Лекція 11. Основні поняття теорії графів і способи їх задання.

11.1. Означення графа. Різновиди графів.
11.2. Способи подання графа.
11.3. Ізоморфізм графів.
11.4. Операції над графами.
11.5. Маршрути, ланцюги, цикли, шлях.
11.6. Зв'язність графів, компоненти зв'язності.
11.7.Степені вершин графа.

Виникнення теорії графів пов'язують з іменем Леонарда Ейлера, який у 1736 р. опублікував розв'язок задачі про кенігсберзькі мости, а також знайшов загальний критерій існування в графі спеціального маршруту – ейлерового циклу. Подальші суттєві результати у цій галузі були отримані в середині XIX століття, переважно зусиллями Кірхгофа та Келлі. Однак початок проведення активних систематичних досліджень та становлення теорії графів як важливого розділу дискритної математики припадає на середину XX століття. Великою мірою це пов'язано з виникненням науки кібернетика, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру.

Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ.Нині теорія графів застосовується у теорії автоматів, економіці, хімії, біології, теорії проектування тощо.

11.1. Означення графа. Різновиди графів.

З поняттям графу зазвичай пов'язують його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Але граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок та ліній) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднувальних ліній та кути між ними. Важливо лиш те, чи з'єднана дана пара точок лінією, чи ні.

Нехай *V* – деяка непорожня скінченна множина, а *E* – довільна підмножина множини $V \times V$.

Означення. Графом G називається об' єкт, який заданий парою множин (*V*, *E*), де *V* – множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ – множина *ребер*; позначається $G = (V, E)$.

Елементи множини *V* називаються *вершинами* графа *G*, а елементи множини *E* – *ребрами* графа *G*. Ребро, яке з'єднує вершини $u, v \in V$ графа позначається (u, v) або $e = (u, v)$. Ребро (u, v) називається *неорієнтованим*, якщо пара $\{u, v\}$ є невпорядкованою: $\{u, v\} = \{v, u\}$. Якщо ж порядок суттєвий, то ребро буде *орієнтованим* (називають *дугою*); в цьому випадку перша по порядку вершина ребра називається *початковою* вершиною, а друга – *кінцевою*.

Граф називається *неорієнтованим* або *неографом*, якщо кожне його ребро є неорієнтованим, і *орієнтованим* або *орграфом*, якщо орієнтовані всі його ребра.

Граф називається скінченним, якщо множини його вершин і ребер є скінченними.

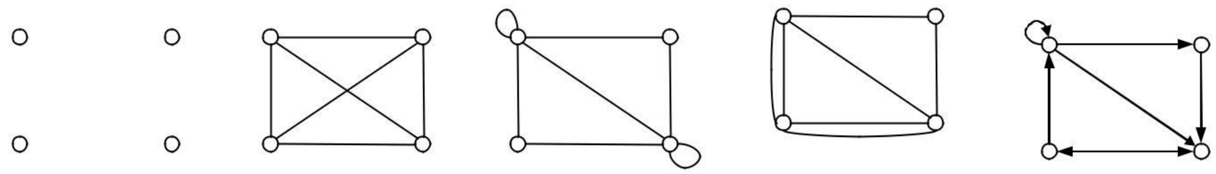
Кількість вершин графа G позначають через $n(G)=|V|$ і називають його *порядком*.

Якщо $e=(u,v)\in E$ – деяке ребро графа G, то кажуть:

- вершини u та v *суміжні*;
- вершини u та v *інцидентні* ребру e;
- ребро e *інцидентне* вершинам u і v.

Множина всіх вершин графа G, суміжних з деякою вершиною v, називається *оточенням* вершини v або *множиною суміжності* вершини v і позначається через $\Gamma(v)$: $\Gamma(v)=\{w\in V|(w,v)\in E\}$.

Множина ребер E може бути порожньою (рис. 11.1, *а*). Такий граф називається *нуль-графом;* нуль-граф порядку n позначається через O_n**.** Якщо ж множина вершин V – порожня, то порожньою є також множина E. Такий граф називається *порожнім* і позначається $\varnothing$.



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 11.1. *Приклади графів*

Лінії, що зображують ребра графу, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами (рис. 11.1, *б*). Ребро може з'єднувати деяку вершину саму із собою (рис. 11.1, *в*), таке ребро називається *петлею*. Цей випадок відповідає наявності в множині E пар вигляду (v, v). Різні ребра можуть бути інцидентними одній і тій самій парі вершин (тобто одну й ту саму пару вершин з'єднує більше ніж одне ребро), такі ребра називаються *кратними* (рис. 11.1, *г*).

