ВІДНОШЕННЯ

Відношення – одне з основних понять сучасної математики. Мову відношень використовують для опису зв'язків між об'єктами. Відношення застосовуються при побудові реляційних баз даних, які, в свою чергу, широко застосовуються для збереження та обробки найрізноманітнішої інформації. Відношення також часто використовуються у програмуванні, зокрема для представлення складних структур даних: списків, дерев, графів та ін. Для формального опису різних можливих комбінацій з елементів множин, що входять до відношення, використовують поняття декартового (прямого) добутку

1.1. Декартовий добуток множин

Прямим, або **декартовим добутком** множин A і B називають множину всіх упорядкованих пар (x, y) – таких, що перша компонента пари належить множині A , а друга компонента – множині B :

$$A\times B=\{(x, y)|\ \forall x\in A,\ \forall y\in B\}$$

де $\times$ – символ (знак) прямого добутку. При цьому порядок множників є суттєвим.

Щоб знайти декартів добуток множин A і B , діють (згідно з означенням) так: беруть елемент $x_1 \in A$ і залучають до нього в пару по черзі всі елементи y_j, $j=1,...,m$, із множини B ; потім таким самим чином утворюють пари з елементами $x_2 \in A$, $x_3 \in A$, …; процес побудови пар продовжують доти, поки не буде перебрано всі елементи множини A.

Потужність прямого добутку множин A *і* B визначають співвідношенням:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|=n\cdot m.$$

***Приклад*.**

$A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{4, 5\} \Rightarrow A\times B=\{(a,4),(a,5),(b,4),(b,5),(c,4),(c,5),(d,4),(d,5)\}$;

$|A\times B|=4\cdot 2=8$.

Зрозуміло, що прямий добуток множин також може містити пари з однаковими першим і другим елементами. На підставі означення робимо висновок, що для операції прямого добутку не виконуються закони комутативності та асоціативності:

$A\times B \neq B\times A$, $A\times(B\times C) \neq (A\times B)\times C$, але справедливі розподільні закони відносно об'єднання, перетину та різниці:

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$,

$A\times(B\cap C) = () \cap (A\times C)$,

$A\times(B \setminus C) = (A\times B) \setminus (A\times C)$.

Операцію прямого добутку можна узагальнити на довільну скінченну кількість множин.

Прямим або декартовим добутком *n* множин A_1 , A_2 , ..., A_n , $n\in N$, називають множину всіх можливих упорядкованих наборів (x_1, x_2, …, x_n) з n – елементів, які називають кортежами довжини n,

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(x_1, x_2,\ldots,x_n) \mid x_1\in A_1, x_1\in A_2 ,\ldots,x_n\in A_n\}$$

Декартів добуток $A\times A\times\ldots\times A$, n однакових множин називають **декартовим добутком *n*-го степеня** множини A і позначають

$$A^n = \underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n\ разів}\ (n\geq 1) – n\text{-й декартів степінь множини } A$$

Декартів добуток двох однакових множин $A^2 = A\times A$ називають **декартовим квадратом** множини A. Декартів добуток трьох однакових множин$A^3 = A\times A\times A$ – **декартовим кубом** множини A.

Якщо A, B – числові множини, то прямому добутку $A\times B$ можна надати геометричну інтерпретацію, а саме: множину $A\times B$ можна зобразити на координатній площині, вважаючи, що кожній парі $(x, y)\in A\times B$ відповідає точка площини з координатою (x, y). Координатне зображення точок площини вперше було запропоновано французьким математиком і філософом Рене Декартом, тому введена теоретико-множинна операція і називається декартовим добутком.

1.2. Поняття відношення. Бінарне відношення

Під час вивчення різноманітних явищ (процесів) часто доводиться, спираючись на ті чи інші властивості об'єктів, зіставляти між собою елементи однієї й тієї ж множини або різних множин і описувати відношення, в яких вони перебувають один щодо одного

Приклади відношень:

1) $a\in A$ − зв’язок між елементом та множиною;

2) $A\subset B$ − зв’язок між множинами;

3) $<, \leq , \neq$ − нерівності;

4) $=$ − рівність;

5) «*бути братом»*;

6) «*ділення без остачі»*.

Відношенням *R* на множинах A_1 , A_2 , ..., A_n називається деяка підмножина *R* декартового добутку цих *n* множин $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Загалом відношення використовують для позначення властивостей певних груп об’єктів, чисел чи сутностей. Якщо відношення *R* має певні властивості, то елемент $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in R$ володіє властивостями відношення *R*.

В залежності від кількості множин, на яких будується відношення, відношення бувають: якщо відношення задано на одній множині (*n*=1), то відношення називається **унарним,** якщо задано на декартовому добутку двох множин (*n*=2), то воно називається **бінарним**, трьох множин – **тернарним**, *n* множин – ***n*-арним**. Бінарні відношення $R \subset A \times B$ здебільшого розглядають за умови *A*=*B*.

Відношення як математичний об'єкт стали предметом вивчення спеціальної математичної теорії – теорії відношень, елементи якої розглянемо на прикладі найпростіших і найпоширеніших відношень – бінарних, тобто відношень пар елементів.

Бінарним відношенням (БВ) між елементами множин *A* та *B* (або на множинах *A* та *B*) називають будь-яку (довільну) підмножину *R* упорядкованих пар (*x*, *y*), декартового добутку множин *A* та *B*, тобто

$$(R - \text{БВ між елементами множин } A \text{ і } B) \quad \leftrightarrow \quad R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\},$$

і кажуть, що: *x* та *y* пов'язані відношенням *R*, або елемент *x* перебуває у відношенні *R* до *y* , або для *x і y* виконується відношення *R*.

Замість запису $(x, y) \in R \subseteq A \times B$ часто використовують більш простий: *x R y*. Якщо *A* = *B*, то $R \subset A \times A$ (декартовому квадрату) і в цьому випадку стверджують, що бінарне відношення *R* задано на множині *A*.

Приклади бінарних відношень

1. Якщо *N* − множина натуральних чисел, то відношення $R = \{(x, y) \in N \times N \mid x \geq y\}$ виконується для пар (5,3)∈R або 5R3, (7,1)∈R або 7R1, (2,2)∈R або 2R2, але не виконується для пар (1,7)∉R, (9,11)∉R, (2,5)∉R.

2. Якщо *X* − множина студентів університету, а *Y* − множина груп університету, то відношення множин *X* і *Y* – є множина $R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x - \text{студент групи } y\}$.

3. Нехай *A*={0, 1, 2}, *B*={*a*, *b*} та задано відношення *R*={(0,a), (0,*b*), (1,*a*), (2,*b*)}. Отже, 0*Ra*, оскільки (0,*a*) ∈ *R*, але $1 \overline{R} b$, оскільки *(1,b)*∉ *R).*

Множину всіх перших елементів пар із R називають **областю визначення,** або існування БВ R і позначають через $\boldsymbol{D(R)}$: $D(R) = \{x \mid \exists\, y : (x, y) \in R\}$.

Множину всіх других елементів пар із R називають **областю значень** БВ R і позначають через $\boldsymbol{E(R)}$: $E(R) = \{ y \mid \exists x : (x, y) \in R\}$

Полем $\boldsymbol{F(R)}$, бінарного відношення R називають об'єднання області визначення і області значень: $F(R) = D(R) \cup E(R)$.

Наприклад. Для БВ $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ маємо: $D(R) = \{2,1\}$, $E(R) = \{1,2,3,4\}$.

Бінарні відношення R *і* S називають **рівними** ($R = S$), якщо R *і* S рівні як множини:

$$\forall x, \forall y : (x, y) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in S.$$

У теорії бінарних відношень важливу роль відіграють також відношення: доповнення, тотожнє, універсальне (повне) і порожнє.

Доповнення відношення R позначають $\overline{R}$ і містять всі впорядковані пари множини декартового добутку $A \times B$, крім тих, які належать R.

