Лекція. Комбінаторний аналіз.

ПЛАН

1. *Основні правила комбінаторного аналізу.*
2. *Розміщення, перестановки, сполучення без повторень.*
3. *Розміщення, перестановки, сполучення з повтореннями.*
4. *Властивості біноміальних коефіцієнтів.*
5. *Біном Ньютона.*
6. *Метод включень і вилучень.*

1. Основні правила комбінаторного аналізу.

Комбінаторика або комбінаторний аналіз – розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір елементів (підмножин) із деякої скінченної множини за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити. Згадані підмножини прийнято називати *вибірками* або *комбінаторними конфігураціями*.

Перші дослідження з комбінаторики зроблені у XVII-XVIII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, Я. Бернуллі, Л. Ейлером.

Комбінаторика вивчає наступні типи задач:

1) підрахунок числа комбінаторних конфігурацій;
2) розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій;
3) розв’язування оптимізаційних комбінаторних задач.

Розв’язування більшості задач комбінаторного аналізу ґрунтується на застосуванні двох правил – правила суми і правила добутку.

Нехай задано дві скінченні множини *A* та *B*: $|A| = n$, $|B| = m$; причому $A \cap B = \varnothing$.

Правило суми. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати n способами, а елемент $b \in B$ – m способами, то вибір або a або b можна здійснити $m+n$ способами.

На мові теорії множин це правило формулюється так:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = n + m. \qquad (5.1)$$

Приклад 1. З міста *A* до міста *B* можна дістатися 12 потягами, 3 літаками, 23 автобусами. Скількома способами можна дістатися з міста *A* до міста *B*?

Розв'язання. Проїзд з міста *A* до *B* потягом, літаком або автобусом є подіями, які не можуть виконуватися одночасно однією людиною (попарно несумісними), тому загальну кількість маршрутів можна обчислити додаванням способів пересування:

N=12+3+23=38.

Правило суми можна узагальнити на випадок k $(k > 2)$ множин. Нехай задано множини $A_1, A_2, \ldots, A_k$, які попарно не перетинаються (тобто $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всіх $i \neq j$), і відомі потужності цих множин: $|A_1| = n_1,\ |A_2| = n_2,\ \ldots,\ |A_k| = n_k$. Тоді кількість варіантів вибору із A_1 або A_2, або A_3, або … або A_k становить

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k. \qquad (5.2)$$

Правило добутку. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати n способами і після кожного такого вибору елемент $b \in B$ можна вибрати m способами, то вибір впорядкованої пари (a,b), тобто вибір a та b можна здійснити $n \cdot m$ способами.

Оскільки всі впорядковані пари множин A та B утворюють декартів добуток цих множин, то правило можна записати так:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m. \qquad (5.3)$$

Правило добутку можна узагальнити на випадок кортежу будь-якої скінченної довжини. Нехай задано множини $A_1, A_2, \ldots, A_k$, причому $|A_1| = n_1,\ |A_2| = n_2,\ \ldots,\ |A_k| = n_k$. Тоді справедлива формула

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k. \qquad (5.4)$$

Приклад 2. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр $0,1,2,3,4,$ якщо жодна з цифр не повторюється.

Розв'язання. Оскільки першою цифрою можуть бути тільки цифри $1,2,3,4,$ то існує $n_1 = 4$ способів її вибору. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана $n_2 = 4$ способами, третя – $n_3 = 3$ способами, четверта – $n_4 = 2$ способами.

Приклад 3. Задано множини A та B, причому $|A| = n,\ |B| = m$.

1. Скільки існує функцій, які задають взаємно однозначну відповідність між множинами та ?

2. Скільки існує функцій із множини в множину ?