Означення . Граф називається *простим*, якщо кожну пару вершин з'єднує не більше, ніж одне ребро. Граф називається *мультиграфом*, якщо він має кратні ребра. Граф називається *псевдографом*, якщо він має петлі та кратні ребра.

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками (рис. 11.1, *д*). Орієнтований граф може мати кратні ребра, петлі, а також петлі, що з' єднують одні й ті самі вершини, але у зворотних напрямках.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

Граф G називається *повним*, якщо будь-які дві його вершини суміжні, тобто $E=V\times V$. Повний граф порядку n ще позначається символом K_n**,** число ребер в ньому дорівнює

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\quad .$$

На рис.11.2 зображені графи K_n, $n \leq 5$.

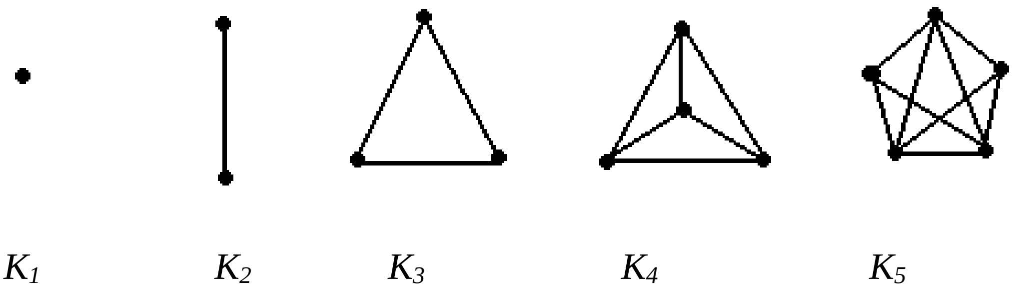


*Рис.*11.2

Граф $G=(V,E)$ називається *дводольним*, якщо існує таке розбиття множини його вершин на дві підмножини $V_1, V_2 \in V$, $(V_1 \cap V_2 = \varnothing)$ такі, що кінці кожного ребра належать різним підмножинам. Якщо при цьому будь-які дві вершини, що входять в різні частини, суміжні, то граф називається *повним дводольним*. Повний дводольний граф позначається $K_{m,n}$, де $m=|V_1|$, $n=|V_2|$; на рис.1.3 зображені повні дводольні графи $K_{1,5}$, $K_{3,3}$.

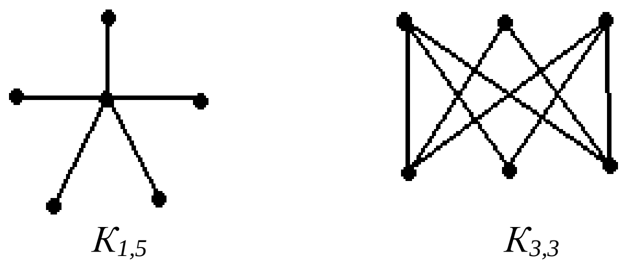


*Рис.*11.3

11.2. Способи подання графа

Задати граф означає задати множини його вершин і ребер, а також відношення суміжності або інцидентності. Графи можна задавати за допомогою матриць. Коли граф $G=(V,E)$ – скінченний, для опису його вершин та ребер досить їх занумерувати. Нехай v_1, v_2, …, v_n – вершини графа G; e_1, e_2, …, e_m – його ребра, тобто $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Матрицею суміжності неорієнтованого графа G називається квадратна матриця $A(G)=\left(a_{ij}\right)$ розміру $n \times n$, в якій елемент

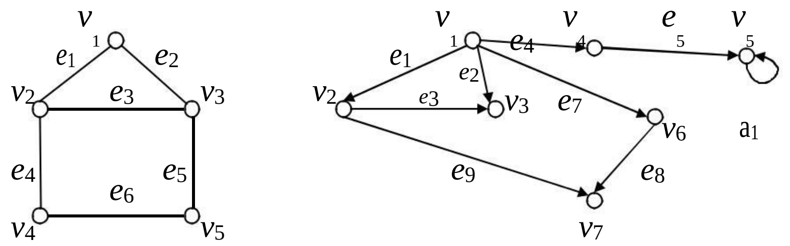
$$a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ якщо вершини } \mathrm{v}_i \textit{ та } \mathrm{v}_j \textit{ суміжні,}\\ 0, \textit{ в супротивному випадку.}\end{cases} \tag{11.1}$$