Тотожнє або **діагональне бінарне відношення** це відношення, яке виконується між елементом і ним самим.

$$I = \{(x, x) \mid \forall x \in A\}$$

Універсальне (повне) бінарне відношення це відношення, яке повністю співпадає з декартовим добутком множин, на яких воно визначено тобто містить всі елементи із $A \times B$.

$$R = U = A \times B \text{ тобто } R = U = \{(x, y) \mid (x \in A, y \in B\},$$

Порожнє бінарне відношення це відношення, якому не задовольняє жодна пара елементів із множини A. Позначають: $R = \varnothing$

Наприклад. У заданій множині $A = \{2,4,6,8,10,12\}$ знайти відношення R *бути простим числом.* Воно буде дорівнювати порожній множині.

1.3. Способи задання бінарних відношень

Є багато різних способів задання відношень. Найбільш розповсюджені з них задання відношень **списком** (**переліком**) пар, у **табличній формі**, за допомогою **певної властивості відношення, матриці**, **графічно (**за допомогою орієнтованого графа, який можна подати різними способами). Розглянемо кожний з цих способів на прикладі.

Приклад. Нехай бінарне відношення R задано на множині $A \times B$ декартова добутку: $R \subset A \times B$, де A = {1, 2, 3} та B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1. Зручний спосіб задати зв'язок між елементами двох множин – записати ***властивість, притаманну цьому відношенню.***

$R = \{ (a, b) \mid a \text{ дільник } b \}$.

2. ***Списком пар (переліком).***

Бінарне відношення R можна задати у вигляді списку пар елементів декартова добутку $A\times B$, для яких дане відношення виконується:

$R = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$.

3. ***Табличний спосіб.***

Проводять горизонталі, кожну з яких позначають деяким елементом із множини A та вертикалі, позначаючи їх елементами із множини B, а потім жирними точками позначають перетин тих прямих, які задовольняють відношенню R.

4. ***Матричний спосіб.***

Табличний спосіб завжди можна розглядати як різновид матричного, так як таблицю представити у вигляді матриці. Тому відношення R можна задати також булевою матрицею суміжності або відношення, рядки якої позначають елементами множини A, а стовпчики – елементами множини B і на перетині рядка a_i зі стовпчиком b_j стоїть 1 в разі a_iRb_j, та 0 – у противному випадку:

Розглянемо $R\subset A\times B$, де *множина* $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, а *множина* $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$. Відповідна булева матриця $M_R=\{m_{ij}\}$ складатиметься з елементів

$$m_{ij}=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ a_i\overline{R}b_j\\ 1,\ \textit{якщо}\ a_iRb_j\end{cases},$$

де кількість рядків матриці рівна кількості елементів множини A, а кількість стовбців рівна кількості елементів множини B, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Матриця бінарного відношення R прикладу має вигляд:

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

5. ***Графічний спосіб***

Кожному елементу пари $(a,b)\in R$ поставимо у відповідність **точку площини**.

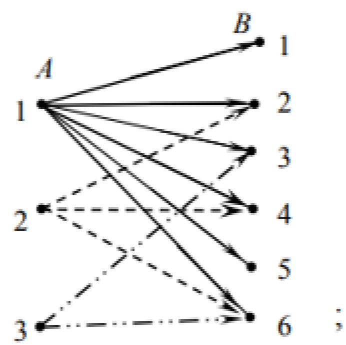
Кожній парі (a,b), такій, що $(a,b)\in$R і $a\neq b$, – напрямлений відрізок від a *до* b (прямолінійний або криволінійний), який назвемо **орієнтованим ребром**.

Парам виду (a, a) $\forall a \in A$ – **петлю** з фіксованим напрямком обходу.

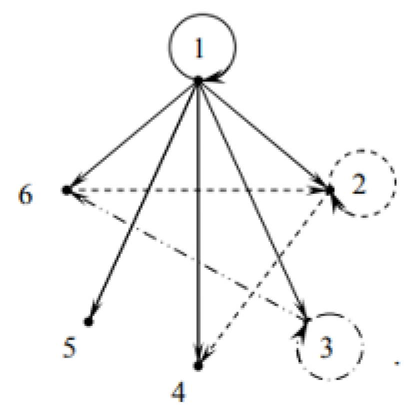
Геометричну фігуру, побудовану так називають **графом** бінарного відношення R

Якщо відношенню R належать пара (a,b) і пара (b, a), то в графі буде два ребра з вершинами *a і b*, які орієнтовані в протилежні боки. У цьому випадку два ребра замінюють (для спрощення зображення) одним ребром з двома стрілками.

Цей спосіб проілюструємо за допомогою відношення з попереднього прикладу. При цьому використаємо два варіанти зображення бінарного відношення:

1) 

;

2) 

.

Завдання унарних відношень в пам'яті комп'ютера. Найбільш простий, але не раціональний спосіб, – задати унарне відношення R списком, тобто перерахувати всі елементи, що володіють властивістю, що задає це відношення. У пам'яті ЕОМ таке задання є *записом*. Інший, більш раціональний, спосіб – упорядкувати елементи кінцевого універсуму і підмножини, що задає унарні відношення, поставити у відповідність його характеристичний вектор. У пам'яті ЕОМ таке задання є *двійковим кодом*.

1.4. Операції над відношеннями

Над відношеннями можна виконувати операції, притаманні множинам: об’єднання, перетин, різниця і доповнення.

Нехай R - бінарне відношення. Універсальною множиною буде множина $U=F(R)\times F(R)$, де $F(R)$ – поле відношення R. Універсальною множиною для двох бінарних відношень R і S береться множина $U=C\times C$, де C – об'єднання полів кожного із заданих відношень: $C = F(R) \cup F(S)$.

Об'єднанням відношень R і S називається відношення

$R \cup S = \left\{ (a,\ b) \mid (a,\ b) \in R \text{ або } (a,\ b) \in S \right\}$.

Перерізом відношень R і S називають відношення

$R \cap S = \left\{ (a,\ b) \mid (a,\ b) \in R \ і \ (a,b) \in S \right\}$.

Різницею відношень R і S є відношення

$R \setminus S = \left\{ (a,\ b) \mid (a,\ b) \in R \ і \ (a,\ b) \notin S \right\}$.

Доповненням відношення $\overline{R}$ буде відношення

$\overline{R} = U \setminus R$.

Приклад.

Нехай задано відношення $R=\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$, $S=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$. Виконати над цими відношеннями наступні операції: $\overline{R}$, $\overline{S}$, $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $S \setminus R$.

Розв'язання. Поля бінарних відношень $F(R) = \{1, 2, 3\}$, $F(S) = \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді множина $C = F(R) \cup F(S) = \{1, 2, 3, 4\}$ і універсальна множина буде такою:
$U=C\times C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2),$
$(3,3), (3, 4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$. Тоді:
$\overline{R}=\{(1,2), (1,3), (1,4), (2, 1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3, 4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$
$\overline{S}=\{(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3, 4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
$R \cup S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$,
$R \cap S = \{(1,1)\}$,
$R \setminus S = \{(2,2), (3,3)\}$,
$S \setminus R = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$.

Крім розглянутих операцій, над відношеннями визначені операції **знаходження оберненого відношення та композиції відношень.**

Оберненим відношенням щодо певного відношення R ($R \subseteq A\times B$) називається таке відношення R^{-1}, яке задається на декартовому добутку $B\times A$ і утворюється парами $(y, x) \in B\times A$, для яких $(x, y) \in R$:

$$R^{-1}=\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Наприклад. Для бінарного відношення $R=\{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ обернене бінарне відношення R^{-1} згідно з означенням дістають переставленням елементів кожної пари бінарного відношення R: $R^{-1} = \{(1, 2),(2,1),(3,1),(4, 2)\}$

Нехай R *і* S – бінарні відношення на деякій множині A. Множину пар (x, y), які утворюються із крайніх елементів двох пар із S *і* R , середні елементи яких рівні між собою, тобто $(x, z)\in S$ і $(z, y)\in R$, називають ***композицією*** або ***суперпозицією*** відношень S *і* R і позначають через $R\circ S$:

$$R\circ S=\{(x, y) \mid \exists\, z\text{: } x\, S\, z \text{ і } z\, R\, y\}.$$

Наприклад. Якщо $R=\{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12)\}$ і $S=\{(1,2), (2,4), (3,6)\}$, то $R\circ S=\{(1,6), (2,12)\}$.

