Основні поняття теорії множин

Теорія множин разом з іншими розділами Дискретної математики має безліч корисних застосувань у програмуванні. Вона використовується для побудови систем управління базами даних, під час побудови та організації роботи комп'ютерних мереж, зокрема мережі Інтернет.

У повсякденному житті та практичній діяльності нам доводиться мати справу з поняттям множини, якому важко дати чітке визначення. Прикладами множин можуть бути: множина закладів вищої освіти; множина студентів даного закладу; множина підприємств міста; множина гравців та болільників на стадіоні; множина літер українського алфавіту; множина слів у словнику і так далі. У математиці постійно доводиться працювати з множинами різної природи, наприклад: множиною дійсних чисел, множиною прямокутних трикутників, множиною векторів у тривимірному просторі. Поняття множини є одним із основних понять, тому неможливо дати йому означення, спираючись на інші більш прості й загальні поняття, на зразок того, як визначається поняття розв'язку рівняння або похідної. Його слід віднести до аксіоматичних понять. Такими аксіоматичними поняттями, наприклад, в геометрії є поняття точка, пряма, площина. Часто приймається формулювання *інтуїтивного поняття множини* Георга Кантора, основоположника теорії множин: «Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається *множиною*. Предмети, які входять до складу множини, називаються її *елементами*». При цьому ніяких припущень щодо природи предметів не робиться.

Множини позначаються великими літерами латинської абетки: $A, B, C, \ldots$, а елементи, які становлять множину, позначаються малими латинськими літерами: $a, b, c, \ldots$, або малими латинськими літерами з індексами.

Використовуються такі загальноприйняті позначення основних числових множин:

1. N – множина натуральних чисел:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. Z – множина цілих чисел:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1,\ 0,\ 1, 2,\ 3, \ldots\}.$$

3. Q – множина раціональних чисел. Будь-яке раціональне число можна зобразити у вигляді дробу:

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in N\}$$

4. R – множина дійсних чисел. Будь-яке дійсне число можна зобразити у вигляді нескінченого десяткового дробу $a, b_1 b_2 ... b_n ...$ із цілою частиною $a \in \mathrm{Z}$ і $b_k \in \{0,...,9\}$. Множині дійсних чисел відповідає множина точок на числовій прямій

Приклад. Множина літер української абетки; книги на полиці, студенти групи, сукупність аксіом евклідової геометрії.

Щоб записати множину A, яка складається з елементів a_1, a_2, ..., a_n, використовують фігурні дужки

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Зауваження. Порядок елементів множини не має значення.

Належність елемента до множини позначають символом $\in$, тобто $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, …, $a_n \in A$, або скорочено: $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Якщо b не є елементом A, то пишуть: $b \notin A$.

Множина як об’єкт може бути елементом іншої множини.

Приклад.

1. $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$
2. У множині книг на полиці самі книги можуть розглядатися як множини сторінок.

Приклад. Пояснити, чому $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Розв’язання.

Множина $\{1, 2, 3, 4\}$ складається із чотирьох елементів, одним із яких є 3, тому записуємо $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Множина $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$ складається із чотирьох елементів: множини $\{1, 2, 3\}$, множини $\{2, 3\}$, елемента множини 1 і елемента множини 2. У складі цих елементів не існує множини $\{1, 2\}$, отже, $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Множина може мати **скінчену** кількість елементів, тоді вона називається скінченною, в противному випадку – **нескінченною**.

Якщо множина A – скінченна, то кількість її елементів називається **потужністю** й позначається через $|A|$. Якщо потужності двох скінченних множин співпадають, то ці множини називаються **рівнопотужними**.

Приклад.

1) Множина непарних чисел $P = \{1, 3, 5, … \}$ (нескінчена);

2) множина всіх розв’язків рівняння $\sin x = 1$ (нескінчена);

3) множина студентів університету (скінчена);

4) множина точок кола (нескінчена).

Існує множина, яка не містить жодного елемента. Така множина називається **порожньою** і позначається символом $\varnothing$. Порожня множина умовно вважається скінченною.

Приклад. Множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 16 = 0$ є порожньою.

Не завжди відомо, чи існують елементи, які визначають деяку множину.

Приклад. Множина виграшних квитків лотереї може стати визначеною тільки після тиражу.