Для орієнтованого графу елементи a_{ij} визначаються так:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ якщо із вершини } \mathrm{v}_i \textit{ до } \mathrm{v}_j \textit{ веде дуга,}\\ 0, \textit{ в супротивному випадку.}\end{cases} \tag{11.2}$$

Таким чином, матриця суміжності неорієнтованого графу є симетричною ($a_{ij} = a_{ji}$), а орієнтованого – необов’ язково. Якщо вона все ж симетрична, то для кожного ребра орієнтованого графу існує ребро, яке з’ єднує ті самі вершини, але йде у зворотному напрямку. Очевидно, орієнтований граф із симетричною матрицею суміжності відповідає неорієнтованому графу, який має ту саму матрицю суміжності.

Наприклад, для графів, зображених на рис. 11.4, матриці суміжності



а)   *б)*

Рис. 11.4.

мають вигляд (табл. 11.1).

Таблиця 11.1

а)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$v1$	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	1	1	0	0	1
v_4	0	1	0	0	1
v_5	0	0	1	1	0

б)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$v1$	0	1	1	1	0	1	0
v_2	0	0	1	0	0	0	1
v_3	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0

Зауваження. Якщо граф має кратні ребра або дуги, то в матриці суміжності відповідні елементи $a_{ij} = k$, де число k – кратність ребра (дуги).

Відношення інцидентності на графі *G* можна означити матрицею $B(G) = \left(b_{ij}\right)$, яка має *n* рядків та *m* стовпців. Рядки відповідають вершинам графу, а стовпці – його ребрам. Елементи цієї матриці у випадку неорієнтованого графа є такими:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершина } v_i \textit{ і ребро } e_j \textit{ інцидентні,} \\ 0, \textit{ в супротивному випадку.} \end{cases} \qquad (11.3)$$

Це *матриця інцидентності* звичайного графу *G*, яка є одним із способів його визначення.

Таблиця 11.2.

а

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0
v_3	0	1	1	0	1	0
v_4	0	0	0	1	0	1
v_5	0	0	0	0	1	1

б

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
v_2	–1	0	1	0	0	0	0	0	1
v_3	0	–1	–1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	–1	1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	–1	2	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	–1	1	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1

Наприклад, для графу, який зображено на рис. 11.4,*а* матриця інцидентності має вигляд табл. 11.2, *а*.

Елементами матриці інцидентності $B(G)=\left(b_{ij}\right)$ орієнтованого графу *G* є:

$$b_{ij}=\begin{cases} 1,\ \textit{якщо вершина } v_i \textit{ є початком дуги } e_j, \\ -1,\ \textit{якщо вершина } v_i \textit{ є кінцем дуги } e_j, \\ \alpha \ (\textit{довільне число відмінне від } -1,0,1), \textit{ якщо} \\ \quad \textit{вершина } v_i \textit{ має петлю } e_j, \\ 0,\ \textit{якщо вершина } v_i \textit{ і дуга } e_j \textit{ не інцидентні.} \end{cases} \tag{11.4}$$

Наприклад, для орієнтованого графу, зображеного на рис. 11.4,*б*, матриця інцидентності наведена у табл. 11.2,*б*.

Відношення інцидентності можна задати ще *списком ребер* графу. Це третій, більш економний спосіб, яким можна задати граф *G*. Кожний рядок цього списку відповідає ребру, в ньому записано номери вершин, інцидентних йому. Для неорієнтованого графу порядок цих вершин у рядку довільний, для орієнтованого першим записується номер або інше найменування початку ребра, а другим – його кінця. У табл. 11.3, *а* та *б* наведено списки ребер відповідно для графів з рис. 11.4, *а* та *б*.

За списком ребер графу можна легко визначити матрицю інцидентності. Справді, кожний рядок цього списку відповідає стовпцю матриці з тим самим номером. Для неорієнтованого графу в рядку списку записуються номери елементів стовпця матриці інцидентності, що дорівнюють 1, а для орієнтованого графу в цьому рядку першим зазначається номер елемента стовпця матриці, який дорівнює 1, другим – номер елемента, що дорівнює –1.

