

## Логіка висловлювань

*Висловлювання* – розповідне речення, про яке можна сказати, що воно хибне або істинне, але не те й інше водночас.

### Приклад.

1. Ірпінь – обласний центр Волинської області.
2.  $2+3=5$ .
3.  $x+2=5$ .
4. Сиди спокійно!

Перші два речення є висловлювання, а останні два – ні. З курсу географії відомо, що перше речення хибне, а з арифметики зрозуміло, що друге – істинне. Третє речення, в залежності від значення змінної  $x$ , набуває значення хибності або істинності, а четверте речення не є розповідним.

Істина або хибність, яка приписана деякому висловленню, називається *істиннісним значенням* цього висловлення. Позначення:

- «Істина» – T, I, True або 1;
- «Хибність» – F, X, False або 0.

*Атомарна формула (атом)* – елементарне неподільне висловлювання. Множина усіх атомів складає *пропозиційну сигнатуру*, тобто множину всіх висловлювань, якими ми оперуємо в контексті даної задачі. Атоми позначають малими латинськими буквами.

### Приклад

1. Падає дощ – атом.
2. Я отримав гарну оцінку – атом.
3. Я не вивчив логіку і отримав двійку. Якщо пропозиційна сигнатура містить два висловлювання: «я не вивчив логіку», «я отримав двійку», то це висловлювання не буде атомом.

## Логічні зв'язки

Розглянемо основні логічні зв'язки:

- ✧ **заперечення** висловлювання  $p$ , його позначають  $\neg p$  (або  $\bar{p}$ ) та виражають сполучником «не»;  
висловлювання  $\neg p$  є істинним лише у випадку, коли  $p$  хибне;
- ✧ **кон'юнкція** двох висловлювань  $p$  та  $q$ , її позначають  $p \& q$  або  $p \wedge q$  та виражають сполучником «і»;  
висловлювання  $p \wedge q$  вважається істинним тоді й лише тоді, коли такими є  $p$  та  $q$ ;
- ✧ **диз'юнкція** двох висловлювань  $p$  та  $q$ , її позначають  $p \vee q$  та виражають сполучником «або»;  
висловлювання  $p \vee q$  є істинним тоді й лише тоді, коли таким є принаймні одне з висловлювань  $p$  чи  $q$ ;

- ✧ **альтернативне «або»** двох висловлювань  $p$  та  $q$ , його позначають  $p \oplus q$ ;  
висловлювання  $p \oplus q$  є істинним тоді й лише тоді, коли  $p$  та  $q$  мають різні логічні значення, і хибним у протилежному випадку;
- ✧ **імплікація** двох висловлювань  $p$  та  $q$ , її позначають  $p \rightarrow q$  та виражають сполучником «... достатньо для ...» «якщо...то...»;  
висловлювання  $p \rightarrow q$  є хибним лише у випадку, коли  $p$  істинне, а  $q$  хибне;
- ✧ **еквівалентність** двох висловлювань  $p$  та  $q$ , її позначають  $p \sim q$  та виражають сполучником «тоді й лише тоді»;  
висловлювання  $p \sim q$  є істинним лише у випадку, коли  $p$  та  $q$  мають однакові логічні значення, і хибним у протилежному випадку.

Для того, щоб визначити значення істинності формули, зручно використовувати таблиці істинності, що отримують значення істинності формул за значеннями істинності атомарних формул у цих формулах.

**Приклад.** Таблиця істинності семантики введених логічних зв'язок:

Таблиця 1.

Таблиця істинності логічних зв'язок

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \oplus q$ | $\neg p$ | $p \rightarrow q$ | $p \sim q$ |
|-----|-----|--------------|------------|--------------|----------|-------------------|------------|
| T   | T   | T            | T          | F            | F        | T                 | T          |
| T   | F   | F            | T          | T            | F        | F                 | F          |
| F   | T   | F            | T          | T            | T        | T                 | F          |
| F   | F   | F            | F          | F            | T        | T                 | T          |

**Формула** – це атомарна формула або складне висловлювання, отримане об'єднанням декількох атомарних формул за допомогою логічних зв'язок (логічних операцій).