Передбачається, що границі множини повинні бути чітко визначені. Саме задання множини явно або неявно обмежує сукупність об'єктів, які належать цій множині. У будь-якій конкретній задачі доводиться мати справу тільки з фіксованою для цієї задачі, множиною.

Універсальною множиною (***універсумом***) називається множина, що містить всі елементи з деякою заданою властивістю. Позначається така множина через U. Всі розглянуті множини є її підмножинами.

Поняття «універсальної множини» залежить від задачі, яку розглядають. Прикладом універсальної множини може бути множина дійсних чисел, множина людей на планеті Земля тощо.

Тільки одного поняття множини ще не достатньо для вивчення існуючих дискретних структур. Необхідно ще ввести поняття частини множини і правил створювання нових множин із уже існуючих.

Множина A називається ***підмножиною*** (або ***включенням***) множини B ($A \subseteq B$), якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x \in \mathrm{A}$, то $x \in B$.

Наприклад. Множина $\{2, 4\}$ є підмножиною множини $\{1,2,3,4,5\}$:

$\{2, 4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$

Якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то A називається **строгою** підмножиною й позначається $A \subset B$. Множина A за такої умови ще називається **власною підмножиною** множини B.

Наприклад. Множина невід'ємних дійсних чисел $R_+ = [0, +\infty)$, яка має спеціальне позначення R_+, є строгою підмножиною множини дійсних чисел $R = (-\infty; +\infty)$, тобто $R_+ \subset R$.

Наприклад. Множина $\{2, 4\}$ є строгою підмножиною множини $\{1,2,3,4,5\}$: $\{2, 4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$.

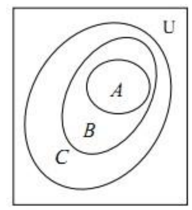
Властивості операції включення:

1) $A \subseteq A$
2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$ *(означення рівності множин)*
3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$
4) для довільної множини A: $\varnothing \subseteq A$

Властивості операції строгого включення:

1) $A \not\subset A$
2) якщо $A \subset B$, то $B \not\subset A$
3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$

Відношення строгого включення графічно зображено на рисунку. Для графічного зображення множини використовують діаграми Ейлера-Венна, які зображують сукупність елементів, що утворюють множину кругами, а універсальну множину - прямокутником



Відношення включення $A \subset B \subset C$

Множини A та B називаються **рівними** $A=B$, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$ (тобто мають однаковий набір елементів).

Вважається, що порожня множина є підмножиною кожної не порожньої множини A, тобто $\varnothing \subset A$. Слід пам'ятати, що порожня множина є множиною, тому, якщо деяка множина A не містить жодного елемента, то $A=\varnothing$ і $|A|=0$. Запис $A=\{\varnothing\}$ означає, що множина A містить один елемент – $\varnothing$ і тоді $|A|=1$. Враховуючи, що A також входить до A, то кожна не порожня множина A має принаймні дві різні підмножини – *порожню множину* $\varnothing$ і саму цю множину A.

Варто розрізняти поняття належності елементів множини і включення! Так, наприклад, якщо множина $A=\{1, 3, 6, 13\}$, то $3 \in A$, $6 \in A$, але $\{3, 6\} \notin A$, у той час як $\{3, 6\} \subseteq A$

Множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини A, називається ***булеаном***. Позначається булеан $P(A)$. Якщо множина A містить n елементів, то множина (булеан) $P(A)$ містить 2^n елементів. Булеан включає до свого складу також елементи $\varnothing$ та множину A.

Приклад. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. Визначити булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$?

Розв'язання:

$$P(A)=\{0, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Кількість підмножин можна обчислити за формулою 2^n, де n – кількість елементів множини A, отже, $2^4 = 16$.

Отже, потужність $|P(A)|=16$.

Приклад. Вказати усі підмножини множини $A=\{\{1,3\},\{2,3,5\},4\}$.

Розв'язання.

Кількість підмножин можна обчислити за формулою 2^n, де n – кількість елементів множини A, отже, $2^3=8$.

Перелічимо підмножини множини A:

$\varnothing,\{\{1,3\}\},\{\{2,3,5\}\},\{4\},\{\{1,3\},\{2,3,5\}\},\{\{1,3\},4\},\{\{2,3,5\},4\},\{\{1,3\},\{2,3,5\},4\}$.

1.1. Способи задання множин

Існує кілька способів визначення множини.