Таблиця 11.3.

а

Ребра	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_2, v_4
e_5	v_3, v_5
e_6	v_4, v_5

б

Ребра	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_1, v_4
e_5	v_4, v_5
e_6	v_5, v_5
e_7	v_1, v_6
e_8	v_6, v_7
e_9	v_2, v_7

Поняття матриці інцидентності та списку ребер можна легко узагальнити на випадок мультиграфу.

11.3. Ізоморфізм графів.

Отже, граф можна задати різними способами. Він може бути зображений на кресленні (рисунку), заданий матрицею інцидентності, списком ребер або матрицею суміжності. Вигляд зображення залежить від форми ліній і взаємного розташування вершин. Іноді не так легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені різними кресленнями, як, наприклад, на рис. 11.5. Вигляд матриць та списку ребер залежить від нумерації вершин і ребер графу. Строго кажучи, граф вважається повністю заданим, якщо нумерацію його вершин зафіксовано.

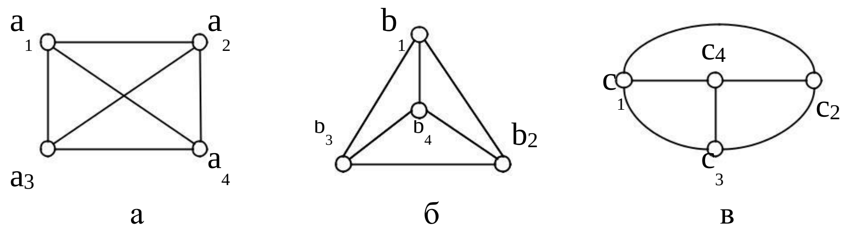


Рис. 11.5.

Означення. Графи G_1 і G_2 називають *ізоморфними* (позначаємо $G_1 \sim G_2$), якщо:

1) існує взаємно однозначна відповідність між їх вершинами;

2) якщо вершини з'єднанні ребром в одному графі, то вершини, які їм відповідають в іншому графі, теж з'єднані ребром.

Таким чином, графи, зображені на рис. 11.5, є ізоморфними. Іншими словами, графи будуть ізоморфними, якщо вони відрізняються тільки нумерацією вершин.

Перенумерація вершин графу задається рядком $a_1, \ldots, a_n$ нових номерів вершин, розташованих у початковому порядку. Нова матриця суміжності утворюється з початкової переміщенням кожного елемента a_{ij} в a_i-й рядок та a_j-й стовпець, тобто внаслідок перестановки $(a_1, \ldots, a_n)$ рядків і стовпців початкової матриці. Тому, щоб дізнатися, чи зображують дві матриці суміжності ізоморфні графи, можна, наприклад, здійснити усі перестановки рядків та стовпців першої матриці. Якщо після однієї з цих перестановок виникне матриця, що тотожно збігається з другою, графи, які зображаються цими матрицями, є ізоморфними. Проте, щоб пересвідчитися таким способом у тому, що графи не є ізоморфними, доведеться виконати всі $n!$ перестановок рядків і стовпців, а це – досить трудомістка операція.

Матриця інцидентності графу та список його ребер залежать від нумерації ребер і вершин. Перехід від однієї пари нумерації до іншої визначається перестановками $(v_1, \ldots, v_n)$ вершин та $(e_1, \ldots, e_m)$ ребер графу, який розглядається. Матриця інцидентності утворюється з початкової внаслідок перестановки стовпців (j-й на e_j-те місце) і рядків (i-й на v_i-те). Рядки списку ребер переставляються так само, як і рядки матриці інцидентності, причому кожний номер j в рядках списку замінюється номером v_j.

Отже, справедливі наступні теореми.

Теорема 11. 1. Два графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжностей можна одержати одну із другої однаковими перестановками рядків і стовпців.

Теорема 11. 2. Графи (орграфи) ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці інцидентності можна одержати одну із другої довільними перестановками рядків і стовпців.

11.4. *Операції над графами*

Для довільного графа *G(V, E)* визначається доповнювальний граф (або *доповнення*), $\overline{G}(V,\overline{E})$, тобто, це такий граф, який має ту ж множину вершин, а множина ребер визначається так: $\overline{E} = V^{(2)} \setminus E$. Отже, щоб отримати доповнювальний граф до графа *G(V, E),* потрібно з даного графа утворити повний, тобто з'єднати не з'єднані вершини, а потім вилучити ребра вихідного графа. На рис.11.6 зображено граф *G* та його доповнення.