Нехай R – відношення на множині A. Степінь R^n, n=1, 2, 3 ..., визначають індуктивно:

$R^1 = R$, $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Отже, зокрема

$R^2 = R\circ R$, $R^3 = R^2 \circ R = (R\circ R)\circ R$.

Приклад. Нехай на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R=\{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Знайдемо R^n, n=2,3,4,5. За означенням послідовно отримаємо:

$R^2 = R\circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$,

$R^3 = R^2\circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$,

$R^4 = R^3\circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$,

$R^4 = R^3$. Можна переконатись, що $R^5 = R^4$.

Якщо відношення A і B задані булевою матрицею, то для того, щоб знайти булеву **матрицю об’єднання чи перетину** цих відношень, необхідно знайти *диз'юнкцію (сума) чи кон’юнкцію(добуток) булевих матриць* A і B.

$M_{R_1\cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$,

$M_{R_1\cup R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$.

Диз'юнкція булевих $m\times n$ *матриць* P та Q – це $m\times n$ матриця $Z=P\vee Q$, елементи якої $z_{ij} = p_{ij} \vee q_{ij}$, де $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$.

Кон'юнкція булевих $m\times n$ матриць P та Q – це $m\times n$ матриця $Z=P\wedge Q$, елементи якої $z_{ij} = p_{ij} \wedge q_{ij}$, де $i=1,...,m$, $j=1,...,n$.

Якщо відношення A і B задані булевою матрицею, то для того, щоб знайти булеву **матрицю композиції цих відношень**, необхідно знайти *булевий добуток булевих матриць* A і B.

Нехай P – $m \times n$ матриця, Q – $k \times n$ матриця.

Тоді *булевий добуток* $P \bullet Q$ – це $m \times n$ матриця $Z=[z_{ij}]$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, де

$$z_{ij} = (p_{i1} \wedge q_{1j}) \vee \ldots \vee (p_{ik} \wedge q_{kj}), \text{ або } z_{ij} = \bigvee_{p=1}^{k} (p_{ir} \wedge q_{rj}).$$

Булевий добуток матриць асоціативний.

Булевий степінь для булевих $m \times n$ матриць (позначають через $A^{[r]}$, r – натуральне) визначають так:

$$A^{[r]} = A \bullet A \bullet \ldots \bullet A$$

За означенням покладають $A^{[0]} = I_n$, де I_n – одинична $m \times n$ матриця. Операції над відношеннями легко виразити через матриці, які ці відношення задають:

$$M_{S \circ R} = M_R \bullet M_S,$$

$$M_{R^k} = M_R^{[k]}.$$

На основі операції композиції, введемо нову операцію – транзитивного замикання відношень. Нехай відношення R задано на множині A.

Транзитивним замиканням R^* називається таке відношення, що складається з кортежів (x, y), для яких виконується: або кортеж $(x,y) \in R$, або знаходиться скінченна послідовність елементів $z_1, z_2, \ldots. z_n \in A$, така, що всі кортежі $(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots., (z_n, y)$ належать відношенню R. Очевидно, що $R \subset R^*$.

Приклад. Нехай визначена множина людей {Ігор, Павло, Марія, Олена, Оксана} і відомі такі факти:

Ігор є нащадком Павла,

Марія є нащадком Павла,

Олена є нащадком Марії,

Оксана є нащадком Олени,

Володя є нащадком Ігора.

Цю інформацію можна подати у вигляді відношення R : “Є нащадком”.

Тоді факти можна представити таким чином: Ігор R Павло, Марія R Павло, Олена R Марія, Оксана R Олена.

Знайдемо транзитивне замикання відношення R^*.

R^* = {(Ігор, Павло), (Марія, Павло), (Олена, Марія), (Оксана, Олена), (Олена, Павло), (Оксана, Павло) }.

1.5. Властивості бінарних відношень

До найвідоміших властивостей (характеристик) бінарних відношень належать: рефлексивність (r), антирефлексивність ($\bar{r}$), симетричність (s), антисиметричність ($\bar{s}$), асиметричність (as), транзитивність (t), антитранзитивність ($\bar{t}$).

Рефлексивність. Бінарне відношення $R \subseteq A^2$ називають **рефлексивним** (R_r) , якщо воно містить тотожне БВ (кожний елемент на множині A знаходиться у відношенні R з самим собою), тобто:

$$R_r \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : (x, x) \in R.$$

Приклади. БВ R_r є: відношення подібності на множині трикутників; відношення рівності на числових множинах. Мовою зображень рефлексивність описують так:

$R_r \Leftrightarrow$ (кожна вершина графа БВ має петлю);

$R_r \Leftrightarrow$ (усі елементи головної діагоналі матриці БВ дорівнюють одиниці).

Антирефлексивність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **антирефлексивним** ($R_{\bar{r}}$) , якщо воно не містить жодної пари з однаковими елементами, тобто:

$$R_{\bar{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : (x, x) \notin R.$$

Приклади. БВ $R_{\bar{r}}$ є відношення строгої нерівності; відношення "бути молодшим"; "бути сильнішим".

Мовою зображень антирефлексивність описують так:

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (жодна з вершин графа БВ не має петлі);

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (усі елементи головної діагоналі матриці БВ дорівнюють нулю).

Симетричність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **симетричним** (R_s), якщо воно разом із кожною парою (x, y) містить і пару (y, x) ($R = R^{-1}$), тобто:

$$R_s \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R.$$

Приклади. БВ R_s є: відношення паралельності на множині прямих; подібності на множині трикутників; дружби на множині людей.

Симетричність мовою зображень описують так:

$R_s \Leftrightarrow$ (усі ребра графа БВ неорієнтовані);

$R_s \Leftrightarrow$ (матриця БВ симетрична відносно головної діагоналі).

Антисиметричність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **антисиметричним** ($R_{\bar{s}}$,) якщо воно не містить разом пари (x, y) і (y, x) з різними компонентами x, y, тобто:

$$R_{\bar{S}} \;\Leftrightarrow\; \forall\, x, y \in A : (x, y) \in R \text{ і } (y, x) \in R \Rightarrow x = y.$$

Приклади. БВ $R_{\bar{S}}$ є: відношення нестрогої нерівності на множині дійсних чисел; включення ($\subseteq$) на множинах; "бути командиром" на множині військовослужбовців.

Антисиметричність мовою зображень описують так:

$R_{\bar{S}} \Leftrightarrow$ (граф БВ не має неорієнтованих ребер, але має петлі);

$R_{\bar{S}} \Leftrightarrow$ (матриця БВ не має одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі, на якій є одиниці (хоча б одна)).

Асиметричність. БВ $R \subseteq A^2$ називається **асиметричним** (R_{as}) або **несиметричним**, якщо воно не містить разом пари (x, y) і (y, x), тобто:

$$R_{as} \;\Leftrightarrow\; \forall\, x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R.$$

Приклади. БВ R_{as} є: відношення строгої нерівності ($<$, $>$) на множині дійсних чисел; строге включення ($\subset$) на множинах; відношення "бути батьком" на множині людей.

Асиметричність мовою зображень описують так:

$R_{as} \Leftrightarrow$ (граф БВ не має ні неорієнтованих ребер, ні петель);

$R_{as} \Leftrightarrow$ (матриця БВ не має одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі, яка містить тільки нулі).

Транзитивність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **транзитивним** (R_t) , якщо з умови, що елементи *x і z, z і y* перебувають у відношенні R , випливає, що елементи x і y також пов'язані відношенням R, тобто:

$$R_t \;\Leftrightarrow\; \forall\, x, y, z \in A : (x,z) \in R \text{ і } (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R.$$

Приклади. БВ R_t : відношення паралельності на множині прямих, адже для прямих x , y , z є слушним: якщо x ||z і z|| y , то x || y ; відношення подібності на множині трикутників; відношення "більше" ("менше") на множині дійсних чисел R ; відношення "бути дільником" на множині натуральних чисел N ; відношення "бути родичем" на множині людей.