1. Множину можна задати простим ***переліком*** (списком) всіх її елементів*:* $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Таким способом переважно задають скінченні множини, які мають невелику кількість елементів. Порядок запису елементів множини при цьому позначенні є неістотним і однакові елементи у фігурних дужках не повторюються (записуються лише один раз).

Наприклад.

1. Множину відмінників у групі позначимо M і задамо її переліком:

   M = {Аврамчук, Боровик, Вороний, Петрієнко}.

2. Множина цифр в десятковій системі числення:

   $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2. Множину можна задати , вказавши ***характерну властивість*** $P(x)$, якою володіють усі елементи x множини A. Властивість $P(x)$ називають **предикатом**. Предикат дозволяє із сукупності об'єктів виділити ті, що належать множині. У цьому випадку множину A, задану за допомогою предиката $P(x)$ записують у такий спосіб:

$A=\{x|\ P(x),\ x\in U\}$ або $A=\{x:\ P(x), x\in U\}$,

Читають цей вираз так: множина А складається з таких елементів x , що задовольняють деяку умову (володіють властивістю) $P(x)$.

Наприклад.

1. $A=\{x|\ x$ – *просте число*$\}$ ($A=\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$)
2. $B=\{x|\ x\in R,\ x^2+2x-15=0\}$ ($B=\{-5, 3\}$)

За допомогою характеристичної властивості можна задати як скінченні так і нескінченні множини.

3. Множину можна задати виразом, в який входять множини, операції і можуть бути дужки. Такий спосіб задання множини називається ***аналітичним***.

Наприклад . Нехай $U=\{1,2,3,4,5\}$; $A=\{1,3,4\}$; $B=\{2,3\}$; $C=\{1,4\}$.

$A\cap\overline{B}=\{1,3,4\}\cap\{1,4\}=\{1,4\}$;

$(B\setminus A)\cup C=\{2\}\cup C=\{1,2,4\}$.

4. Множину можна задати ***рекурсивно***. Рекурсивна процедура дозволяє визначити наступні елементи множини через попередні.

Наприклад.

1. Множину натуральних чисел $N=\{1, 2, 3,\ldots\}$ можна задати в такий спосіб: $N=\{i \mid$ якщо $i\in N$, то $i+1\in N$, $i \geq 1\}$
2. Множина $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $f_i \in N$, $i=1,2,3,\ldots$, $f_1=1$, $f_2=2$; $f_n=3 f_{n-2} + f_{n-1}$, $n=3,4,\ldots$, тоді $f_3=3 f_1 + f_2=3\cdot1+2=5$; $f_4=3 f_2 + f_3=3\cdot2+5=11$, ….

5. Множини, як скінченні, так і нескінченні, можна задати ***геометрично*** за допомогою кругів Ейлера (діаграм Венна). При цьому множини зображують геометричними фігурами: універсальна множина U зображується у вигляді прямокутника, а її підмножини кругами усередині прямокутника.

За допомогою діаграм Ейлера-Венна можна графічно показати чи належіть деякий елемент $x \in U$ деяким множинам чи ні.

Наприклад.

1. На рис.1.1. елемент x_1 належить A і не належить B, x_2 належить A і B, x_3 належить B і не належить A, x_4 не належить ні A, ні B. будь-який елемент належить універсальній множині U.

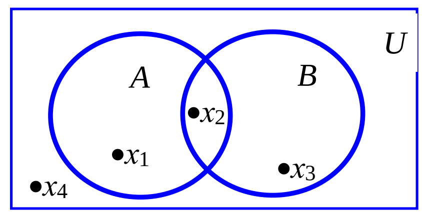


Рис.1.1. Діаграма Ейлера-Венна

2. Нехай задані множини $A=\{1, 2, 3,4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. На рис.1.2. діаграма Ейлера-Венна таких множин має вигляд

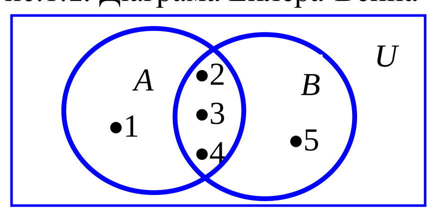


Рис.1.2. Діаграма Ейлера-Венна

Розглянемо приклади розв'язування завдань

Приклад. Задайте переліченням елементів множину:

а) простих чисел, що знаходяться між 15 та 30.