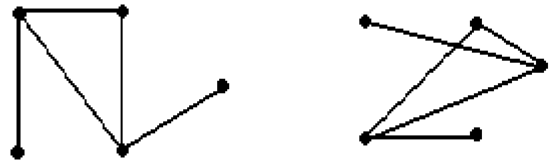


*Рис.*11.6

Граф, ізоморфний своєму доповненню, називається *самодоповненим.*

Важливою операцією є *перехід до підграфа*. Нехай є граф *G(V, E).*

Граф *H(V', E')* називається *підграфом* графа *G*, якщо кожна вершина і кожне ребро графа *H* є відповідно і вершиною і ребром графа *G*. Підграф *H* графа *G* називається *кістяковим підграфом*, коли *V=V'.*

Кажуть, що підграф *H(V', E') породжений множиною вершин V'*, якщо він містить всі ребра графа *G*, що з'єднують вершини з множини *V'.* На рис.11.7 зображено: *а)* – граф *G (V, E); б),* – його підграф; *в)* – підграф, породжений множиною вершин *V'={1, 2, 3, 4},* та *г)* – кістяковий підграф.

Операція *вилучення вершини v* з графа *G* полягає у тому, що ми отримуємо підграф *H* вилученням вершини *v* і всіх ребер, інцидентних вершині *v* з графа *G*. На рис.11.7, *д* показано граф з вилученою вершиною {2}.

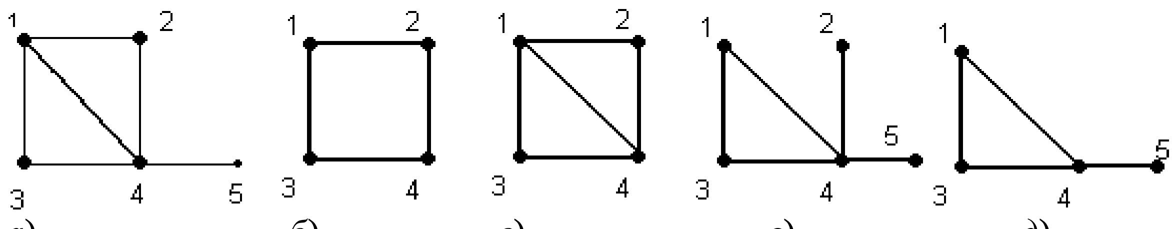


*Рис.*11.7

Операція *вилучення ребра*. Прикладом може бути рис.11.7, *г*, де вилучене ребро (1, 2) вихідного графа.

Операція *додавання ребра*. Якщо в графі *G* вершини *u* і *v* несуміжні, то, з'єднавши їх ребром *e* = **(***u*, *v*)**,** отримаємо граф *G+e*.

Результатом операції *об'єднання графів* $G_1(E_1,V_1)$ і $G_2(E_2,V_2)$ є граф $H = G_1 \cup G_2$, множина вершин і ребер якого є відповідно $V = V_1 \cup V_2$ і $E = E_1 \cup E_2$. Приклад об'єднання графів показано на рис. 11.8

Об'єднання графів називається *диз'юктивним*, якщо ці графи не мають спільних вершин, тобто $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

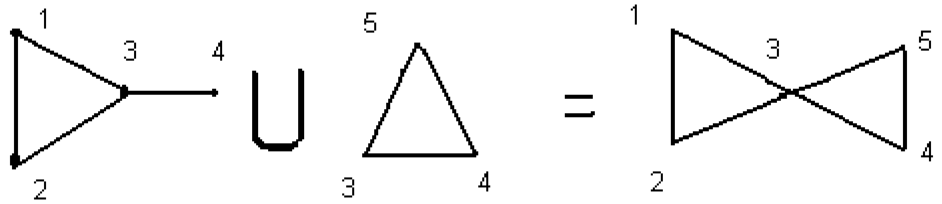


*Рис.*11.8

Ще однією важливою операцією є *ототожнення вершин*. Нехай *u* і *v* дві вершини графа *G*. До графа *H* = *G* – *u* – *v* придаємо нову вершину *v'* з'єднавши її ребром з кожною з вершин, що входять в об'єднання оточень вершин *u* і *v* в графі *G*. Кажуть, що побудований граф *H* отримується із графа *G* ототожненням вершин *u* і *v*.