Транзитивність мовою зображень БВ описують так:

$R_t \Leftrightarrow$ (граф БВ для кожної пари ребер виду (x,z), (z, y) має замикальне ребро (x, y) і кожна вершина неорієнтованого ребра має петлю);

$R_t \Leftrightarrow$ (матриця БВ така, що для кожної пари одиничних елементів, один із яких стоїть в i -му рядку і k -му стовпці, а другий в k -му рядку і j -му стовпці, існує одиничний елемент, розташований на перетині i -го рядка і j -го стовпця).

Крім того, наявність одиниць на головній діагоналі ніколи не порушує транзитивності.

Антитранзитивність. Бінарне відношення R на множині A ($R \subseteq A^2$) називається **антитранзитивним**, якщо для будь яких x , y , $z \in A$ з xRy та yRz слідує що не виконується xRz. Тобто якщо $(x , y) \in R$ і $(y , z) \in R$, то $(x, z) \notin R$.

$R\bar{t}$ $\Leftrightarrow$ (матриця БВ така, що для кожної пари одиничних елементів, один із яких стоїть в i -му рядку і k -му стовпці, а другий в k -му рядку і j -му стовпці, існує нульовий елемент, розташований на перетині i -го рядка і j -го стовпця)

Граф антитранзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Приклад. Розглянемо шість відношень на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$;

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$;

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$;

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$;

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$;

$R_6 = \{(3,4)\}$.

Знайти властивості цих відношень.

Відношення R_3 та R_5 – *рефлексивні*, оскільки вони містять усі пари вигляду *(a,a),* тобто (1,1), (2,2), (3,3), (4,4). Решта відношень не є рефлексивними, зокрема, R_1, R_2, R_4, R_6 не містять пари (3,3).

Відношення R_4 та R_6 – *антирефлексивні*, оскільки вони містять усі пари вигляду (*a,a*), тобто (1,1), (2,2), (3,3), (4,4).

Зауважимо, що R_1, R_2 є ні рефлексивними, ні антирефлексивними.

Лише відношення R_2 та R_3 *симетричні*, тому що містять тільки симетричні елементи.

Лише відношення R_4, R_5, R_6 є *антисиметричними*. У кожному із цих відношень немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a, b) \in R$ та $(b, a) \in R$.

Є також відношення, які не є симетричними, ані антисиметричними. Прикладом такого відношення є R_1.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення повинно бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 є антисиметричним відношенням, яке не є асиметричним через те, що воно містить пару (1,1).

Відношення R_3, R_5, R_6 із є *транзитивними.* Для кожного з них можна пересвідчитись, що якщо пари (*a, b*) та (*b ,c*) належать цим відношенням, то й пара *(a, c)* теж їм належить. Відношення R_1, R_2, R_3 не є транзитивними: $(3,4)\in R_1$, $(4,1)\in R_1$, але $(3,1)\notin R_1$; $(2,1)\in R_2$, $(1,2)\in R_2$, але $(2,2)\notin R_2$; $(2,1)\in R_3$, $(1,4)\in R_3$, але $(2,4)\notin R_3$.

1.6. Відношення еквівалентності

Розглянемо деякі найчастіше використовувані типи бінарних відношень.

До основних типів бінарних відношень належать: відношення **еквівалентності** (рівнозначності, рівносильності, рівноцінності), **порядку** (буває нестрогого, строгого порядку), **домінування** (перевищення, переваження), **толерантності** (схожості, поблажливості).

Нехай задана множина *A* і відношення *R*, що визначене на множині декартового добутку *A*: $R\subseteq A\times A$.

Бінарне відношення *R*, що має властивості **рефлексивності**, **симетричності** і **транзитивності**, називається ***<u>відношенням еквівалентності</u>*** на множині А.

Якщо *R* – відношення еквівалентності, елементи *a, b* ∈ *A* і знаходяться у відношенні *R* між собою, тобто має місце *aRb,* то елементи *a, b* називаються **еквівалентними**

Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності чисел, відношення паралельності прямих, відношення «народитися в один день», тощо.

Наприклад, на множині *A* студентів факультету інформаційних технологій розглянемо бінарне відношення *R* – «навчатись на одному факультеті»: $R=\{(a,b): a$ навчається на одному факультеті з $b\}$.

Дане відношення є рефлексивним, оскільки справедливе aRa для всіх $a\in A$. Відношення *R* симетричне, оскільки для будь-яких $a,b\in A$ із *aRb* випливає *bRa*. Це відношення є транзитивним, оскільки для всіх $a,b,c\in A$ із того, що виконуються aRb і bRc, випливає aRc. Отже, R – відношенням еквівалентності.

Приклад. Нехай на множині $A=\{1,2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ задано бінарне відношення
$R=\{(1,1),\ (2,\ 2),(3,3),\ (4,\ 4),(5,5),(6,\ 6),\ (1,\ 2),\ (1,\ 4),(2,1),\ (2,\ 4),(3,5),\ (4,1),\ (4,\ 2),(5,3)\}$.
Переконатись, що *R* є відношенням еквівалентності.

Розв'язання. Представимо відношення *R* у вигляді матриці $C_{6\times6}$:

Видно, що головна діагональ матриці утворена лише одиницями, отже відношення R є рефлексивним;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матриця симетрична відносно головної діагоналі, отже це відношення є симетричним;

для елементів матриці виконується: якщо $c_{ki} = 1$ і $c_{ij} = 1$, то $c_{kj} = 1$, тоді R – транзитивне.

Отже, R є відношенням еквівалентності на множині A.

Найважливіше значення відношення еквівалентності R полягає в тому, що це відношення визначає ознаку, яка допускає подання множини A у вигляді об'єднання підмножин, що не перетинаються (неперетинні підмножини), або , інакше кажучи, ***розбиття множин A на класи еквівалентності*** . І навпаки, будь-яке розбиття множини A на підмножини, що не перетинаються, визначає між елементами цієї множини деяке відношення еквівалентності.

Теорема. Якщо відношення R – відношення еквівалентності на множині A, то множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям C множини A. І навпаки, для довільного розбиття множини A можна вказати відношення еквівалентності, множина класів, еквівалентності якого співпадає з C.

У випадку скінченної множини *A* розбиття її на класи еквівалентності відбувається таким чином.

Нехай на множині A задане відношення еквівалентності R.

✓ Виберемо елемент $a_1 \in A$ і утворимо клас C_1, що складається з усіх елементів $y \in A$, для яких виконується відношення a_1Ry. Клас C_1 може складатися тільки з одного елемента a_1, якщо не існує інших елементів y, таких, що a_1Ry. Зауважимо, що через рефлексивність відношення еквівалентності завжди виконується a_1Ra_1.

✓ Якщо $C_1 \neq A$, то виберемо елемент $a_2 \in A$, що не входить до класу C_1 і утворимо клас C_2, який складається з усіх елементів $y \in A$, для яких виконується відношення a_2Ry.

✓ Якщо $C_1 \cup C_2 \neq A$, то виберемо елемент $a_3 \in A$, що не входить до класів C_1 і C_2 і утворимо клас C_3.

✓ Будемо продовжувати побудову класів доти, доки в A не залишиться жодного елемента, що не входить до одного з класів C_i. Вийде система класів C_1, C_2, …, C_n.

Ця система класів називається **системою класів еквівалентності** і має такі **властивості**: (I – довільна множина індексів)

1. *Класи попарно не перетинаються*

$$C_i \cap C_j = \varnothing,\ i \neq j\ (i, j \in I)\ .$$

2. *Об'єднання класів еквівалентності дорівнює самій множині A*

$$\cup\ C_i = A$$

3. *Будь-які два елементи із однієї підмножини перебувають у відношенні R (еквівалентні)*
4. *Між елементами різних підмножин відношення R відсутнє (не еквівалентні).*

Така система класів еквівалентності і **називається розбиттям множини *A***.

