Тема 1. ІМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ В КЛАСИЧНІЙ ІМОВІРНІСНІЙ СХЕМІ. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ.

СТАТИСТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЇ

Випробування і події, види подій. Класична формула для обчислення ймовірності події. Геометричні ймовірності. Відносна частота появи події. Статистичне означення ймовірності.

Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ТИПОВІ ПРИКЛАДИ

План.

1.1. Випробування та події. Означення та види подій

Теорія ймовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності, що виникають у випробуваннях (дослідах, експериментах, спостереженнях тощо) з випадковими наслідками (результатами) при їх масовому повторенні. Тобто основним об'єктом досліджень теорії ймовірностей є випробування з випадковими наслідками, або так звані стохастичні випробування. Наслідками випробувань є ті чи інші події.

Наведемо приклади випробувань та їхніх наслідків - подій:

Випробування	*Події*
1. Кидання грального кубика	Випала парна кількість очок
2. Оцінювання якості виробу	Виріб виявився бракованим
3. Звернення до системи продажу авіаквитків -	Одержано квиток
4. Випробування автоматичної системи на протягом часу I	Система вийшла з ладу надійність
5. Вимірювання фізичної величини - приладом	Знайдено значення величини із заданою точністю

' Поняття події є одним із основних, базових понять теорії ймовірностей. Під подією будемо розуміти всякий факт, який у результаті випробування може відбутися або не відбутися. Події, як правило, позначають великими латинськими літерами *A, B, C, ...* або в разі їх значної кількості — великою латинською літерою з індексом: $A_1, A_2,..., A_n$, а зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, подія *A* = '{рейс до Одеси виконано за розкладом).

Усі події поділяються на *достовірні, неможливі та випадкові.* •

Достовірною називається подія, яка неодмінно відбудеться при. проведенні випробування. Наприклад, при виборі навмання одного виробу із комплекту, який містить лише стандартні вироби, подія (вибрано стандартний виріб} — достовірна.

Неможливою називається подія, яка при проведенні випробування не відбудеться ні за яких умов. Наприклад, подія {вибрано нестандартний виріб} — неможлива в умовах попереднього прикладу.

Випадковою називається подія, яка в результаті проведеного випробування може відбутися або не відбутися залежно від впливу випадкових факторів. Наприклад, при виборі навмання одного виробу з комплекту, який складається зі стандартних і нестандартних виробів, подія (вибрано стандартний виріб} — випадкова.

Отже, кожне стохастичне випробування має деяку скінченну (або нескінченну) множину $\Omega=\{\acute{\omega}_1,\acute{\omega}_2,\dots, \acute{\omega}_n\}$ усіх можливих, наслідків, які не розкладаються на простіші. Множина **Ω** утворює так звану *множину (або простір) елементарних наслідків* $\acute{\omega}_i$ якщо ці наслідки є взаємовиключними і результатом випробування завжди є один і тільки один наслідок.

Оскільки довільна подія *A* є. наслідком деякого стохастичного випробування, а простір **Ω** — множина всіх можливих елементарних наслідків випробування, то подія *A* входить у простір **Ω**. При цьому ті елементарні наслідки $\acute{\omega}_i$ з простору **Ω**., при яких подія *A* відбувається, тобто наслідки, які входять до складу події *A* ($\acute{\omega}_i \in A$), називаються *сприятливими* щодо події *A* .

Приклад 1.1. Із двоцифрових чисел, що не перевищують 20, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків Ω і події

A ={вибране число ділиться на 5};

B = {вибране число просте};

C = {вибране число парне}.

Розв'язання. У результаті випробування може бути вибрано будь-яке двоцифрове число, не більше від 20, Отже, простір елементарних наслідків

Ω ={10, 11, 12, ..., 20}. З усіх наслідків із цростору Ω події *A* сприяють наслідки 10, 15, 20. Отже, *A* ={10,15, 20.}, Відповідно B={11, 13, 17, 19} і

C ={10, 12, 14, 16, 18,20}.