Розв'язання. 1. Якщо $n > m$, то таких функцій не існує, оскільки відповідність називається взаємно однозначною, якщо вона:

а) скрізь визначена; б) сюр'єктивна; в) функціональна (існує єдиний образ); г) існує єдиний прообраз. Тому вважаємо, що $n \le m$ і візьмемо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Існує m варіантів відображення елемента a_1 у множину B. Якщо образ елемента a_1 визначений, то буде $m-1$ варіантів відображення елемента a_2, оскільки його образ має відрізнятися від образу елемента a_1. Аналогічно, існує $m-2$ варіантів відображення елемента a_3 і взагалі, елемента a_i має $m-i+1$ варіантів відображення у множину B. Тому згідно з правилом добутку маємо

$$m(m-1)(m-2)\cdot\ \cdots\ \cdot(m-n+1)$$

способів відображення множини на множину , при якому ніякі два елементи множини не будуть відображені в один і той же елемент множини . Отже, існує

$$N_1 = m(m-1)(m-2)\cdot\ \cdots\ \cdot(m-n+1)$$

взаємно однозначних функцій із множини в .

2. В цьому випадку будь-який із n елементів множини може бути відображеним в будь-який із m елементів множини B. Тому існує

$$N_2 = m(m)(m)\cdot\ \cdots\ \cdot(m) = m^n$$

функцій із множини в .

Приклад 4. Скільки існує цілих чисел від 0 до 1000, які містять в своєму записі хоча б одну цифру 7?

Розв'язання. Позначимо через A множину цілих чисел від 0 до 1000, які не містять цифру 7 в жодному із розрядів. Нехай підмножини

$A_1, A_2 A_3, A_4 \subset A$, де A_i – множина i-значних чисел. Очевидно, що $|A_1| = 9$ (без числа 7). Множина A_2 містить числа, які мають 8 варіантів вибору першої цифри і 9 варіантів вибору другої цифри, оскільки перша цифра не може бути ні 7, ні 0, а друга цифра не може бути 7; тому за правилом добутку $|A_2| = 8 \cdot 9 = 72.$ Аналогічно визначаємо $|A_3| = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648.$ Множина $A_4 = \{1000\}$, тобто, $|A_4| = 1.$ Отже, згідно з комбінаторним правилом суми маємо

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| =$$
$$= 9 + 72 + 648 + 1 = 730.$$

Нехай S – множина всіх цілих чисел від 0 до 1000, $|S| = 1000.$ Тоді $S \setminus A$ – множина всіх цілих чисел від 0 до 1000, які містять в своєму записі хоча б одну цифру 7. Оскільки $A \cap (S \setminus A) = \varnothing$, то $|A| + |S \setminus A| = |S|$; звідки знаходимо

$$|S \setminus A| = |S| - |A| = 1001 - 730 = 271.$$

Отже, між 0 і 1000 існує 271 ціле число, яке містить хоча б одну цифру 7.

2. Розміщення, перестановки, сполучення без повторень.

Нехай множина A містить n елементів, тобто $|A| = n$. Множина називається *упорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа. Упорядковані множини відрізняються одна від одної або своїми елементами, або їх порядком.

Підмножину, яка містить декілька екземплярів одного і того ж елемента множини *A*, називають *мультимножиною*.

Вибіркою називається будь-яка підмножина або мультимножина, елементи яких вибираються із елементів множини *A*. Число k елементів у вибірці визначає її обсяг (таку вибірку називають також k - вибіркою).

Вибірку, в якої не враховується порядок запису елементів, називають *сполученням*. Вибірку, в якої порядок запису елементів враховується, називають *розміщенням*. Упорядковані -вибірки множини з n елементів називаються *розміщеннями* з n елементів по k. Позначимо через A_n^k – число різних розміщень з n елементів по k без повторень.

Теорема 1. Число різних розміщень з n елементів по k обчислюється за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1). \qquad (5.5)$$

Доведення. Нагадаємо, що

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(n-2)(n-1)n,\ 0! = 1$ і $n! = (n-1)!\cdot n$.