Якщо не важливо, щоб множини не перетинались (властивість1), то така система класів еквівалентності називається **покриттям множини *A*** . Отже, для покриття важлива властивість2, а для розбиття 1 і 2 (це завжди покриття).

Приклад.

- Відношення «вчитися в одній групі» на множині студентів університету є відношенням еквівалентності і розбиває всю множину студентів університету на окремі групи.
- Відношення «мати однакове ім'я» на визначеній множині людей є відношенням еквівалентності і розбиває всю множину людей на класи еквівалентності – групи людей з однаковими іменами.

Приклад. Виписати всі класи еквівалентності відношення R – «мати ту ж саму остачу при діленні на три», заданого на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Розв'язання. Розбиття даної множини A відносно відношення R складається із таких класів еквівалентності:

$C_0 = \{3,6,9\}$ - діляться на три без остачі;

$C_1 = \{1,4,7\}$ - при діленні на три остача становить 1;

$C_2 = \{2,5,8\}$ - при діленні на три остача дорівнює 2.

Тоді система класів C={{3,6,9}, {1,4,7},{2,5,8}}є розбиттям множини A (а значить і покриттям).

Тобто множину A за відношенням R можна подати у вигляді об'єднання підмножин C_0, C_1, C_2 , що не перетинаються.

Класом еквівалентності за відношенням *еквівалентності R,* для елемента $a \in A$ або кажуть **породженим елементом** $a \in A$, називається множина усіх елементів множини *A,* які перебувають у відношенні R з елементом a:

$$[a] = \{x : xRa, x \in A\}.$$

Клас еквівалентності, який відповідає елементу *a*, співпадає із перерізом відношення R за елементом a, тобто $R[a]$.

Множину A / R всіх класів еквівалентності за таким відношенням еквівалентності R називають ***фактор-множиною*** множини A:

$$A / R = \{[a] : a \in A\}$$

Приклад. Знайти класи еквівалентності, породженими елементами множини $A = \{1,2,3, 4,5, 6\}$, та фактор-множину (розбиття) множини A за відношенням еквівалентності $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),(2,1),$ $(2,4),(3,5),(4,1),(4,2),(5,3)\}$. Довести, що R - відношення еквівалентності.

Розв'язання. Доведення еквівалентності даного відношення.

I спосіб.

1. Кожний елемент множини А знаходиться у відношенні R сам до себе, тобто присутні пари (*a, a*)
2. Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення R^{-1}. Легко переконатись, що $R^{-1} = R$, отже відношення є симетричним.
3. Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення R^2. (композицію). Пересвідчуємось, що $R^2 = R$

Отже, R є відношенням еквівалентності.

II спосіб.

Скористаємось наслідком з теореми

Наслідок. Якщо БВ є рефлексивним на множині A і одноелементні перерізи множини A за відношенням R або співпадають або не перетинаються, то R - *відношення еквівалентності.*

Скористаємось наслідком з теореми

Для цього потрібно спочатку знайти одноелементні перерізи $R[a]$ множини A за відношенням R (виписуємо класи еквівалентності, породженими кожним елементом множини A)

$$R[1] = \{x : xR1\} = \{1,2,4\}.$$

Тут $1 \in R[1]$, оскільки $(1,1) \in R$; $2 \in R[1]$, оскільки $(2,1) \in R$; $4 \in R[1]$, оскільки $(4,1) \in R$; не існує ніякого іншого $x \in A$ такого, що $(x,1) \in R$.

Аналогічно, одержимо:

$R[2] = \{x : xR2\} = \{2,1,4\}$;

$R[3]=\{x : xR3\}=\{3,5\}$;

$R[4]=\{x : xR4\}=\{4,1,2\}$;

$R[5]=\{x : xR5\}=\{5,3\}$;

$R[6]=\{x : xR6\}=\{6\}$.

Оскільки для довільного $a \in A$ виконується умова $a \in R[a]$, то R – рефлексивне. Оскільки усі перерізи або співпадають, або не перетинаються, то відношення R є відношенням еквівалентності.

Знайшли всі класи еквівалентності. Маємо тільки три різні класи еквівалентності:

$R[1]=R[2]=R[4]=\{1,2,4\}$, $R[3]=R[5]=\{3,5\}$, $R[6]=\{6\}$.

тому фактор-множина множини A за відношенням R:

$A/R=\{R[1], R[3], R[6]\}=\{\{1,2,4\},\{3,5\},\{6\}\}$.

Матриця відношення еквівалентності. Нехай відношення еквівалентності задано в множині A.

Елементи, що належать одному класу еквівалентності, попарно еквівалентні між собою. Отже, стовпці матриці відношення еквівалентності для елементів одного класу еквівалентності однакові та містять одиниці у всіх рядках, які відповідають цим елементам. Оскільки класи еквівалентності не перетинаються, у стовпцях, які відповідають елементам різних класів, не буде одиниць в одних і тих самих рядках.

Приклад. Для відношення еквівалентності, заданого класами еквівалентності $A_1=\{a_1,a_2,a_3\}$; $A_2=\{a_4,a_5\}$; $A_3=\{a_6,a_7,a_8,a_9\}$. При побудові матриці відношення розташуємо елементи множини так, щоб ті елементи, які належать одному класу еквівалентності, були поруч. Тоді одиничні елементи матриці відношення еквівалентності утворять непересічні квадрати, діагоналі яких розташовуються на головній діагоналі матриці:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
a_2	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
a_3	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0
a_5	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
a_7	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
a_8	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
a_9	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**

1.7. Відношення порядку

Відношення R на множині A називають ***відношенням часткового порядку*** (або *частковим порядком*), якщо воно **рефлексивне**, **антисиметричне** й **транзитивне**. Множину A із частковим порядком R називають *частково впорядкованою множиною* й позначають $(A,\ R)$

Приклад*. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Відношення R задамо як звичайне порівняння чисел: $(a,b)\in R$ тоді й тільки тоді, коли $a\leq b$, $(a,b\in A)$. Неважко безпосередньо переконатись, що це відношення є частковим порядком на множині A.

Приклад**. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Відношення R_1 задамо так: $(a,\ b)\in R_1$ тоді й тільки тоді, коли a є дільник b. Отже: $R_1=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (8,8), (12,12), (1,2), (1,3), (1,8), (1,12), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,6), (3,12), (4,8), (4,12), (6,12)\}$. Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, отже, є відношенням часткового порядку на множині A. ▲

Два елементи a та b частково впорядкованої множини $(A,\ R)$ називають *порівняльними,* якщо $a\,R\,b$ або $b\,R\,a$. Якщо a та b такі елементи, що ані $a\,R\,b$, ані $b\,R\,a$, то їх називають *непорівняльними.*

Приклад. Елементи 3 та 4 множини $(A,\ R_1)$ із попереднього прикладу – непорівняльні.

Якщо $(A,\ R)$ частково впорядкована множина, у якій будь–які два елементи порівняльні, то таку множину називають *тотально* або *лінійно впорядкованою,* а частковий порядок R називають *тотальним* або *лінійним порядком.* Отже, множина $(A,\ R)$ із *прикладу** лінійно впорядкована, множина $(A,\ R_1)$ із *прикладу*** частково впорядкована, але не лінійно впорядкована. Лінійно впорядковану множину називають також *ланцюгом.*

Приклад. Нехай $A=E_2^n$ – множина всіх булевих векторів довжини n. Визначимо частковий порядок на цій множині так: $(a_1,a_2,\ldots, a_n)<(b_1,b_2,\ldots, b_n)$ тоді й тільки тоді, коли $a_i\leq b_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Цей частковий порядок не є лінійним порядком. Наприклад, не можна порівняти вектори (010000) та (101000).

Матриця відношення часткового порядку. Оскільки відношення часткового порядку є рефлексивним, головна діагональ матриці цього відношення містить одиниці. Через те, що воно є асиметричним, жоден одиничний елемент не має симетричного собі відносно головної діагоналі. Оскільки це відношення є транзитивним, наявність одиниць на перетині i-го стовпця та j-го рядка й одиниці на перетині j-го стовпця і k-го рядка спричинює наявність одиниці на перетині i-го стовпця та k-го рядка.