Тут простір Ω і події A, *B,* C — скінченні множини.

Приклад 1.2. Об'єкт *T* , за яким ведеться спостереження за допомогою радіолокатора, займає випадкове положення на круглому екрані радіуса r. Описати простір елементарних наслідків Ω. і подію *A* ={об'єкт *T з* 'явиться всередині круга, центр якого збігається з центром екрана, а площа становить чверть площі екрана}.

Розв'язання. Позначимо через *p* відстань від центра екрана до зображення об'єкта *T.* Оскільки простір елементарних наслідків — множина точок, що суцільно заповнюють екран локатора, то Ω. ={$0 \le p \le r$ }. Площа екрана $S = \pi r^2$. Позначимо через r_1 радіус круга, що відповідає події *A,* тоді за умовою задачі площа цього круга дорівнює $\pi r_1^2 = 1/4 \pi r^2$, звідки $r_1 = 1/2\ r$. Отже, подія *A* описується так:A={$0 \le p < 1/2 r$ }

Тут простір Ω і подія *A* — нескінченні множини.

Оскільки простір елементарних наслідків Ω={$\acute{\omega}_1, \acute{\omega}_2, \ldots, \acute{\omega}_n$} може розглядатися, як власна підмножина, то Ω також є подією, для якої сприятливі всі Наслідки $\acute{\omega}_1, \acute{\omega}_2, \ldots, \acute{\omega}_n$. Отже, Ω — достовірна подія. Тому надалі достовірну подію позначатимемо Ω. До всього простору Ω елементарних наслідків додається ще й порожня множина Ø, яка також вважається подією, що не має жодного сприятливого наслідку, тобто є неможливою. Тому неможливу подію позначатимемо Ø.

Повернутись до плану

1.2. Поняття ймовірності події. Класична формула для обчислення ймовірностей

Розв'язання прикладів 1.1 і 1.2 свідчать про те, що різні події характеризуються певною мірою об'єктивної можливості їх появи в результаті випробування. Так, зокрема, у прикладі 1.1 можливість появи події C більша, ніж події A або події B . Такою мірою можливості появи події є її *ймовірність.* Це поняття також належить до основних базових понять теорії ймовірностей.

У практичних застосуваннях здебільшого розглядаються випробування, які зводяться до так званої *класичної схеми* і в яких обчислення ймовірностей суттєво спрощується. Класична ймовірнісна схема стосується подій найпростішого виду, які називаються *випадками,* або *шансами.* Це події, які утворюють *повну групу, несумісні і рівноможливі*

У загальному випадку події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються *попарно несумісними* (або просто несумісними), якщо поява однієї з них у даному випробуванні виключає можливість появи будь-якої іншої з цих подій.

Наприклад, при випадковому виборі двох виробів із комплекту, який містить нерозрізнювані за зовнішнім виглядом і ретельно перемішані придатні і браковані вироби, події {обидва вироби придатні}, {перший придатний, другий бракований}, {перший бракований, другий придатний}, {обидва вироби браковані} — несумісні.

Поняття .рівноможливості подій не підлягає формальному визначенню, і його слід розуміти так: події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є рівноможливими в даному випробуванні, якщо за умовами проведеного випробування немає підстав вважати появу однієї із цих подій більш можливою, ніж інших.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу несумісних подій, якщо* в результаті випробування неодмінно відбудеться одна і тільки одна з них. Так, чотири події, перелічені в попередньому прикладі, утворюють повну групу подій.

Якщо дві несумісні події утворюють повну групу, то їх називають *протилежними* і позначають A і $\bar{A}$. Наприклад, події (принаймні один прилад вийшов із ладу} і {жодний прилад не вийшов із ладу} протилежні в одному й тому самому випробуванні.

