

Лабораторна робота 4. Ігрові моделі.

Взаємодія підприємств або суб'єктів може розглядатись як гра двох гравців, де виграш однієї сторони призводить до виграшу іншої. В теорії ігор така ситуація моделюється за допомогою гри *двох осіб з нульовою сумою*. При цьому розв'язання задачі полягає в тому, щоб обрати оптимальну стратегію та мінімізувати ризик для обох конфліктуючих сторін з використанням теорії ігор.

Наприклад, проаналізуємо дії двох підприємств А і В (гра двох осіб з нульовою сумою). Кожне підприємство обирає певну стратегію: стратегія підприємства А – A_i ($i = \overline{1, m}$), підприємства В – B_j ($j = \overline{1, n}$).

Результати реалізації стратегії описуються платіжними матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

рядки відповідають стратегіям підприємства А, а стовпці – стратегіям підприємства В.

a_{ij} – це виграш або прибуток підприємства А, якщо воно обрало стратегію A_i , а підприємство В – стратегію B_j .

Для вибору стратегій використаємо один з найпоширеніших мінімаксу-максиміну.

Нехай підприємство А обрало A_i , тоді за песимістичним сценарієм воно отримує прибуток $\min_j a_{ij}$, навіть у тому випадку коли підприємство В знає про стратегію, яку обрало підприємство А. У такому випадку А обирає такий варіант, який дозволить отримати максимальний з мінімальних прибутків:

$$a = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (4.2)$$

Подібна стратегія підприємства А позначається A_{i_0} і має назву **максимінної**. Гарантований прибуток підприємства називається **нижньою ціною гри**.

Підприємство В навпаки обирає стратегію, яка мінімізує його максимальні збитки з всіма можливими сценаріями поведінки підприємства А. Стратегія підприємства В позначається через B_{j_0} і називається **мінімаксною**, а його збитки – **верхньою ціною гри**:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (4.3)$$

Рішенням даної задачі вважається стан, при якому жодне підприємство не бажає змінювати обрану стратегію:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \quad (4.4)$$

Приклад 1. Знайти рішення задачі в чистих стратегіях

1	-3	-2
0	5	4
2	3	2

1. Спрощенню дана матриця не підлягає. На аркуші Excel в діапазон A2: C4 внесемо вихідні дані матриці А.

2. У клітинку D2 введемо формулу

$$= \text{МІН} (A2: C2)$$

Скопіювати цю формулу з клітинки D2 в діапазон D3:D4.

3. Для знаходження нижньої ціни гри в клітинку D6 ввести формулу

$$= \text{МАКС} (D2: D4)$$

В результаті в клітинці D6 буде перебувати нижня ціна гри = 7.

4. Для знаходження верхньої ціни гри в клітинку A5 помістити формулу

= МАКС (A2: A4).

Скопіювати цю формулу в комірки B5: C5.

5. У клітинку D7 ввести формулу

= МІН (A5: C5).

Тоді клітинка D7 буде містити верхню ціну гри = 7.

6. У клітинку D8 ввести формулу

= ЕСЛИ (D6 = D7; D6; "відсутня")

Описане рішення представлено в таблиці 7.

	A	B	C	D	E	F	G
	Платіжна матриця						
	1	-3	-2	-3			
	0	5	4	0			
	2	3	2	2			
	2	5	4				
	Нижня ціна гри			2			
	Верхня ціна гри			2			
	Чиста ціна гри			2			

Рисунок 1 – Рішення задачі

Відповідь. Для гравця А найкращою стратегією буде третя, для гравця В найкращою стратегією буде перша.

Приклад 2. Знайти рішення задачі в змішаних стратегіях, зводячи її до ЗЛП

4	3	1	4
2	5	6	3
1	0	7	0

З'ясуємо, чи існує рішення заданої матричної гри в чистих стратегіях

=ЕСЛИ(C6=C7;C6;"відсутня")									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	
							$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$		
	4	3	1	4	1		5.		
	2	5	6	3	2				
	1	0	7	0	0				
	4	5	7	4					
Нижня ціна гри		2							
Верхня ціна гри		4							
Чиста ціна гри		відсутня							

Рисунок 2 – Рішення задачі

Відповідь. Рішення матричної гри в чистих стратегіях відсутнє, отже потрібно розв'язувати задачу в змішаних стратегіях

Для гравця А математична модель задачі має вигляд

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 \geq 1 \\ 1x_1 + 6x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

де $p_i = x_i v$

Для гравця В матрична модель задачі має вигляд:

$$z = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 1y_3 + 4y_4 \leq 1 \\ 2y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ y_1 + 0y_2 + 7y_3 + 7y_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,4}$$

Алгоритм виконання завдання:

На аркуші програми Excel послідовно розташуємо числові матриці побудованих лінійних моделей (рис. 3-4).