У частково впорядкованій множині (A, R) запис $a \le b$ означає, що $(a, b) \in R$. Запис $a<b$ означає, що $a \le b$, але $a \ne b$. Якщо $a<b$, то кажуть, що *a передує b* (*a менше b*) або *b виходить* з *a* (*b більше a*). Елемент $b \in A$ *безпосередньо виходить* з $a \in A$ тоді й лише тоді, коли $a<b$ і не існує такого $c \in A$, що $a<c<b$. У такому випадку кажуть також, що елемент *a безпосередньо передує* елементу *b*.

Приклад. Для відношення часткового порядку R= "ділиться націло на" на множині A= {1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28} матриця відношення має такий вигляд:

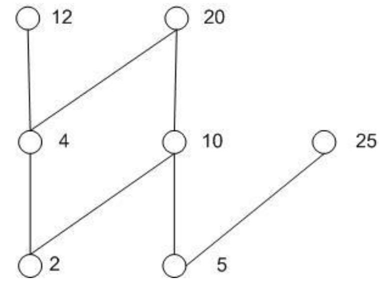
	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**12**	**14**	**21**	**28**
1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4	**1**	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0	0
6	**1**	**1**	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
7	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
12	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0	**1**	0	0	0
14	**1**	**1**	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0
21	**1**	0	**1**	0	0	**1**	0	0	**1**	0
28	**1**	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**

Діаграма Хассе. Розглянемо частково впорядковану множину (A, R). Зобразимо кожний елемент $a_i \in$ A точкою a_i на площині й розглянемо всі впорядковані пари (a_i, a_j). Зобразимо точку a_j вище точки a_i тоді й лише тоді, коли $a_i < a_j$ і з'єднаємо точки a_i та a_j лінією, якщо a_j безпосередньо виходить з a_i. Результатом процесу є діаграма Хассе: у цій діаграмі існує шлях, який веде від точки a_n до точки a_m, якщо $a_n < a_m$.

Зазначимо, що символ ≤ використовують для позначення довільного відношення часткового порядку.

Елементи частково впорядкованих множин, які мають певні екстремальні властивості, є дуже важливими в багатьох застосуваннях. Елемент частково впорядкованої множини називають *максимальним*, якщо він не менший від будь-якого елемента цієї множини. Отже, *a* є максимальним елементом частково впорядкованої множини (A, R), якщо не існує такого $b \in A$, що $a<b$. Аналогічно, елемент називають *мінімальним*, якщо він не більший від будь-якого елемента частково впорядкованої множини. Отже, *a* є мінімальним, якщо не існує такого $b \in A$, що $b<a$. Максимальні та мінімальні елементи легко визначити на діаграмі Хассе – це, відповідно, "верхні" і "нижні" її елементи ("верхні" елементи не мають висхідних ребер, а "нижні" – низхідних).

Приклад. На множині A={2, 4, 5, 10, 12, 20, 25 } задано відношення часткового порядку $R=\{(a,\ b)\ |$ а *ділить* $b\}$. Знайдемо максимальні й мінімальні елементи множини (A, R). Діаграму Хассе для цієї множини зображено на *рис. 6.3*. Із цієї діаграми робимо висновок, що максимальні елементи 12, 20 та 25, а мінімальні – 2 та 5. Цей приклад свідчить, що частково впорядкована множина може мати понад один максимальний або мінімальний елемент.



Приклади виконання практичних завдань

Приклад. Подати відношення, задані на множині A={1,2,3}, у матричному вигляді:

- R_1={(1,2), (2,3), (3,2), (3,3)};
- R_2={(1,2), (2,2), (2,3), (2,1), (3,1)};
- R_3={(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)}.
- $D = R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

Розв'язання:

Для кожного відношення будуємо матричне представлення таким чином: ставимо "1" у і-му рядку j-му стовбці, якщо пара (і, j) належить відношенню і "0" в протилежному випадку.

R_1	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	1
3	0	1	1

R_2	1	2	3
1	0	1	0
2	1	1	1
3	1	0	0

R_3	1	2	3
1	1	1	1
2	0	1	0
3	0	0	1

Для того, щоби знайти відношення D, знайдемо спершу композицію $R_1 \circ R_2$

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

Тепер знайдемо комбінацію усіх відношень: $R_1 \circ R_2 \circ R_3 = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

Приклад. На множині A задано бінарні відношення:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; A = R_1 \cap R_2; \; D = R_1 \circ R_2 \circ R_3.$$

Визначити, які з цих відношень:

а) рефлексивні; б) антирефлексивні; в) транзитивні; г) симетричні; д) асиметричні; е) антисиметричні; є) відношення еквівалентності; ж) відношення часткового порядку.

Розв'язання

а) R_1 і R_3 – рефлексивні, оскільки у матрицях цих відношень по головній діагоналі розташовані тільки одинички.

б) антирефлексивних відношень немає, оскільки в жодного з відношень немає на головній діагоналі лише нулів. R_2 не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним.

в) антисиметричних відношень немає.

г) асиметричних відношень немає.

д) R_1 – симетричне відношення, бо його матричне представлення є симетричним.

е) R_1 – транзитивне, R_2 і R_3 – не транзитивні. Найлегше перевірити транзитивність, взявши композицію відношення самого на себе. Тоді результуюче відношення міститиме всі пари (a,c), де aRb і bRc. Тобто транзитивне відношення, піднесене до квадрату, має бути підмножиною самого себе:

$$R_1 \circ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset R_1, \; R_2 \circ R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \not\subset R_2 \;\; R_3 \circ R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \not\subset R_3.$$

є) R_1– відношення еквівалентності, бо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

ж) оскільки немає антисиметричних відношень, то і немає відношень часткового порядку.

1.8 Відношення домінування. Відношення толерантності

Бінарне відношення $R \subset A^2$ називають ***відношенням домінування***, якщо воно **антирефлексивне** та **асиметричне**.

Із відношенням найчастіше стикаються тоді, коли A є множиною людей (колективів, груп, команд тощо) чи множиною властивостей (якостей) об'єктів. Кажуть, що x домінує над y, коли наприклад, спортсмен x переміг y змаганнях спортсмена y; особа x користується авторитетом у особи y; якість x переважає якість y. Жоден індивідуум не може домінувати над собою (*антирефлексивність*), у кожній парі (x, y) тільки один індивідуум домінує над іншим (*асиметричність*).

У бінарному відношенні домінування властивість транзитивності не має місця. Дійсно, якщо у змаганнях команда x перемогла команду z, а команда z перемогла y, то це не означає, що команда x переможе команду y. У разі виконання (додатково) умови транзитивності приходять до відношення строгого порядку.

Бінарне відношення $R \subset A^2$ називають ***відношенням толерантності***, якщо воно водночас **рефлексивне** і **симетричне**.

У бінарному відношенні толерантності властивість транзитивності також не має місця. У разі виконання (додатково) умови транзитивності приходимо до відношення еквівалентності

Відношення толерантності є тлумаченням інтуїтивного відчуття схожості й нерозрізнюваності. Кожен об'єкт нерозрізнюваний сам із собою (рефлексивність), а схожість двох об'єктів не залежить від того, у якому порядку їх порівнюють (симетричність). Водночас, якщо один об'єкт схожий на другий, а другий схожий на третій, то це зовсім не означає, що всі вони схожі між собою, тобто властивість транзитивності не виконується.

***Приклади толерантних відношень*:**

- толерантність на множині слів: якщо слова x і y мають по три однакові букви (пара – пашá – каша – Маша – Даша – душа);

- толерантність на множині кортежів: наявність у парі кортежів хоча б однієї спільної компоненти;
- толерантність на множині числових функцій: наявність однакових значень двох функцій, що відповідають одному й тому ж значенню аргументу.