Складемо шукані вибірки. Перший елемент -вибірки можна вибрати способами, за ним другий – $(n-1)$ способами і так дальше, а останній -й елемент – $(n-k+1)$ способами. За правилом добутку маємо

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад 5. Скількома способами можна розсадити 3 студентів на 10 стільцях?

Розв'язання. За формулою (5) шукане число способів дорівнює

$$A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720.$$

Розміщення з n елементів по n називають *перестановками.*

Теорема 2. Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n!. \qquad (5.6)$$

Зауважимо, що перестановки з n елементів відрізняються між собою лише порядком елементів.

Приклад 6. Скількома способами можна розмістити на полиці чотири томи математичної енциклопедії?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини з чотирьох елементів, тобто

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Довільні k-вибірки із n-елементної множини, які відрізняються хоча б одним елементом, називаються *сполученнями* (*комбінаціями*) із елементів по k. Число сполучень з n елементів по k позначається символом C_n^k .

Теорема 3. Число сполучень із елементів по k елементів визначається за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (5.7)$$

Доведення. Візьмемо всі сполучення із елементів по k. Тепер, переставляючи в кожному із сполучень елементи всіма можливими способами, одержимо всі розміщення із елементів по k елементів. Оскільки кожне сполучення містить k елементів, то із нього можна скласти $k!$ перестановок, а число всіх таких сполучень становить C_n^k. Отже, за правилом добутку справедлива рівність $C_n^k \cdot k! = A_n^k$. Звідси приходимо до формули (7).

Приклад 7. Скількома способами можна вибрати три цифри з дев'яти 1, 2, 3,...,9?

Розв'язання. Оскільки порядок вибору несуттєвий, то кількість усіх можливих способів визначаємо за формулою (7):

$N = \mathrm{C}_9^3 = \dfrac{9!}{6!3!} = 84$.

3. Розміщення, перестановки, сполучення з повтореннями.

Розглянемо впорядковані k-вибірки, складені із елементів n-елементної множини *A*, причому елементи у вибірках можуть повторюватись. Позначимо символом $\overline{A}_n^k$ – число впорядкованих вибірок з повторенням елементів.

Теорема 4. Число різних розміщень з повтореннями із n елементів по k визначається за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (5.8)$$

Доведення. Перший елемент вибірки можна обрати способами. Оскільки елементи у вибірці можуть повторюватись, то другий елемент вибірки теж можна обрати способами і т.д. Отже, кожен елемент - вибірки обирається способами, а тому за правилом добутку маємо формулу (5.7).

Приклад 8. Знайти кількість бітових рядків (булевих векторів) довжиною m.

Розв'язання. Очевидно, що будь-який такий вектор буде впорядкованою мультимножиною, яка складається із елементів 0 або 1. Отже, булевий вектор – впорядкована вибірка з повтореннями елементів. За формулою (5.8) за умови $n = 2,\ k = m$ одержимо кількість булевих векторів довжиною

$$N = \overline{A}_2^m = 2^m .$$

Приклад 9. Скількома способами можна розкласти 10 різних монет до двох кишень?

Розв'язання. Кожній монеті поставимо у відповідність 0, якщо вона покладена, наприклад, до лівої кишені, і 1 – якщо до правої. Тоді кожному розподілу монет до кишень буде відповідати булевий вектор довжини 10. Тому при $n = 2,\ k = 10$ маємо число всіх способів $\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$.

Зауважимо, що метод розв’язування комбінаторних задач шляхом зведення до пошуку числа булевих векторів часто застосовується в комбінаторному аналізі.

Розглянемо деяку множину *A*, потужність якої $| \quad |$. Кажуть, що множину *A* розбито на k підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_k$, якщо:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ (i \neq j),\ i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$.

Позначимо число елементів у підмножині A_i через $|A_i| = n_i$; очевидно, що $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо через $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Зауважимо, що порядок розташування елементів у кожній підмножині не має значення; істотним є лише те, до якої підмножини потрапить кожен з елементів множини A.