Розглядається також операція *стягування ребра*. Стягування ребра(*u*, *v*) означає ототожнення суміжних вершин *u* і *v*. На рис.11.9 показано граф *G* і граф, отриманий з *G* стягування ребра *{1,2}*.

Вважають, що граф *G* стягується до графа *H*, якщо *H* отримується деякою послідовністю стягування ребер.

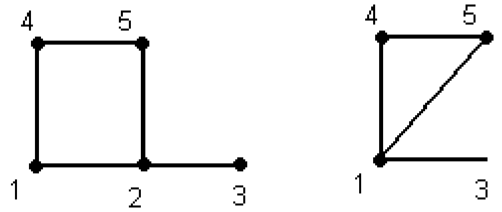


*Рис.*11.9

Легко бачити, що *граф Петерсена* (рис.11.10) стягується до повного графа K_5.

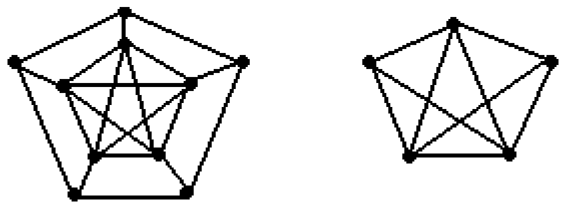


*Рис.*11.10

В деякому розумінні двоїстою до операції стягування ребра є операція *розчеплення вершини*. Нехай *v* – одна з вершин графа *G*. Розіб'ємо її оточення довільно на дві частини *M* і *N* і виконаємо таке перетворення графа *G*: вилучимо вершину *v* разом з інцидентними їй ребрами, додамо нові вершини *u* і *w* і ребро (*u*, *w*), що їх з'єднує, вершину *u* з'єднаємо ребром з кожною вершиною з множини *M*, а вершину *w* – з кожною вершиною множини *N*. Це і є граф, отриманий з графа *G* розчепленням вершини *v*.

11.5. Маршрути, ланцюги, цикли, шлях.

Маршрутом (або *шляхом*) у графі $G=(V,E)$ називається переміжна послідовність

$$v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_k, v_{k+1} \tag{11.5}$$

вершин v_i і ребер e_i така, що кожні два сусідні ребра в цій послідовності мають спільну вершину: $e_i=(v_i, v_{i+1}),\ i=1,2,...,k$. Вершина v_1 називається *початком* шляху, а вершина v_{k+1} - *кінцем* шляху. Всі інші вершини цього шляху називаються *проміжними*, або *внутрішніми* вершинами.

Кажуть, що маршрут (11.5) *з'єднує* вершини v_1 і v_{k+1} або *веде* з вершини v_1 у вершину v_{k+1}; називають (v_i ,v_{k+1}) – маршрутом. Очевидно, що цей маршрут можна задавати послідовністю $v_1, v_2, ..., v_{k+1}$ його вершин, а також послідовністю $e_1, e_2, ..., e_k$ його ребер.

Кількість k ребер у маршруті називається *довжиною* маршруту.

Маршрут довжини 0 складається з єдиної вершини.

Маршрут називається *ланцюгом,* якщо в нього всі ребра різні, і *простим ланцюгом*, якщо всі проміжні вершини різні.

Маршрут (11.5) називається *замкненим* (або *циклічним*), якщо $v_1=v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називається *циклом,* а замкнений простий ланцюг – *простим циклом*.

Простий цикл довжини k називається k – *циклом,* 3 – цикл часто називають *трикутником*. Мінімальна із довжин циклів графа називається його *обхватом*.

Цикл, що містить усі ребра графа, називається *ейлеровим*. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому є ейлерів цикл. *Ейлеровим ланцюгом* називається ланцюг, що проходить через усі ребра графа.

Розглянемо, наприклад, граф, зображений на рис.11.11. У ньому (1, 2) і (1, 2, 4,7) є простими ланцюгами;
(1, 2, 4, 7, 8, 4) – ланцюг, що не є простим;
(1, 2, 4, 7, 8, 4, 2) – маршрут, що не є ланцюгом;
(1, 2, 4, 1) – простий цикл. Обхват цього графа дорівнює 3.