В умовах класичної ймовірнісної схеми *ймовірність* $P(A)$ події A обчислюється за формулою класичної ймовірності:

$P(A)=m/n$ *(1.1)*

де n — загальна кількість усіх рівноможливих наслідків випробування, які утворюють повну групу несумісних подій;

m — кількість наслідків випробування, сприятливих щодо події A

Із формули (1.1) випливає, що ймовірність $P(A)$ міститься в межах:

$0\leq P(A) \leq 1$

оскільки для достовірної події $m=n$, для неможливої $m=0$. а для випадкової $m < n$.

Значення m *і* n знаходять або безпосередньо з умов випробування, або при розв'язуванні багатьох задач із застосуванням формул та принципів комбінаторики. Нагадаємо основні ч них.

Нехай множина M складається з n різних елементів .

Комбінаціями з *n елементів по k називаються всі підмножини* множини M , які містять k елементів і відрізняються принаймні одним елементом.

Їхню кількість C_n^kзнаходять за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (1.2)$$

де $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$; $0! = 1$.

Для кількості комбінацій виконується властивість симетрії

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Розміщеннями з n елементів по k називаються всі підмножини множини *M* , які містять k елементів і відрізняються між собою або складом елементів, або порядком їх розміщення.
Їхня кількість A_n^k обчислюється за формулою:
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \qquad (1.3)$$
Переставленнями з n елементів називаються всі можливі варіанти множини *M,* які відрізняються порядком розміщення елементів.
Їхню кількість P_n обчислюють за формулою:
$$P_n = A_n^n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n. \qquad (1.4)$$
При обчисленні ймовірностей подій часто застосовується комбінаторний *принцип добутку:* якщо послідовно виконується k дій, причому першу дію можна виконати n_1, способами, другу — n_2 способами і, нарешті, *k-ту* дію — n_k. способами, то всі k дій разом можна виконати $n_1 n_2 n_k$. способами.
Наведемо приклади безпосереднього обчислення ймовірностей за формулою (1.1) із застосуванням формул (1.2) — (1.4).
Приклад 1.3. Знайти ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове число ділиться на 5.
Розв'язання. Позначимо подію *А* = {число ділиться на 5}. Загальна кількість *n* наслідків випробування дорівнює 90 (вибирається одне з чисел від 10 до 99). Ці наслідки рівноможливі, оскільки число вибирається навмання, і утворюють повну групу несумісних подій, оскільки неодмінно буде вибрано одне і тільки одне з цих чисел.Сприятливими щодо події А є ті наслідки , в яких буде вибрано число, що закінчується нулем або п ятіркою. Кількість таких наслідків m=18. Отже, за формулою (1.1) *Р(А)=0,2*
Приклад 1.4. У групі із двадцяти студентів 30 % — відмінники. Для здачі заліку навмання викликано одного студента. Яка ймовірність того, що викликано відмінника?
Розв'язання. Позначимо подію *В* = (викликано відмінника}. Випробування полягає у випадковому виборі одного студента із двадцяти, тому загальна кількість наслідків n = 20. Оскільки за умовою в групі 6 відмінників, то кількість сприятливих щодо події *А* наслідків *т* = 6. За формулою (1.1) *Р(В)*= 0,3.
Приклад 1.5. Із двоцифрових чисел, не більших від 20, навмання вибрано одне число q i складено рівняння $x^2 + 8x + q = 0$. Яка ймовірність того, що корені рівняння — дійсні цілі числа?
Розв'язання. Випробування полягає у випадковому виборі одного з одинадцяти чисел, тому *n*= 11. Позначимо подію С — {корені дійсні цілі числа}. Рівняння має дійсні корені, коли дискримінант $D = 16 - q \geq 0$ або $q \leq 16$. Із формул для коренів рівняння $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-q}$
випливає, що лише 3 числа дають цілі значення коренів. Отже, *т*= 3, а *Р(С)* =0,272.
Приклад 1.6. Маємо 5 відрізків довжиною 1, 3, 6, 8 і 10 см. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання трьох відрізків можна скласти трикутник?