Теорема 5. Нехай $|A| = n$. Кількість способів, якими можна розбити множину A на підмножини $A_1, A_2, \ldots, A_k$, з числом елементів $n_1, n_2, \ldots, n_k$ визначається за формулою

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{5.9}$$

Доведення. Підрахуємо число розбиттів. Спочатку із множини A виберемо n_1 елементів до першої підмножини, потім із $n - n_1$ елементів, що залишились, візьмемо n_2 елементів до підмножини A_2 і т.д. Елементи до підмножини A_1 можна відібрати $C_n^{n_1}$ способами, до підмножини $A_2 - C_{n-n_1}^{n_2}$, до підмножини $A_3 -$ $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ і т.д. За правилом добутку одержимо число способів вибору всіх розбиттів множини A:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \cdots \cdot C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_3} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times$$

$$\times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Приклад 10. Скількома способами можна розселити 9 студентів до трьох кімнат, якщо перша кімната розрахована на 4 особи, друга – на 3 особи, а третя – на 2 особи.

Розв'язання. A – множина студентів, яких потрібно розселити. Маємо: $|A| = 9 = n$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$. За формулою (5.9) обчислюємо

$$P_9(4,3,2) = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 = 630.$$

Зауважимо, що теорему 5 можна трактувати по іншому. Нехай n - елементна множина A має елементи k різних типів. Перестановку, яку можна отримати із елементів, серед яких елементи першого типу зустрічається n_1 разів, елементи другого типу – n_2 разів, … , елементи -го типу – n_k разів ($n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$) називають *перестановкою з повтореннями*. Число різних перестановок з повтореннями становить $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ і обчислюється за формулою (9).

Приклад 11. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери в слові "колобок"?

Розв'язання. Слово складається із 7 літер ($n = 7$), серед яких літера "к" зустрічається 2 рази ($n_1 = 2$), літера "о" – 3 рази ($n_2 = 3$), літери "л", "б" – по одному разу ($n_3 = n_4 = 1$). За формулою (5.9) знаходимо

$$P_7(2,3,1,1) = \frac{7!}{2!3!1!1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 420.$$

Нехай маємо неупорядковану - елементну множину *A*, елементи якої належать до різних *типів* (класів). Сполученням з елементів по елементів з повтореннями називається сукупність, складена із k елементів, кожний з яких належить до одного з типів множини A. Позначимо через $\bar{C}_n^k$ – число різних сполучень із елементів по елементів з повтореннями.

Теорема 6. Кількість різних сполучень із елементів по елементів з повтореннями становить

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{5.10}$$

Доведення. Кожному із сполучень поставимо у відповідність послідовність із нулів і одиниць, яку складемо наступним чином. Спочатку запишемо стільки одиниць, скільки разів елемент $a_1 \in A$ зустрічається в сполученні, ставимо граничний нуль і записуємо підряд стільки одиниць, скільки разів елемент $a_2 \in A$ зустрічається в сполученні, і т.д. Процедура складання двійкової (бітової) послідовності завершується записом такого числа одиниць, скільки разів елемент $a_n \in A$ зустрічається в сполученні. Очевидно, якщо деякий елемент множини A не міститься у сполученні, то відповідні йому одиниці відсутні в двійковій послідовності. Таким чином, кожному сполученню з елементів по взаємно однозначно відповідає послідовність із одиниць і $n-1$ нулів. Таку послідовність можна задати вибором серед $n+k-1$ місць $n-1$ місця для запису нулів (або вибором місць для запису одиниць). Це можна зробити C_{n+k-1}^{k} способами, тобто $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k}$.

Теорема доведена.

Приклад 12. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$?

Розв'язання. Розв'язки цього рівняння можна трактувати так: якщо x_1, x_2, x_3, x_4 – цілі невід'ємні числа, то можна скласти сполучення з $n=4$ елементів по $k=10$, взявши x_1 елементів першого типу, x_2 елементів другого типу, x_3 – третього типу і x_4 – четвертого типу; при цьому має виконуватись рівність $\quad_1 \quad_2 \quad_3 \quad_4$. Таким чином, число цілих невід'ємних розв'язків заданого рівняння становить

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3} = 286 .$$

Приклад 13. Скільки різних цілих розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, якщо $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, x_5 \geq 2$.