**Приклад** Записати у вигляді формули висловлювання: «Якщо я пізно ляжу спати, то просплю і запізнюсь на роботу».

Розглянемо атоми цієї формули, які позначимо:

$p$ : «я пізно ляжу спати»;

$q$ : «я просплю»;

$r$ : «запізнюсь на роботу».

Отже, формула запишеться як  $p \rightarrow (q \wedge r)$ .

**Інтерпретація формули** – це набір значень істинності (Т або F) всіх атомів у заданій формулі.

Для того, щоб знайти значення істинності складного висловлювання для певної інтерпретації, необхідно підставити відповідні значення істинності для всіх атомів цієї інтерпретації та спростити її.

*Виконана формула* – це формула, яка має принаймні одну інтерпретацію, у якій вона набуває значення істинності.

*Тавтологія* – формула, що виконується у всіх інтерпретаціях.

*Протиріччя* – формула, що не виконується у жодній інтерпретації.

В інших випадках формула називається ані істинною, ані хибною.

**Приклад** Розглянемо формулу  $((p \rightarrow q) \wedge (p \vee r)) \sim (\neg q)$ . Атомарними формулами тут є  $p, q, r$ . Формула має  $2^3=8$  інтерпретацій. Значення істинності заданої формули наведено в таблиці 2.

Таблиця 2.

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \rightarrow q)$ | $(p \vee r)$ | $((p \rightarrow q) \wedge (p \vee r))$ | $\neg q$ | $((p \rightarrow q) \wedge (p \vee r)) \sim (\neg q)$ |
|-----|-----|-----|---------------------|--------------|-----------------------------------------|----------|-------------------------------------------------------|
| T   | T   | F   | T                   | T            | T                                       | F        | F                                                     |
| T   | T   | T   | T                   | T            | T                                       | F        | F                                                     |
| T   | F   | F   | F                   | T            | F                                       | T        | F                                                     |
| T   | F   | T   | F                   | T            | F                                       | T        | F                                                     |
| F   | T   | F   | T                   | F            | F                                       | F        | F                                                     |
| F   | T   | T   | T                   | T            | T                                       | F        | F                                                     |
| F   | F   | F   | T                   | F            | F                                       | T        | F                                                     |
| F   | F   | T   | T                   | T            | T                                       | T        | T                                                     |

**Приклад** Розглянемо формулу  $(\neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ . Атомарними формулами тут є  $p, q$ . Формула має  $2^2=4$  інтерпретації. Значення істинності заданої формули наведено в таблиці 3. Задана формула істинна у всіх інтерпретаціях, отже, це тавтологія.

Таблиця 3.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \rightarrow q$ | $(\neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|----------|-------------------|------------------------------------------|
| T   | T   | F        | T                 | T                                        |
| T   | F   | F        | F                 | T                                        |
| F   | T   | T        | T                 | T                                        |
| F   | F   | T        | T                 | T                                        |

**Приклад** Розглянемо формулу  $p \wedge (\neg(q \vee q))$ . Атомарними формулами тут є  $p, q$ . Формула має  $2^2=4$  інтерпретації. Значення істинності заданої формули наведено в таблиці 4. Задана формула хибна у всіх інтерпретаціях, отже, це протиріччя.

Таблиця 4.

| $p$ | $q$ | $q \vee q$ | $\neg(q \vee q)$ | $p \wedge (\neg(q \vee q))$ |
|-----|-----|------------|------------------|-----------------------------|
| T   | T   | T          | F                | F                           |
| T   | F   | T          | F                | F                           |
| F   | T   | T          | F                | F                           |
| F   | F   | F          | T                | F                           |

## Закони логіки висловлювань

Еквівалентні формули, що визначають правила перетворень, називають *законами логіки висловлювань*.

Основні закони логіки висловлювань:

- ⌞ закон комутативності, який означає, що під час множення (кон'юнкції) та додавання (диз'юнкції) результат не залежить від порядку змінних;
- ⌞ закон асоціативності, який говорить про те, що під час використання однакових знаків (лише кон'юнкції або лише диз'юнкції) дужки можна ставити в будь-якому порядку або ж взагалі упускати;
- ⌞ закон дистрибутивності, що виражає правило виносу спільного висловлювання за дужки;
- ⌞ закон протиріччя, який говорить про неможливість набуття значень істинності суперечливих (протилежних за значенням) висловлювань;
- ⌞ закон виключення третього, який означає, що із двох протилежних висловлювань на однакову тему одне завжди істинне, а друге – хибне; третього не буває;
- ⌞ закон ідемпотентності, який означає, що добуток (кон'юнкція) двох висловлювань чи їхня сума (диз'юнкція) еквівалентні самому висловлюванню;
- ⌞ закон подвійного заперечення, який говорить, що подвійне заперечення виключає заперечення;
- ⌞ закони де Моргана, що зв'язують заперечення з операціями кон'юнкції і диз'юнкції.