Розв'язання. Позначимо подію B = {з вибраних відрізків можна скласти трикутник}. Загальна кількість наслідків випробування
$n = C_5^3 = 10$. Події В сприяють тільки 3 наслідки: 3, 6, 8; 3. 8, 10; 6, 8, 10. Тому P(B)=0,3.
Приклад 1.7. Кожний із чотирьох пасажирів може придбати квиток на Один із семи рейсів, що виконуються впродовж дня до аеропорту N. Знайти ймовірність того, що вони придбали квитки:
а) на перший рейс;
б) на один і той самий рейс;
в) на різні рейси.
Розв'язання. Оскільки для кожного пасажира є 7 варіантів придбання квитка, то, згідно з принципом добутку, кількість усіх наслідків випробування $n = 7^4$.

Повернутись до плану

1.3 Геометричний підхід до обчислення **ймовірностей**

Класична формула (1.1) обчислення ймовірності події незастосовна, якщо простір Ω елементарних наслідків випробування є нескінченна множина. У цьому випадку застосовують геометричний підхід до знаходження ймовірностей, при якому проведення випробування інтерпретується як випадкове кидання точки в область Ω n-вимірного простору, а подія A — як потрапляння цієї точки в підобласть A області Ω. Множина всіх наслідків випробування виражається відповідною мірою m_Ω області Ω., а множина наслідків, сприятливих щодо події A. — • мірою m_A області A. Імовірність події A обчислюється за формулою
$p(A) = \frac{mA}{m\,\Omega}$ (1.5)
Зокрема, в одновимірному координатному просторі ймовірність у формулі (1. 5) визначається відношенням довжин відрізків, у двовимірному просторі — відношенням площ плоских фігур, у тривимірному просторі — відношенням об'ємів просторових тіл. Отже, якщо довжину позначено через L, площу — через S і об'єм — через V , то формула (1.5) в одно-, дво-, тривимірному координатному просторі набирає відповідно такого вигляду;

$$P(A) = \frac{L_A}{L_\Omega},\ P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega},\ P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega}.$$

Приклад 1.10. Відстань між пунктами A і B автобус долає за 3 хв, а пішохід — за 15 хв. Інтервал руху автобусів 30 хв. У випадковий момент часу із A до B вирушив пішохід. Знайти ймовірність того, що він прибуде в пункт B раніше від наступного автобуса.

Розв'язання. Позначимо через x час виходу пішохода з пункту A, тоді x набуває значень з інтервалу від 0 до 30 хв — інтервалу між відправленнями попереднього і наступного автобусів. Тому множина всіх наслідків випробування відповідає довжині цього інтервалу: $L_\Omega = 30$.

Позначимо подію: A = {пішохід прибуде в B раніше від наступного автобуса}. Цій події сприяють наслідки, для яких $30 - x + 3 > 15$, де $30 - x$ — час до виходу на маршрут наступного автобуса, 3 хв — час руху автобуса, 15 хв — час руху пішохода. Звідси дістаємо $x < 18$. Отже, сприятливим щодо події A наслідкам відповідає довжина інтервалу $L_A = 18$. За першою з формул (1.6) $P(A) = 0{,}6$.

Приклад 1.11. На відрізку довжиною 12 см навмання поставлено дві точки. Яка ймовірність того, що довжина кожного з утворених при цьому послідовних відрізків буде не меншою від 3 см?

Розв'язання. Позначимо через x довжину першого відрізка, через y — другого, тоді довжина третього відрізка становитиме $12 - x - y$. Множина всіх наслідків визначається умовами: $x > 0$; $y > 0$; $x + y < 12$. Множина точок, координати яких задовольняють ці умови, заповнює трикутник AOB (рис. 1.1) із площею 72 см^2. Отже, $S_\Omega = 72$.