Розв'язання. Із обмежень видно, що потрібно вибрати принаймні по одному елементу першого і другого типів та принаймні по два елементи третього, четвертого та п'ятого типів. Тому залишається для вибору $20-(1+1+2+2+2)=20-8=12$ елементів із п'яти типів ($k=12$, $n=5$); маємо

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_5^{12} = C_{5+12-1}^{12} = C_{16}^{12} = \frac{16!}{12!4!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$$

цілих невід'ємних розв'язків заданого рівняння .

6. Властивості біноміальних коефіцієнтів.

Числа сполучень C_n^k $(0 \le k \le n)$, які обчислюються за формулою (5.7): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, називають *біноміальними коефіцієнтами*. Ці числа зустрічаються в формулах розв'язування багатьох задач комбінаторного аналізу. Розглянемо деякі найважливіші властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$

Переконатись у справедливості наведених тотожностей можна шляхом безпосереднього використання формули (7). Доведемо, наприклад, формулу 3. Маємо:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!(n-k)} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Доведемо тепер властивість 4. За означенням C_{m+n}^k – це число способів вибору k елементів із $(m+n)$- елементної множини. Елементи можна вибирати в два етапи. Спочатку вибрати i елементів із підмножини потужністю m елементів; це можна зробити C_m^i способами. Потім вибирається решта $k-i$ елементів із іншої підмножини потужністю n, що можна зробити C_n^{k-i} способами. За правилами добутку і суми загальне число способів вибору k елементів становить $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $C_k^{k-3} + C_k^{k-2} = 15(k-1)$ відносно натурального числа k.

Розв'язання. Очевидно, розв'язки рівняння мають задовольняти умовам

$$\begin{cases} k-3 \ge 0, \\ k-2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge 3, \\ k \ge 2 \end{cases} \Rightarrow k \ge 3.$$

Скориставшись формулою (7), запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{k!}{(k-3)!(k-k+3)!} + \frac{k!}{(k-2)!(k-k+2)!} = 15(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k!}{(k-3)!3!} + \frac{k!}{(k-2)!2!} = 15(k-1).$$

Виконаємо спрощення:

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!3!} + \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} = 15(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + \frac{k(k-1)}{2} = 15(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)\left(\frac{k(k-2)}{6} + \frac{k}{2} - 15\right) = 0.$$

Приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{c} k-1=0, \\ \dfrac{k(k-2)}{6} + \dfrac{k}{2} - 15 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} k=1, \\ k(k-2)+3k-90=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} k=1, \\ k^2+k-90=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} k_1=1, \\ k_2=-10, \\ k_3=9. \end{array}\right.$$

Отже, дане рівняння має єдиний розв'язок $k=9$.

5. Біном Ньютона.

З елементарної математики добре відомі формули скороченого множення

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ і } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Виявляється, існує загальна формула.

Теорема 7. (*біноміальна теорема*). Для натурального n справедлива рівність

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n \equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (6.1)$$

Доведення. Скористаємось методом індукції. При $n=1$ маємо:

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = \sum_{k=0}^{1} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Отже, база індукції виконується.

Нехай теорема справедлива при n. Покажемо, що вона справедлива і при $n+1$ (індуктивний перехід). За припущенням індукції маємо:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left(C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n\right)(a+b) =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 + C_n^0) a^n b^1 + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k a^{n-k} b^k;$$

тут скористались властивостями 3 і 2. Теорема доведена.

Формулу (7) називають *біномом Ньютона,* звідки дістали свою назву біноміальні коефіцієнти C_n^k.