1.9. Функціональні відношення Відображення

Ми розглянули бінарні відношення, які є підмножинами декартова добутку двох множин. Бінарні відношення, визначені на декартовому квадраті множини, представляють найбільший інтерес, оскільки вони мають ряд властивостей, які дозволяють виділяти такі корисні відношення, як відношення еквівалентності, порядку тощо. Для відношень, утворених різними множинами, коли $R \subseteq A \times B$, говорити про рефлексивність, симетричність і транзитивність вже не має сенсу, оскільки перша і друга координата R можуть мати різну природу. Наприклад, відношення «x народився в році y» є підмножиною декартового добутку множини людей і множини років (підмножини цілих додатних чисел) і ставить у відповідність кожній людині рік його народження. Для дослідження подібних відношень запроваджуються поняття відповідності, відображення, функції.

Говорять, що між множинами A і B визначено ***відповідність*** (відношення) $\boldsymbol{R}$, якщо задана деяка довільна підмножина декартового добутку $A \times B$. Множина A називається *областю визначення*, B — *областю значень* відношення R.

Відображенням множини $\boldsymbol{A}$ на множину $\boldsymbol{B}$ називається така відповідність, яка кожному елементу $x \in A$ співставляє принаймні один елемент $y \in B$. Тоді елемент y називається *образом* елементу x, а x — *прообразом* елементу y, або *змінною*, або *аргументом*. Відображення множини A на множину B позначатимемо $\boldsymbol{f}$**:** $\boldsymbol{A \to B}$, де $\boldsymbol{f}$ – ім'я відображення.

Приклад. На рис. 2.9.1. показано відповідність між множинами A і B, на рис.2.9.2. — відображення множини A в множину B.

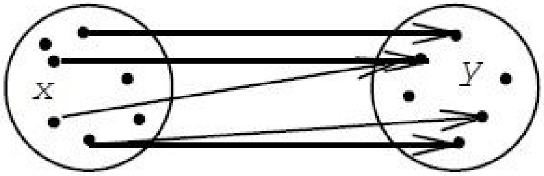


Рис. 2.9.1. Відповідність

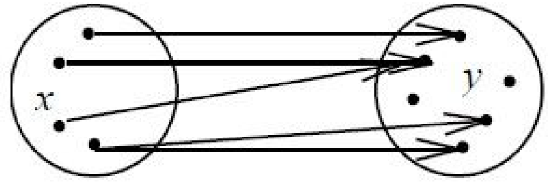
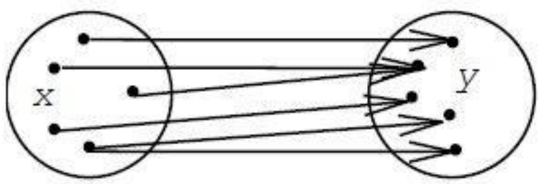


Рис. 2.9.2. Відображення

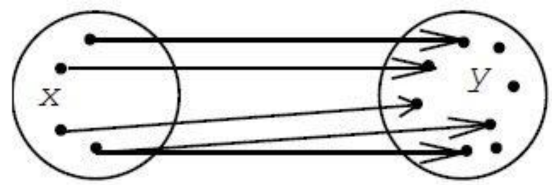
Відображення A на B називається ***сюр'єктивним***, або *сюр'єкцією*, або *накладенням,* якщо будь-який елемент $y \in B$ є образ принаймні одного елементу $x \in A$.

Це означає, що кожен елемент з A має не менше одного прообразу в B. На графі в кожен елемент ***y*** входить принаймні одна дуга

Відображення A в B називається ***ін'єкцією***, або *вкладенням,* якщо кожен елемент $y \in B$ є образ тільки одного елементу $x \in A$, або взагалі не має прообразу. На графі відповідності в кожен елемент y входить найбільше одна дуга,

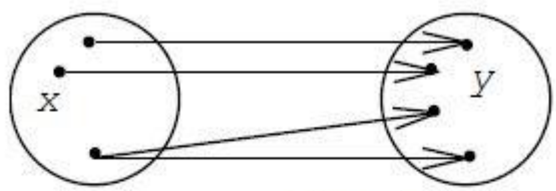


Сюр'єкция.



Ін'єкція.

Якщо відображення є одночасно і сюр'єкцією, і ін'єкцією, то воно називається ***бієктивним відображенням***, або *бієкцією*.

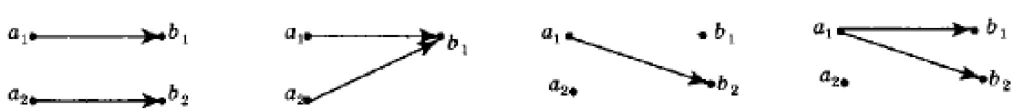


Бієкція.

В цьому випадку кожен елемент B є образом деякого, і притому єдиного, елементу з A**.** На графі відображення показана бієкція: у кожен елемент ***y*** входить одна і лише одна дуга,

Відношення R між множинами A та B ($R \subseteq A \times B$) називається ф**ункціональним** якщо всі його елементи (упорядковані пари) різні за першим елементом: кожному елементу x із A або відповідає один елемент $b \in B$, такий що xRy або такого елемента взагалі немає.

Приклад. Відношення, графи яких зображені на рисунках а)-в) — функціональні, а відношення на рисунку г) — не є функціональним.



а) б) в) г)

Приклади функціональних та нефункціональних відношень

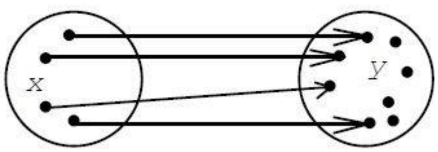
Функціональне відношенням $f \subseteq A \times B$, усі елементи якого різні за першим елементом, тобто кожному елементу $x \in A$ відповідає один і тільки один елемент y із B називається ***функцією (функціональне відображення)*** f.

Елемент y називають **значенням** (**образом**) функції у точці x (за заданого значення аргументу x); x – **прообраз** образу функції.

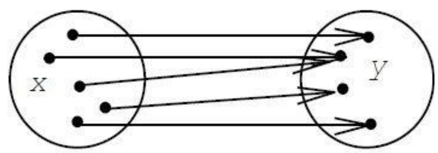
Для позначення застосовують таку символіку:

$$x f y,\ (x, y) \in f,\ y = f(x),\ f : x \to y,\ x \xrightarrow{\quad f \quad} y,\ x \to f(x)$$

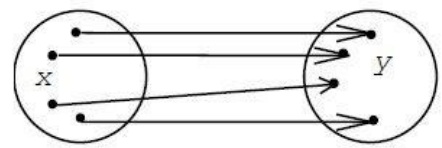
На рисунках наведені графи функціональної ін’єкції, функціональної сюр’єкції, функціональної бієкції.



Функціональна ін’єкція.



Функціональна сюр’єкція.



Функціональна бієкція.

Функціональна бієкція f: $A \to B$ встановлює таке відображення, при якому кожен елемент з A має єдиний образ в B, а кожен елемент з B має єдиний прообраз в A, тому функціональна бієкція називається взаємнооднозначною.

$(x, y) \in f$, –

Приклад. Які із представлених відношень є функціями:

а) $\{(1,3), (2,5), (4,9), (2,11)\}$ б) $\{(4,2), (5,3), (1,11), (7,2)\}$

в) $\{(x, x^2) | \ x \in R\}$ г) $\{(x^2, x) | \ x \in R\}$

Розв’язання.

а) відношення не є функцією, тому що два елементи (2,5) і (2,11) мають однаковий перший елемент;

б) відношення є функцією, тому що перший елемент кожної впорядкованої пари рівно один раз;

в) відношення є функцією, графіком якої буде парабола

г)) відношення не є функцією, тому що його елементами є впорядковані пари з однаковими першими елементами, наприклад (4, 2) і (4, -2)

Відповіді на питання, чи є представлене відношення функцією і чи є функція взаємнооднозначною, можна легко одержати за допомогою його *графічної ілюстрації*.

Відповідно до визначення функції, ніякі два різних елементи відношення не можуть мати однакових перших координат**.** Отже, промінь, спрямований паралельно осі Oy , повинен перетинати графік відношення не більше одного разу. Тому що взаємнооднозначні функції переводять різні елементи в різні, то промінь, спрямований паралельно осі Ox, повинен перетинати графік відношення теж не більше одного разу.