Відповідь: $A=\{17,19,23,29\}$

б) літер міста, де Ви мешкаєте.

Відповідь: $B=\{к, и, ї, в\}$

Приклад. За допомогою характеристичного предиката задайте множину всіх:

а) парних натуральних чисел.

Відповідь: $C=\{x\in N \mid x \quad /2\in N\}$.

б) $A=\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$.

Відповідь: $A=\{x \mid 0<x\leq 24$ і $x/3\in Z\}$.

б) цілих чисел, не більших за 100.

Відповідь: $D=\{x\in Z \mid x\leq 100\}$.

Приклад. Визначте, які елементи містить множина:

а) $A=\{x\in N\mid x-\textit{дільник}\,10\}$.

Відповідь: Множина A складається з чисел: $1,2,5,10$, тобто $A=\{1,2,5,10\}$.

б) $B=\{x\mid x-\textit{буква слова "математика"}\}$.

Відповідь: Множина B складається з букв: $м,а,т,е,и,к$, тобто $B=\{м,а,т,е,и,к\}$.

Приклад. Чи є істинним наступне твердження:

а) $t\in\{15,u,\{t\}\}$.

Відповідь: Ні, оскільки $t\neq 15, t\neq u, t\neq\{t\}$.

б) $\{u,t\}\in\{u,\{t,u\},\{t\}\}$.

Відповідь: Так, тому що $\{u,t\}=\{t,u\}$.

в) множина $D=\{x\in R\mid x^4+12=0\}$ є нескінченною.

Відповідь: Ні, оскільки $D=\varnothing$. Отже, D – скінченна.

1.3. Операції над множинами

Для множин введемо ряд операцій (теоретико-множинних операцій), результатом виконання яких будуть також множини. За допомогою цих операцій можна конструювати із заданих множин нові множини.

Нехай A і B – деякі множини.

- ***Об'єднанням (сумою)*** множин A і B називається множина $A\cup B$, що складається з тих і тільки тих елементів, які входять або до A, або до B, або до A і B одночасно

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ або } x\in B\}$$

Геометричну інтерпретацію об'єднання двох множин A та B подано на рис. 1.3.

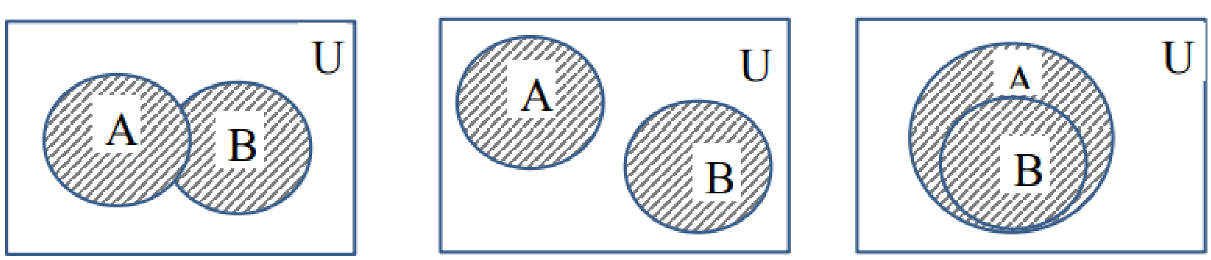


Рис.1.3. Діаграма Ейлера-Венна для $A\cup B$

Наприклад.

- $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, тоді $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- $A=\{a,b,d\}$, $B=\{b,d,e,h\}$, $A\cup B=\{a,b,d,e,h\}$;
- $A=\{a,b\}$, $B=\{e,h\}$, $A\cup B=\{a,b,e,h\}$;
- $A=\{\text{парні числа}\}$, $B=\{\text{непарні числа}\}$, $A\cup B=N$.

➢ ***Перетином (добутком)*** множин A і B називається множина $A\cap B$, що містить тільки елементи, які належать до A і B одночасно

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ і } x\in B\}$$

Геометричну інтерпретацію перетину двох множин A та B подано на рис. 1.4.