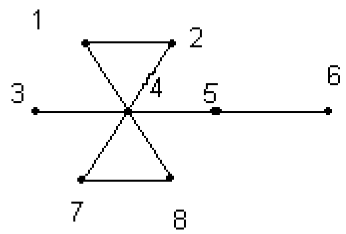


Рис.11.11.

Справедливими є наступні деякі твердження.

1. Будь-який маршрут, що веде з вершини u до вершини v, містить у собі простий (u,v) – ланцюг.

2. Кожен цикл містить простий цикл.
3. Об’єднання двох (u,v) – ланцюгів, що не збігаються, містить простий цикл.

   Покажемо це на прикладі графа, зображеного на рис.11.12. Нехай маємо два різних (1,6) – ланцюги: (1, 2, 5, 6) і (1, 2, 5, 4, 6). Очевидно, що їх об’єднання буде містити (4, 5, 6, 4) – простий цикл.

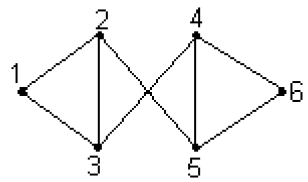


Рис. 11.12.

11.6. Степені вершин графа.

Степенем вершини v графа *G* називається число інцидентних їй ребер, тобто число вершин в її оточенні. Будемо позначати степінь вершини v через ***degv*.** Отже, $degv=|N(v)|$. Вершина степеня 0 називається *ізольованою*, вершина степеня 1 – *кінцевою*. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається *кінцевим*. Очевидно, що петля додає до степеня вершини 2.

Приклад 11.1. Визначити степені вершин графа, заданого геометрично на рис 11.13.

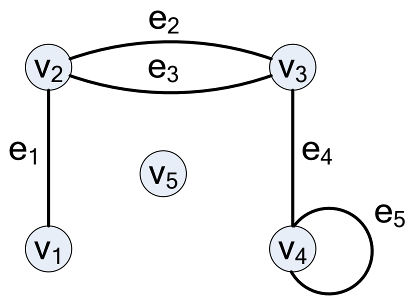


Рис 11.13.

Розв’язання. Запишемо степені вершин заданого графа і охарактеризуємо вершини:

$deg(v_1) = 1$, отже вершина v_1 - висяча;

$deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 3$, $deg(v_4) = 3$;

$deg(v_5) = 0$, отже вершина v_5 – ізольована.

Розглянемо суму степенів усіх вершин графа. Кожне ребро вносить у цю суму двійку, тому справедливе твердження.

Лема **(***про рукопотискання***).** Сума степенів усіх вершин графа $G =(V, E)$ – парне число, яке дорівнює подвійному числу ребер:

$$\sum_{v\in V} \deg v = 2|E| . \qquad (11.6)$$

Наслідок. У будь – якому графі $G =(V, E)$ число вершин непарного степеня парне.

Дійсно, нехай число вершин графа G дорівнює $|V| = n$. Вважаємо, що перші k вершин $v_1,\dots,v_k$ мають парні степені, а інші n- k вершин $v_{k+1},\dots,v_n$ – непарні. Очевидно, це не порушує загальності, а тому маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \deg(v_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \deg(v_i) \tag{11.7}$$

Зідно з формулою (11.6) уся сума в (11.7) є парною. Оскільки сума парних чисел парна, то й перший доданок у правій частині (11.7) парний. Тоді другий доданок у правій частині (11.7) має бути також парним. Але другий доданок – сума непарних елементів. Отже, число цих доданків повинне бути парним.

Граф називається *регулярним* (однорідним), якщо степені всіх його вершин рівні між собою. *Степенем* регулярного графа називається степінь його вершин і позначається $deg\ G$.

Всі повні графи – регулярні. Очевидно, степінь повного графа порядку n дорівнює $(n-1)$. Справедливі такі твердження.

1. Не існує регулярного графа з n вершинами степенів k, у якого n і k – обидві непарні.

2. Кількість ребер у повному графі K_n з n вершинами дорівнює $n(n-1)/2$.

11.7. Зв'язність графів, компоненти зв'язності.

Граф називається *зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини $u \neq v$ з'єднанні маршрутом (ланцюгом або простим ланцюгом). Так, граф, зображений на рис.11.11, є очевидно зв'язним.