**Основні закони логіки висловлювань наведено у таблиці 5.**

*Таблиця 5.*

*Закони логіки висловлювань*

| Назва законів                | Формулювання законів                                     |
|------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Закони комутативності        | $p \vee q = q \vee p$                                    |
|                              | $p \wedge q = q \wedge p$                                |
| Закони асоціативності        | $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$                  |
|                              | $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$          |
| Закони дистрибутивності      | $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$     |
|                              | $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$   |
| Закон протиріччя             | $p \wedge (\neg p) = F$                                  |
| Закон подвійного заперечення | $\neg(\neg p) = p$                                       |
| Закон виключення третього    | $p \vee (\neg p) = T$                                    |
| Закони ідемпотентності       | $p \vee p = p$                                           |
|                              | $p \wedge p = p$                                         |
| Закони де Моргана            | $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ |
|                              | $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ |

|                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| Закони поглинання         | $(p \vee q) \wedge p = p$ |
|                           | $(p \wedge q) \vee p = p$ |
| Співвідношення для сталих | $p \vee T = T$            |
|                           | $p \wedge T = p$          |
|                           | $p \vee F = p$            |
|                           | $p \wedge F = F$          |

Наведені закони можна перевірити побудовою таблиць істинності.

### Способи доведення логічних тверджень

*Еквівалентні (тотожні, рівносильні) формули* – це формули  $f$  та  $g$ , значення істинності яких збігаються у всіх їхніх інтерпретаціях.

**Перший спосіб** перевірки еквівалентності формул – використання *таблиць істинності*.

**Приклад.** Нехай необхідно перевірити еквівалентність формул  $(\neg(p \rightarrow q))$  та  $(p \wedge (\neg q))$ . Для цього необхідно в таблиці істинності показати тотожність формули  $(\neg(p \rightarrow q)) \sim (p \wedge (\neg q))$ . Результат наведено в таблиці 6.

Таблиця 6.

| $P$ | $Q$ | $p \rightarrow q$ | $\neg(p \rightarrow q)$ | $\neg q$ | $p \wedge (\neg q)$ | $\neg(p \rightarrow q) \sim (p \wedge (\neg q))$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------------|----------|---------------------|--------------------------------------------------|
| T   | T   | T                 | F                       | F        | F                   | T                                                |
| T   | F   | F                 | T                       | T        | T                   | T                                                |
| F   | T   | T                 | F                       | F        | F                   | T                                                |
| F   | F   | T                 | F                       | T        | F                   | T                                                |

З таблиці 6. видно, що формула  $(\neg(p \rightarrow q)) \sim (p \wedge (\neg q))$  є тавтологією, а, отже, формули  $(\neg(p \rightarrow q))$  та  $(p \wedge (\neg q))$  еквівалентні.

Очевидно, що для перевірки тотожності  $(\neg(p \rightarrow q))$  та  $(p \wedge (\neg q))$  можна не обчислювати  $(\neg(p \rightarrow q)) \sim (p \wedge (\neg q))$ , а порівняти їхні значення у кожній з інтерпретації. Як видно з таблиці істинності стовпчики значень  $(\neg(p \rightarrow q))$  та  $(p \wedge (\neg q))$  співпадають, а отже ці формули еквівалентні.

**Приклад.** За допомогою таблиць істинності довести, що  $(p \rightarrow q) \neq (q \rightarrow p)$ .

Складемо таблицю істинності для формули  $(p \rightarrow q) \sim (q \rightarrow p)$ :

Таблиця 7.