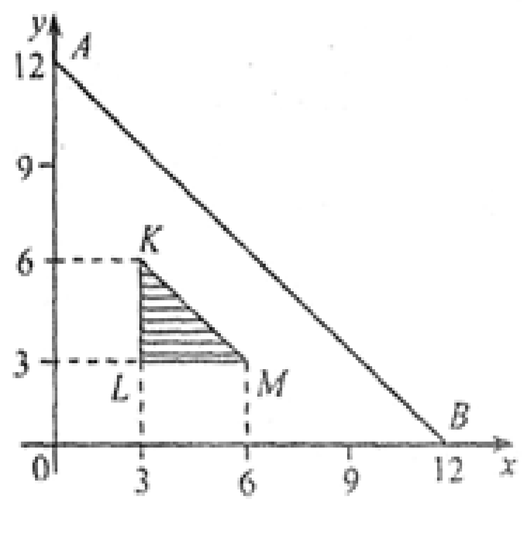

Рис. 1.1

Позначимо подію B = {довжина кожного відрізка не менша за 3 см}. Цій події сприяють наслідки, для яких $x \geq 3$; $y \geq 3$; $12 - x - y \geq 3$ або $x + y \leq 9$. Точки, координати яких задовольняють ці умови, заповнюють трикутник KLM із площею 4,5 см^2, тобто $S_B = 4{,}5$. За другою з формул (1.6) $P(B) = 0{,}0625$.

Приклад 1.12. Два літаки прибувають у зону аеродрому в довільні моменти часу між 12-ю і 13-ю годинами. Посадка літака, що при-

Розв'язання. Позначимо через x і y час прибуття в зону літаків у межах від 12-ї до 13-ї години. Оскільки для x і y виконуються умови $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$, то простору елементарних наслідків Ω відповідає квадрат на координатній площині зі стороною, що дорівнює 60 (рис. 1.2), тому $S_\Omega = 3600$.

Позначимо через B подію {другому літаку не доведеться чекати посадки}. Сприятливими для цієї події є всі точки (x, y), для яких виконується умова $|x - y| > 10$ у межах квадрата Ω, або

$$x - y < -10 \text{, звідки } y > x + 10$$

і

$$x - y > 10 \text{, звідки } y < x - 10 .$$

Ці умови задовольняють усі точки, що містяться в прямокутних трикутниках, заштрихованих на рис.1.2, катети яких дорівнюють 50. Отже, $S_B = 250$, а ймовірність $P(B)$ обчислюється за другою формулою (1.6):

$$P(B) = \frac{S_B}{S_\Omega} = \frac{25}{36} \approx 0,69.$$

Приклад 1.13. Два числа p і q навмання вибираються з відрізка [0; 1]. Знайти ймовірність того, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ буде мати дійсні корені одного знака.

Розв'язання. Випробування можна розглядати як вибір точки (p, q) з квадрата $OKLM$ (рис. 1.3) зі стороною, довжина якої дорівнює 1, тобто $S_\Omega = 1$.