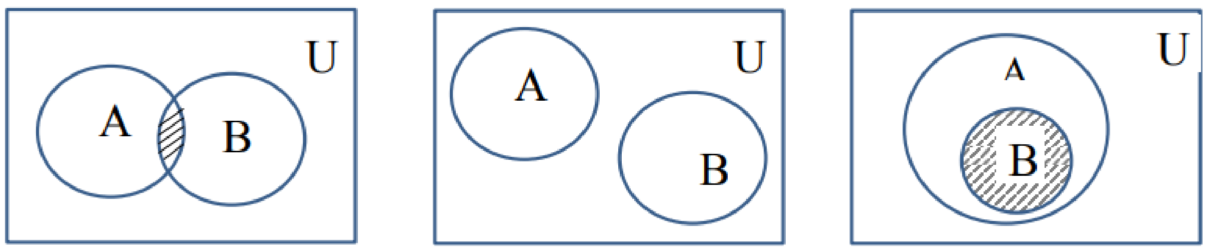


Рис.1.4. Діаграма Ейлера-Венна для $A\cap B$

Наприклад.

- $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, тоді $A\cap B=\{3,4\}$.
- $A=\{a,b\}$, $B=\{b,d,e,k\}$, $A\cap B=\{b\}$;
- $A=\{k,p\}$, $B=\{b,c,d\}$, $A\cap B=\varnothing$;
- $A=Z$, $B=\{x \mid x\in Z, x>0\}$, $A\cap B=N$;
- $A=\{\text{прямокутники}\}, B=\{\text{ромби}\}$, $A\cap B=\{\text{квадрати}\}$.

➢ ***Різницею множин*** A і B називається множина $A\setminus B$, що складається з усіх тих елементів множини A, які не належать B:

$$A\setminus B = \{x \mid x\in A \text{ і } x\notin B\}$$

Геометричну інтерпретацію різниці двох множин A та B подано на рис. 1.5.

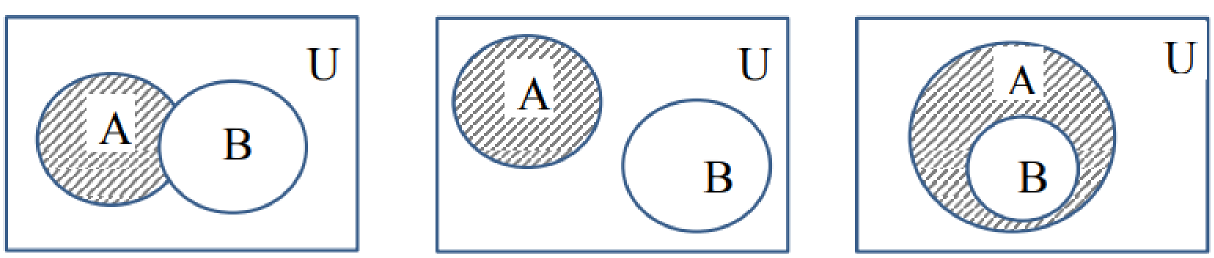


Рис.1.5. Діаграма Ейлера-Венна для $A\setminus B$

Наприклад.

- A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, тоді $A \setminus B$={1,2}.
- $A=\{a,b,d\}$, $B=\{b,d,e,h\}$, $A\setminus B=\{a\}$, $B\setminus A=\{e,h\}$;
- $A=\{k,p\}$, $B=\{a,b\}$, $A\setminus B=\varnothing$;
- $A=N$, $B=${непарні числа}, $A\setminus B=${парні числа}.

➢ Різниця універсальної множини U і будь-якої її підмножини A називається ***доповненням*** множини A до універсальної U. Позначається $\overline{A}=U\setminus A$.

Геометричну інтерпретацію доповнення множини A *до* U подано на рис. 1.6.

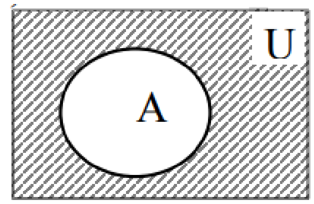


Рис.1.6. Діаграма Ейлера-Венна для $\overline{A}=U\setminus A$

➢ ***Симетричною різницею*** двох множин A та B називається різниця об'єднання і перерізу даних множин та позначається $A\oplus B$:

$$A\oplus B=\{x\,|\,(x\in A\cup B)\wedge(x\notin A\cap B)\}$$

Геометричну інтерпретацію різниці двох множин A та B подано на рис. 1.7.