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \sim (q \rightarrow p)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|--------------------------------------------|
| T   | T   | T                 | T                 | T                                          |
| T   | F   | F                 | T                 | F                                          |
| F   | T   | T                 | F                 | F                                          |
| F   | F   | T                 | T                 | T                                          |

З таблиці 7. видно, що формула  $(p \rightarrow q) \sim (q \rightarrow p)$  не є тавтологією, а, отже, формули  $(p \rightarrow q)$  та  $(q \rightarrow p)$  не є еквівалентними.

**Другий спосіб** визначення еквівалентності формул – використання *законів логіки висловлювань*. Алгоритм доведення:

- 1) Вилучити імплікації, еквівалентності та альтернативне або.

Правило вилучення еквівалентності:  $p \sim q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ . Правило вилучення імплікації:  $(p \rightarrow q) = \bar{p} \vee q$ .

Правило вилучення альтернативного або:  $p \oplus q = \overline{p \sim q}$ .

- 2) Позбутись знаків заперечень над великими виразами за допомогою законів де Моргана та закону подвійного заперечення.
- 3) Використання решти законів для спрощення формул.

**Приклад.** Довести, що формула  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$  є еквівалентною формулі  $(p \rightarrow q)$ , використовуючи закони та правила логіки висловлювань.

1. Вилучення імплікації у формулі:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q = (\neg((\bar{p} \vee q) \wedge p)) \vee q.$$

2. Використання законів де Моргана:

$$(\neg((\bar{p} \vee q) \wedge p)) \vee q = ((\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}) \vee q.$$

3. Використання закону подвійного заперечення:

$$((\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}) \vee q = ((p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}) \vee q.$$

4. Застосування закону асоціативності та комутативності:

$$((p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}) \vee q = \bar{p} \vee (p \wedge \bar{q}) \vee q.$$

5. Використання закону поглинання

$$\bar{p} \vee (p \wedge \bar{q}) \vee q = \bar{p} \vee q.$$

6. Застосування правила вилучення імплікації:

$$\bar{p} \vee q = (p \rightarrow q).$$

Отже, формули  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$  та  $(p \rightarrow q)$  є еквівалентними.

**Приклад.** Використовуючи закони логіки, показати, що формула  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$  є тавтологією.

1. Вилучаємо імплікацію:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) = ((\overline{p \vee q}) \wedge (\overline{q \vee r})) \vee (\bar{p} \vee r).$$

2. Використовуємо закони де Моргана:

$$((\overline{p \vee q}) \wedge (\overline{q \vee r})) \vee (\bar{p} \vee r) = ((\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r).$$

$$((\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r) = ((\bar{\bar{p}} \wedge \bar{\bar{q}}) \wedge (\bar{\bar{q}} \wedge \bar{\bar{r}})) \vee (\bar{p} \vee r).$$

3. Використання закону подвійного заперечення:

$$((\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r) = ((p \wedge \bar{q}) \wedge (q \wedge \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r).$$

4. Застосування закону асоціативності:

$$((p \wedge \bar{q}) \wedge (q \wedge \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r) = p \wedge \bar{q} \wedge q \wedge \bar{r} \vee \bar{p} \vee r.$$

5. Застосування закону виключеного третього:

$$p \wedge \bar{q} \vee q \wedge \bar{r} \vee \bar{p} \vee r = T \wedge T \wedge T = T.$$

Отже, задана формула є тавтологією.

**Третім способом** доведення логічних рівностей є **комбінований спосіб**, що використовує як таблиці істинності, так і закони логіки висловлювань.

**Приклад.** З використанням комбінованого способу довести, що формула  $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$  є тавтологією.

Позбудемось імплікації:

$$((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)) = ((\overline{p \wedge q}) \vee (p \vee q)).$$

Складемо таблицю істинності для формули  $((\overline{p \wedge q}) \vee (p \vee q))$ , беручи до уваги лише можливе значення змінної  $p$ :

Таблиця 8.

| $p$ | Підстановка $p$ та спрощення за допомогою законів логіки                          | Результат |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| T   | $((\overline{T \wedge q}) \vee (T \vee q)) = (\bar{q} \vee T) = (\bar{q} \vee T)$ | $T$       |
| F   | $((\overline{F \wedge q}) \vee (F \vee q)) = (\bar{F} \vee q) = (T \vee q)$       | $T$       |

Отже, формула  $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$  є тавтологією.