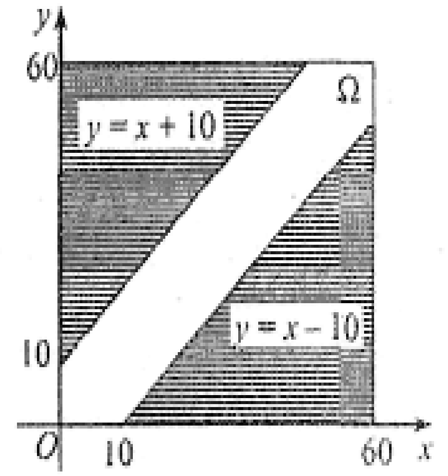

Рис. 1.2

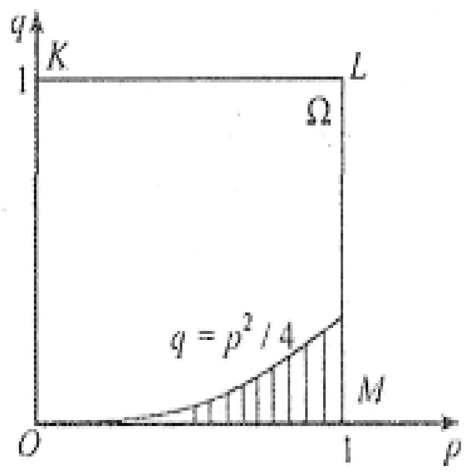

Рис. 1.3

Позначимо через C подію {корені рівняння дійсні й одного знака}. Сприятливими щодо події C є ті точки (p, q) з квадрата Ω, для яких виконуються умови:

$p^2 - 4q \geq 0$ (корені дійсні, отже, дискримінант рівняння $D \geq 0$);

$q > 0$ (корені одного знака, отже, їхній добуток $q > 0$).

Ці умови задовольняють усі точки області, заштрихованої на рис.1.3. Площу цієї області обчислимо інтегруванням:

$$S_C = \frac{1}{4}\int_0^1 p^2\,dp = \frac{1}{12},$$

а ймовірність події C за другою з формул (1.6) така: $P(C) = \frac{1}{12}$.

Повернутись до плану

1.4. Відносна частота появи події та її стійкість. Статистичне означення ймовірності події

Класична формула (1.1) незастосовна, якщо простір Ω елементарних наслідків є нескінченна множина або немає достатніх підстав вважати наслідки випробування ω_i рівноможливими.

У цих випадках застосовують *статистичне* означення ймовірності події, яке ґрунтується на понятті *відносної частоти події*. Це поняття поряд з імовірністю належить до основних понять теорії ймовірностей.

Відносна частота $W(A)$ події A — це відношення кількості μ випробувань, в яких подія A відбулась, до кількості ν всіх фактично проведених випробувань:

$$W(A) = \frac{\mu}{\nu}. \tag{1.7}$$

Різниця в означеннях імовірності події і відносної частоти полягає в тому, що для обчислення ймовірності за формулою (1.1) немає потреби проводити випробування, тобто ймовірність обчислюється апріорно, тоді як відносна частота може бути обчислена за формулою (1.7) лише після фактичного проведення випробувань.

Приклад 1.14. Авіакомпанія впродовж доби виконує 25 рейсів, із них 80 % — власним авіапарком. На час t було виконано 18 рейсів, із них 16 — власним парком. Знайти ймовірність і відносну частоту виконання рейсу власним парком.

Розв'язання. Позначимо подію A = {рейс виконується власним авіапарком}. Оскільки загальна добова кількість рейсів дорівнює 25, а власним парком виконується 20 рейсів (наслідки, сприятливі події A), то ймовірність події A

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0{,}8 .$$

За умовою на час t було виконано 18 рейсів, тобто фактично проведено 18 випробувань, в яких подія A відбулась 16 раз. Отже, відносна частота події A

$$W(A) = \frac{16}{18} = 0{,}89.$$

Тобто відносна частота $W(A)$ може істотно відрізнятися від імовірності $P(A)$. Проте, як свідчать багаторазові дослідження, відносній частоті притаманна властивість стійкості, яка полягає в тому, що зі збільшенням кількості випробувань вона наближається до значення ймовірності події і відрізняється від нього тим менше, чим більше проведено випробувань. При цьому можуть спостерігатися окремі випадки, коли навіть при великій кількості проведених випробувань відносна частота $W(A)$ істотно відрізняється від імовірності події $P(A)$, проте загальна тенденція прямування відносної частоти до ймовірності простежується досить закономірно.

Тому *статистичною ймовірністю* випадкової події A називають граничне значення відносної частоти події, до якого збігається за ймовірністю ця частота при необмеженому збільшенні кількості випробувань:

$$W(A) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} P(A).$$

Повернутись до плану