Нехай граф $G = (V, E)$ – не зв'язний. Тоді множину його вершин V можна розбити на підмножини $V_1,\dots,V_p$ такі, що між будь-якими двома вершинами підмножини V_i, $i=1,\dots,p$ існує шлях, а ніяка вершина підмножини V_i не зв'язана ні з якою вершиною іншої підмножини V_j, $i \neq j$. Підграфи на підмножинах V_i, $i=1,\dots,p$ називаються *компонентами зв'язності* (*компонентами*) графа. Очевидно, зв'язний граф G має тільки один компонент зв'язності, що є графом G.

Приклад графа G, що складається з п'яти компонентів зв'язності G_1, G_2, G_3, G_4 і G_5 зображено на рис. 11.14.

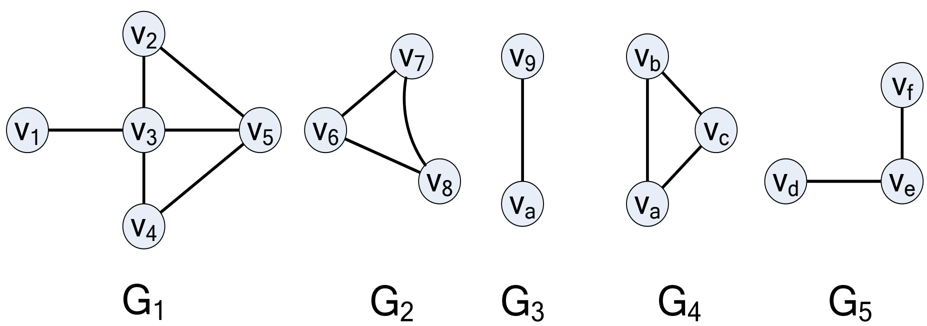


Рис.11.14.

Відстанню між вершинами v і w зв'язного графа (позначається $d\,(v,w)$) називається довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w.

Оскільки кожна вершина графа $G=(V,E)$ з'єднана сама з собою маршрутом довжини 0, то для всіх $v \in V$ виконується $d\,(v,v)=0$.

Означена функція відстані задовольняє три аксіоми метрики, тобто для будь-яких вершин $v, w, u \in V$ виконується

1) $d\,(v,w) \geq 0$; $d\,(v,w)=0$ тоді і тільки тоді, коли $v = w$;
2) $d\,(v,w)=d\,(w,v)$;
3) $d\,(v,w) \leq d\,(v,u)+d\,(u,w)$.

Ексцентриситетом $e(v)$ довільної вершини v зв'язного графа $G=(V, E)$ називається найбільша з відстаней між вершиною v і всіма іншими вершинами графа G, тобто

$$e(v) = \max\{d(v, w) \mid w \in V\}. \qquad (11.8)$$

Діаметром зв'язного графа G називається максимальний з усіх ексцентриситетів вершин графа G; позначається $D(G)$, тобто

$$D(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}. \qquad (11.9)$$

Радіусом зв'язного графа G називається найменший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $r(G)$:

$$r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}. \qquad (11.10)$$

Якщо $e\,(v)=r(G)$, то вершина v називається *центральною*. *Центром* графа G називається множина всіх його центральних вершин.

Справедливими є настутні твердження.

Теорема 11.3. Граф G буде зв'язним тоді і тільки тоді, коли для будь-якої фіксованої вершини u і для будь-якої іншої вершини v існує (u,v)-маршрут.

Теорема 11. 4. Будь-який граф однозначно зображується у вигляді прямої суми своїх компонент зв'язності.

Теорема 11.5. Для будь-якого графа або він, або його доповнення є зв'язним.

Теорема 11.6. Нехай $G=(V, E)$ зв'язний граф і e деяке його ребро. Розглянемо граф G', який отримано з G вилученням ребра e:

а) якщо ребро e належить деякому циклу графа G, то граф G' є зв'язним графом;

б) якщо ребро e не належить жодному циклу графа G, то граф G' не є зв'язним графом і має рівно дві компоненти зв'язності.

Позначимо через $k(G)$ – число зв'язності графа G. Відповідь на запитання про можливу кількість ребер в графі порядку n з фіксованим числом компонент $k = k(G)$ дає така теорема.

Теорема 11.7. Нехай $G = (V, E)$ граф з n вершинами і k компонентами зв'язності. Тоді число його ребер m задовольняє такі нерівності:

$$n - k \le m(G) \le (n-k)(n-k+1)/2. \qquad (11.11)$$