Приклад. З’ясувати, чи є дані відношення функціями? Якщо так, то чи будуть вони взаємнооднозначні?

а) $f=\{(x, y)|\ y^2=-x,\ x, y \in R\}$

б) $f=\left\{(x, y)\ |\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\ x \in R,\ y \in R_+\right\}$

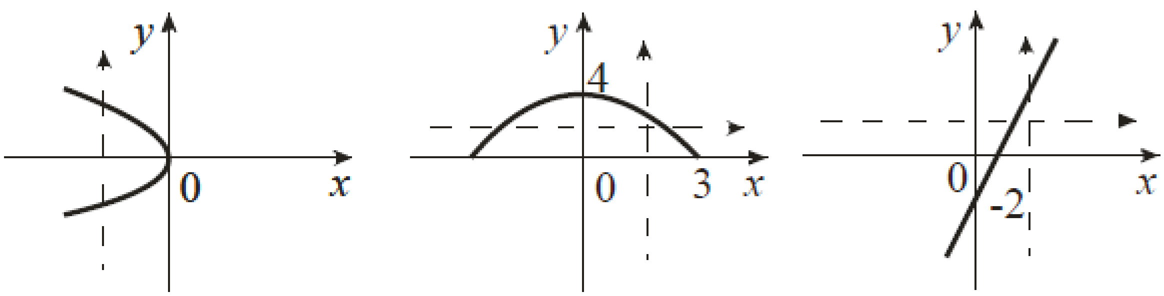
в) $f=\{(x, y)|\ 3x-2y+6=0,\ x, y \in R\}$

Розв’язання:

а) відношення не є функцією, тому що є два різних елементи, що мають однакові перші елементи;

б) відношення є функцією, тому що не існує елементи, що мають однакові перші елементи. Дана функція не є взаємнооднозначною, тому що існують елементи, що мають однакові другі елементи

в) відношення є функцією. Дана функція є взаємнооднозначною, тому що переводить різні елементи в різні.



(а) (б) (в)

Контрольні запитання

1. Що таке n -арне відношення? Бінарне відношення?
2. Як записати те, що елемент x знаходиться у відношенні з елементом y ?
3. Визначте порожнє відношення.
4. Наведіть приклад універсального відношення.
5. Що таке тотожнє відношення?
6. Сформулюйте визначення оберненого відношення до заданого відношення.
7. Чи буде відношення, обернене до тотожнього тотожнім?
8. Якими способами можна задати довільне бінарне відношення?
9. Дайте визначення доповненню до відношення.
10. Чим відрізняється обернене відношення до даного від доповнення до того ж відношення?
11. Поясніть в чому сутність матричного способу задання бінарного відношення.
12. Як задати бінарне відношення за допомогою графічного способу?
13. Чи будуть однаковими графи тотожнього, універсального та порожнього відношень?
14. Сформулюйте визначення композиції двох бінарних відношень.
15. Чи існують бінарні відношення, композиція яких є порожнім відношенням?
16. Що таке степінь відношення?
17. Наведіть приклад відношення, друга степінь якого є універсальним відношенням.
18. Що таке рефлексивне бінарне відношення? Антирефлексивне відношення?
19. Визначте симетричне відношення.
20. Сформулюйте визначення асиметричного і антисиметричного відношень. Чи відрізняються вони між собою?
21. Наведіть різні приклади рефлексивного, антирефлексивного, симетричного, асиметричного і антисиметричного відношень.
22. Чи існує бінарне відношення, яке є одночасно як рефлексивним, так і антирефлексивним?
23. Що таке транзитивне бінарне відношення? Антитранзитивне відношення?
24. Наведіть різні приклади транзитивного і антитранзитивного відношень.
25. Дайте визначення лінійного відношення. Наведіть різні приклади лінійних відношень.
26. Чи існує бінарне відношення, яке є одночасно транзитивним і антитранзитивним?
27. Запишіть приклад бінарного відношення, яке одночасно є як симетричним, так і антисиметричним.
28. Що таке еквівалентність? Наведіть приклади еквівалентностей.
29. Як визначається клас еквівалентності, що породжується деяким елементом?
30. Чи може клас еквівалентності бути порожньою множиною?
31. Визначте розбиття множини.

32. Скільки різних розбиттів має множина, що складається з чотирьох елементів?
33. Чи існує множина, потужність якої співпадає з потужністю усіх розбиттів цієї множини?
34. Який зв'язок існує між множиною всіх еквівalенттнос-тей та множиною всіх розбиттів заданої множини?
35. Що таке фактор-множина?
36. Як позначається фактор-множина?
37. Наведіть приклади фактор-множин.
38. Сформулюйте визначення відношення квазіпорядку.
39. Що таке квазіупорядкована множина?
40. Як визначається частковий порядок? Частково упорядкована множина?
41. Наведіть приклади відношень квазіпорядку, часткового порядку.
42. Чи існує відношення квазіпорядку, що не є частковим порядком?
43. Визначте поняття мінімального та максимального елементів упорядкованої множини.
44. Що таке найменший та найбільший елемент упоряд-кованої множини?
45. Чим відрізняється мінімальний (максимальний) еле-мент від найменшого (найбільшого)?
46. Сформулюйте визначення ланцюга та нелінійно упоря-дкованої множини. Наведіть приклади
47. Що таке функціональне відношення? Наведіть приклади функціональних відношень.
48. Яким символом позначається множина всіх функціональних відношень на множинах A та B ?
49. Як визначається область визначення відношення? Область значень відношення?
50. Чи може область визначення відношення не збігтися з областю його значень?
51. Визначте поняття відображення.
52. Як позначається множина всіх відображень з множини A у множину B ?
53. Сформулюйте визначення образу та прообразу елемента при заданому відображенні.
54. Що таке образ множини при заданому відображенні? Прообраз множини?
55. Як записати, що x є образом елемента y , а елемент u– прообразом елемента v при відображенні f ?
56. Дайте визначення графіка відображення. Як будується графік відображення?
57. Що таке ін'єктивне відображення? Сюр'єктивне?
58. Чи може ін'єкція бути сюр'єкцією та навпаки?
59. Як визначається бієктивне відображення?
60. Наведіть приклади ін'єктивних, сюр'єктивних та бієктивних відображень.

Список використаної літератури

1. Бондаренко М.Ф. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Харків: “Компанія СМІТ”, 2004. – 480 с.

2. Капітонова Ю.В. Основи дискретної математики: Підручник / Ю.В. Капітонова., С.Л. Кривий., О.А. Летичевський., Г.М . Луцький – К.: Наукова думка, 2002. – 580 с.

3. Матвієнко М.П. Дискретна математика. Навчальний посібник.– К. Ліра – К, 2013. – 348 с.

4. Нікольський Ю.В. Дискретна математика. Підручник / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – Львів: “Магнолія – 2006”, 2010. – 432 с.

5. Бардачов Ю.М. Дискретна математика / Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова., В.Є. Ходаков. – К.: Вища школа, 2008. – 383 с.

6. Дискретна математика: Навчальний посібник / Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Харсун О.М., Пашкова Т.Л., Баранов М.І. та інш. – Одеса; ОНАЗ ім. О.С.Попова, 2010. – 196 с.

8. Федоренко Н.Д. Основи дискретного аналізу. Навчальний посібник / Федоренко Н.Д., Демченко В.В. – К.: КНУБА, 2003. – 108 с.

9. Сердюк П. В. Відношення, їх властивості та операції над ними. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Комп’ютерна дискретна математика” для студентів спеціальності “Програмне забезпечення автоматизованих систем” / П. В. Сердюк – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2012. – 31 с.

10. Сердюк П. В. Множини**.** Методичні вказівки до виконання практичних занять з дисципліни „Комп’ютерна дискретна математика / П. В. Сердюк – Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка”, 2013. – 35 с.

11. Денисова Т. В. Дискретна математика. Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Теорія множин і відношень" / Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. – 80 с.

12. Новотарський М. А. Дискретна математика [Електронний ресурс]. Навчальний посібник / М. А. Новотарський; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 278 с.