З властивості 3 біноміальних коефіцієнтів випливає, що біноміальні коефіцієнти формули (7) можна записати у вигляді трикутної таблиці, яку називають *трикутником Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \ldots & & & & \ldots & & & & \ldots & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \\ n=5 \\ \end{array}$$

У n-му рядку цього трикутника стоять біноміальні коефіцієнти розкладу (6.1): кожний коефіцієнт, крім двох крайніх одиниць, є сумою двох коефіцієнтів із попереднього рядка, які стоять над ним.

Із теореми 7. можна одержати ряд важливих наслідків.

Наслідок 1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$

Доведення. Покладемо в формулі (7) $a=1,\ b=1$; маємо

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k .$$

Наслідок 2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$

Доведення. В формулі бінома ньютона покладемо $a=1,\ b=-1$; одержимо

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k .$$

Приклад 15. Знайти коефіцієнт при $x^2 y^5$ в розкладанні $(3x+2y)^7$.

Розв'язання. Згідно з формулою (6.1) доданок, який містить $x^2 y^5$, має вигляд

$$C_7^2 (3x)^2 (2y)^5 = \frac{7!}{2!5!}(3x)^2(2y)^5 = \frac{42}{2} 3^2 x^2 2^5 y^5 = 21 \cdot 9 \cdot 32 x^2 y^5 = 6048 x^2 y^5 .$$

Отже, коефіцієнт при $x^2 y^5$ дорівнює 6048.

Наступна теорема є узагальненням бінома Ньютона.

Теорема 8. (*поліноміальна теорема*). Для натурального n справедлива рівність

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}. \quad (6.2)$$

Приклад 16. Знайти коефіцієнт при $x^3y^4z^4$ в розкладанні $(2x + y^2 + 3z)^9$.

Розв'язання. Із поліноміальної теореми видно, що доданок, який містить $x^3y^4z^4$ буде таким (при $n = 9,\ k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = 4;\ k_1 + k_2 + k_3 = n$):

$$P_9(3,2,4)(2x)^3(y^2)^2(3z)^4 = \frac{9!}{3!2!4!} 2^3 3^4 x^3y^4z^4 = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6\cdot 4} 8\cdot 81 x^3y^4z^4.$$

Обчислюємо коефіцієнт при $x^3y^4z^4$:

$$\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6\cdot 4} 8\cdot 81 = 5\cdot 7\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 81 = 408240.$$

6. Метод включень і вилучень.

Раніше при застосуванні комбінаторного правила суми розглядались множини, які не перетинаються. Проте часто виникають задачі про підрахунок елементів об'єднання множин, які перетинаються. Нехай A, B – скінченні множини.

Теорема 8. Кількість елементів, які можна вибрати із множин A або B визначається за формулою

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (6.3)$$

Доведення. Множину $A \cup B$ представимо у вигляді
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
де $A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cap B$ – множини, які попарно не перетинаються. Тому маємо

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|. \quad (6.4)$$

Враховуючи, що $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ і $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$ або $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$, $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, рівність (6.4) запишемо так:

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Теорема доведена.

Приклад 17. У фірмі працює 63 співробітники. Серед них 45 володіють англійською мовою, 33 – німецькою, а 23 знають і англійську, і німецьку мови. Скільки співробітників:

а) володіють англійською або німецькою мовою?

б) не володіють жодною із цих мов?

Розв'язання. Нехай *U* – універсальна множина (всі співробітники фірми), A – множина співробітників, які володіють англійською мовою, H – множина співробітників, які володіють німецькою мовою;

$$|U| = 63, \quad |A| = 45, \quad |H| = 33, \quad |A \cap H| = 23.$$

а) Співробітники, які володіють англійською або німецькою мовами, утворюють множину $A \cup H$, потужність якої визначається за формулою (6.3):

$$|A \cup H| = |A| + |H| - |A \cap H| = 45 + 33 - 23 = 55.$$

б) Співробітники фірми, які не володіють як англійською, так і німецькою мовами утворюють множину $\bar{A} \cap \bar{H}$. Оскільки справедлива рівність $\bar{A} \cap \bar{H} = \overline{A \cup H}$ (закон де Моргана), то знаходимо потужність

$$|\bar{A} \cap \bar{H}| = |\overline{A \cup H}| = |U| - |A \cup H| = 63 - 55 = 8.$$