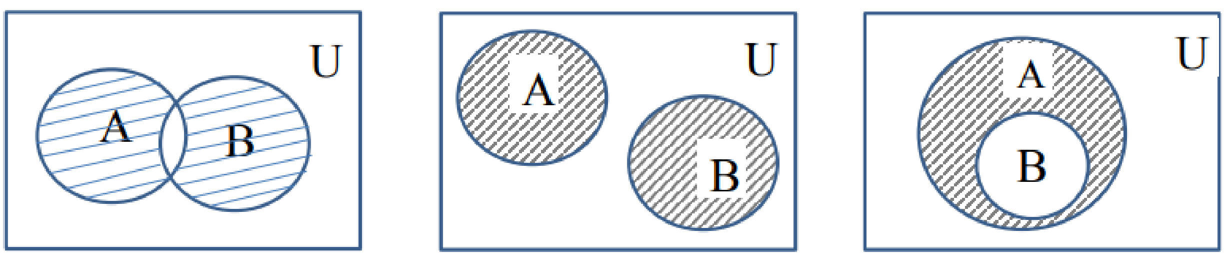


Рис.1.7. Діаграма Ейлера-Венна для $A\setminus B$

Наприклад. Нехай A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, тоді $A\oplus B$={1, 2, 5, 6}.

Приклад. Нехай A={1, 3, 4, 5, 8}; B=={2, 4, 5, 6, 9}, U= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, тоді:

$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9};
$A \cap B$ = {4, 5};
$A \setminus B$ = {1, 3, 8};
$A \oplus B$ = {1, 2, 3, 6, 8, 9};
$\overline{A}$ = {0, 2, 6, 7, 9};
$\overline{B}$ = {0, 1, 3, 7, 8};

Пріоритет операцій в алгебрі множин такий:

1. $\overline{A}$
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$

4. $A \setminus B$

Розглянемо приклад

Приклад. Нехай треба розташувати дужки (визначити послідовність виконання операцій) у формулі

$E = (A \setminus B \cup \overline{A} \cap D) \setminus B$

З урахуванням пріоритетів це слід зробити так:

$E = (A \setminus (B \cup ((\overline{A}) \cap D))) \setminus B$

1.4. Формули законів алгебри множини

Для роботи із множинами часто використовують закони, наведені у таблиці

Назви законів	**Формулювання законів**
Закони комутативності	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Закони асоціативності	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Закони дистрибутивності	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Закон подвійного доповнення	$\overline{\overline{A}} = A$
Закони ідемпотентності	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Закони де Моргана	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Закони поглинання	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Закони тотожності	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Закон домінування	$A \cap \varnothing = \varnothing$

1.5. Доведення рівностей з множинами

Доводити рівності з множинами можна різними способами.

Універсальним методом доведення рівностей з множинами є ***метод двостороннього включення***, який базується на означенні рівності множин, а саме, якщо дві множини A та B рівні тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ та $B \subset A$.

Приклад. Доведемо рівність множин, яка є формулюванням закону де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$.

Припустимо, що $x \in \overline{A \cap B}$. Тоді $x \notin A \cap B$, звідси $x \notin A$або $x \notin B$. Отже $x \in \overline{A}$або $x \in \overline{B}$, а це означає, що $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Отже, доведено, що $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Навпаки, нехай $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тоді $x \in \overline{A}$ або $x \in \overline{B}$, звідки $x \in A$ або $x \in B$. Це означає, що $x \in A \cap B$, тобто $x \in \overline{A \cap B}$. Отже $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Для доведення рівності множин використовують ***таблиці належності***. У цих таблицях розглядають усі можливі комбінації належності елементів множинам і позначають 1**,** якщо елемент належить множині, 0 – якщо елемент їй не належить.

Приклад. Доведемо цим способом рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$**.** Доведення подано у таблиці.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Стовпчики, які в таблиці відповідають множинам $\overline{A \cap B}$ та $\overline{A} \cup \overline{B}$ збіглися, отже $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ефективним методом доведення рівностей з множинами є ***метод еквівалентних перетворень***. Його суть полягає у використанні законів і властивостей операцій над множинами для зведення однієї частини рівності до іншої чи спрощення обох частин до одного і того ж самого проміжного виразу.

Приклад. Доведемо, що $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$. Використовуючи закони де Моргана та комутативності, можна записати:

$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$ – за законом де Моргана;

$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ – за законом де Моргана;

$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A}$ – за законом комутативності;

$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$ – за законом комутативності.