многокутник (не обов'язково випуклий), сторонами якого є горизонтальні і вертикальні відрізки, одна вершина якого співпадає з вільною клітинкою, для якої утворюється цикл, а всі інші – з заповненими клітинками.
- Якщо розподіл в таблиці такий, що заповнено рівно клітинок, то для кожної вільної клітинки можна скласти цикл, причому тільки один.



# Перерозподіл поставчань

---

- Надання поставчання в одну з вільних клітинок приводить до перерозподілу поставчань в деяких заповнених клітинках. В подальшому будемо говорити про перерозподіл поставчань в циклі.

# Алгоритм розв'язання транспортної задачі.

- 1. Визначають модель задачі.
- 2. За тим чи іншим методом складають початковий план перевезень постачань
- 3. Оцінюють отриманий розподіл постачань.
- 4. Для отримання нового поліпшеного розподілу постачань будують цикл перерозподілу для клітинки, яка має найменшу від'ємну оцінку
- 5. Проводять перерахунок оцінок, переводячи перш за все в нуль оцінку нової заповненої клітинки.
- 6. Рухаючись від однієї таблиці до іншої, повторюють п. 3, 4, 5 до тих пір, поки на якомусь етапі у відповідній таблиці не виявиться від'ємних оцінок.
- 7. Обчислюють мінімальні затрати на перевезення, для чого в підсумкову таблицю заносять показники затрат на перевезення з таблиці заданій в умові, і оптимальний розподіл.



# Контрольні запитання

---

- **Опишіть економічну і математичну постановку класичної транспортної задачі.**
- **Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?**
- **Сформулюйте необхідну і достатню умови існування розв'язку транспортної задачі.**
- **Які ви знаєте властивості опорних планів транспортної задачі?**
- **Які ви знаєте методи побудови опорного плану?**
- **Назвіть етапи алгоритму методу потенціалів.**
- **Назвіть умови оптимальності транспортної задачі.**