Розглянемо тепер випадок трьох множин. Нехай задано множини *A, B* і *C*, які можуть перетинатися, і необхідно визначити потужність множини $A \cup B \cup C$. Якщо взяти суму потужностей кожної із множин *A, B* і *C,* то підмножини, які утворюють перерізи $A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C$ будуть враховані двічі. Якщо відняти потужності $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ і $|B \cap C|$, то як видно, наприклад, із діаграми Ейлера-Венна, елементи множини $A \cap B \cap C$ зовсім не будуть враховані. Тому необхідно додати потужність $|A \cap B \cap C|$, після чого при підрахунку потужності множини $A \cup B \cup C$ кожний елемент буде враховуватись лише один раз. Отже, маємо наступну формулу:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{6.5}$$

Приклад 18 а) Скільки додатних цілих чисел, менших 1002, діляться на 2, 3 або 5? б) Скільки додатних цілих чисел, менших 1002, не діляться на 2, 3 або 5?

Розв'язання. Позначимо через U – універсальну множину всіх додатних цілих чисел, менших 1002; A – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 2; B – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 3; C – множину додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 5. Маємо: $|U| = 1001$ – всього чисел, менших 1002;

$|A| = \left\lfloor \frac{1001}{2} \right\rfloor = 500$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2;

$|B| = \left\lfloor \frac{1001}{3} \right\rfloor = 333$ – кількість цілих чисел, які діляться на 3;

$|C| = \left\lfloor \frac{1001}{5} \right\rfloor = 200$ – кількість цілих чисел, які діляться на 5;

$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1001}{6} \right\rfloor = 166$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2 і на 3;

$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{1001}{10} \right\rfloor = 100$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2 і на 5;

$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{1001}{15} \right\rfloor = 66$ – кількість цілих чисел, які діляться на 3 і на 5;

$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1001}{30} \right\rfloor = 33$ – кількість цілих чисел, які діляться на 2, 3 і на 5.

а) Згідно з формулою (6.5) кількість додатних цілих чисел, менших 1002, які діляться на 2, 3 або 5 буде таким:

$$|A \cup B \cup C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 333 = 734.$$

б) Визначаємо кількість додатних цілих чисел, менших 1002, які не діляться на 2, 3 або 5:

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| = 1001 - 734 = 267.$$

Теорема 9. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – деякі скінченні множини, то потужність множини $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ визначається за формулою

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| + \\ + \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \cdots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|. \qquad (6.5)$$

Доведення. Необхідно показати, що кожний елемент із множини $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ враховується в правій частині рівності (6.5) лише один раз. Нехай елемент $a \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ входить до складу рівно m множин сукупності $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тоді в сумі $\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|$ елемент a враховано $m = C_m^1$ разів. В сумі $\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right|$ елемент a враховується лише тоді, коли вибрані дві множини, які містять цей елемент; існує C_m^2 способи вибору таких множин. Отже, в сумі $\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right|$ елемент a враховується C_m^2 разів. В сумі $\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$ елемент a враховується лише тоді, коли вибрані три множини, які містять цей елемент; існує C_m^3 способи вибору таких множин і відповідно стільки ж разів враховується елемент a. Отже, в правій частині формули (6.5) елемент a підраховується $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \cdots + (-1)^{m-1}C_m^m$ разів. Згідно з наслідком 1 маємо:

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \cdots + (-1)^{m-1}C_m^m = 1 - \left(1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \cdots + (-1)^m C_m^m\right) = \\ = 1 - (1-1)^m = 1 - 0 = 1,$$

а це означає, що кожний елемент a із $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ враховується в правій частині рівності (6.5) лише один раз. Теорема доведена.