10	Значення	0	0	0			
11	Цільова ф	1	1	1	0	max	
12		4	2	1	0	<=	1
13		3	5	0	0	<=	1
14		1	6	7	0	<=	1
15		4	3	0	0	<=	1
16	Ціна гри						
17	P						
18							
19							
20							
21		Оптимальна стратегія для гравця В			Ліве обмеження	Тип обмеження	Праве обмеження
22	Значення	0	0	0	0		
23	Цільова ф	1	1	1	1	min	
24		4	3	1	4	>=	1
25		2	5	6	3	>=	1
26		1	0	7	0	>=	1
27	Ціна гри						
28	P						
29							

Рисунок 3 – Аркуш з підготовленим шаблоном для рішення задачі

10	Значення	0	0	0			
11	Цільова ф	1	1	1	0	max	
12		4	2	1	0	<=	1
13		3	5	0	0	<=	1
14		1	6	7	0	<=	1
15		4	3	0	0	<=	1
16	Ціна гри	#ДЕЛ/0!					
17	P	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!			
18							
19							
20							
21		Оптимальна стратегія для гравця В			Ліве обмеження	Тип обмеження	Праве обмеження
22	Значення	0	0	0	0		
23	Цільова ф	1	1	1	1	0 min	
24		4	3	1	4	0 >=	1
25		2	5	6	3	0 >=	1
26		1	0	7	0	0 >=	1
27	Ціна гри	#ДЕЛ/0!					
28	P	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!		
29							

Рисунок 4 – Аркуш з формулами

Після цього для кожної задачі запускаємо Пошук рішення.
Отримаємо рішення задачі (рис.5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Оптимальна стратегія для гравця В				Ліве обмеження	Тип обмеження	Праве обмеження		
Значення	0,222222	0	0,111111						
Цільова ф	1	1	1	0,333333	max				
	4	2	1	1	<=	1			
	3	5	0	0,666667	<=	1			
	1	6	7	1	<=	1			
	4	3	0	0,888889	<=	1			
Ціна гри	3								
P	0,666667	0	0,333333						
	Оптимальна стратегія для гравця В				Ліве обмеження	Тип обмеження	Праве обмеження		
Значення	0,222222	0	0,111111	0					
Цільова ф	1	1	1	1	0,333333	min			
	4	3	1	4	1	>=	1		
	2	5	6	3	1,111111	>=	1		
	1	0	7	0	1	>=	1		
Ціна гри	3								
P	0,666667	0	0,333333	0					

Рисунок 5 – Рішення матричної гри

Тоді можна отримати оптимальну стратегію для торгової фірми (гравця А). Вона буде представлена вектором (0,666667; 0;0,311). При цьому фірма отримує дохід не менше 3 у. од.

Відповідь. Отже, торговій фірмі треба з ймовірністю 0,66 обирати План 1, з ймовірністю 0,33 обирати План 3.

Завдання 1. Знайти рішення задачі в чистих стратегіях.

Варіант 1.

2	2	2	2
2	2	3	4

Варіант 2.

4	5	3
6	7	4
5	2	3

Варіант 3.

8	4	7
8	5	9
7	7	8

Варіант 4.

5	1	3
3	2	4
-3	0	1

Варіант 5.

1	-3	-2
0	5	4
2	3	2

Варіант 6.

1	4	1
2	3	4
0	-2	7

Варіант 7.

1	3	4
2	3	4
0	-2	7

Варіант 8.

2	5	3
4	5	6
3	7	6

Варіант 9.

5	6	7	5
6	7	9	8
5	8	4	6

Варіант 10.

-5	3	1	2
5	5	4	6
-4	-2	0	-5

Варіант 11.

8	4	3	7
7	6	8	9
8	2	4	6

Варіант 12.

8	3	9	4
6	5	8	7
3	4	5	6

Варіант 13.

1	-3	-2
2	5	4
2	3	2

Варіант 14.

4	5	8	7	9
3	4	6	5	6
7	6	10	8	11

Варіант 15.

4	9	5	3
7	8	6	9
7	4	2	6

Варіант 16.

7	2	5	1
2	2	3	4
5	3	4	4

Варіант 17.

8	6	4	7	7
5	4	3	4	6
4	3	2	3	4

Варіант 18.

2	4	7	6	5
3	8	4	9	7
3	4	5	6	2

Варіант 19.

8	4	3	7
7	6	8	9
8	2	4	6

Варіант 20.

4	5	8	7	9
3	4	6	5	6
7	6	10	8	11