Тема 3. ІМОВІРНОСТІ ГІПОТЕЗ. ФОРМУЛИ ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА БЕЙЄСА

План.

Поняття гіпотези.

Нехай подія A може відбутись тільки разом з однією із попарно несумісних подій $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ і утворюють повну групу $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій H_i відбудеться подія А, то події H_i називають гіпотезами.

Тоді, якщо відбулась подія A, то це означає, що відбулась одна із попарно несумісних подій $H_1\ \mathrm{A}, H_2\ \mathrm{A}, H_3\ \mathrm{A}, \dots, H_n\ \mathrm{A}$.

Це означає: $\mathrm{A} = H_1\ \mathrm{A} + H_2\ \mathrm{A} + H_3\ \mathrm{A} + \cdots + H_n\ \mathrm{A}$

. Використавши теорему додавання, одержимо:

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(H_1\ \mathrm{A} + H_2\ \mathrm{A} + H_3\ \mathrm{A} + \cdots + H_n\ \mathrm{A})$$
$$= \mathrm{P}(H_1\ \mathrm{A}) + \mathrm{P}(H_2\ \mathrm{A}) + \mathrm{P}(H_3\ \mathrm{A}) + \cdots + \mathrm{P}(H_n\ \mathrm{A})$$

.

З теореми множення ймовірностей $\mathrm{P}\big(H_\mathrm{i}\ \big) = \mathrm{P}(H_\mathrm{i}\ ) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{H}_i}(\mathrm{A}\big)$, i =1, 2, 3, …, n.

$$\mathrm{P}\big(A\big) = \mathrm{P}(H_1\ ) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{H}_1}(\mathrm{A}\big) + \mathrm{P}(H_2\ ) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{H}_2}(\mathrm{A}) + \cdots + \mathrm{P}(H_n\ ) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{H}_n}(\mathrm{A}) \quad (1.1)$$

Або $\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P(H}_i\mathrm{)P(A/H}_i\mathrm{)}$

Одержана формула (1.1) називається *формулою повної імовірності.*

Повернутись до плану

Задачі на повну ймовірність

Приклад 1. В магазині три холодильники, в яких закінчується морозиво. У першому - 4 білих морозива і 6 шоколадних, у другому - 2 білих і 8 шоколадних, у третьому - 3 білих і 7 шоколадних. Навмання вибирають холодильник і виймають з нього морозиво, визначити ймовірність того, що воно біле.

Розв'язування. Позначимо події наступним чином: H_i – вибрано i-й холодильник, A – вибрано біле морозиво.

Тоді ймовірності витягнути з кожного холодильника однакові і рівні 1/3

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Ймовірності витягнути біле морозиво будуть рівні кількості морозива в кожному з холодильників розділеній на загальну кількість морозива

$$P(A/H_1)=\frac{4}{4+6}=\frac{4}{10}=0,4;$$

$$P(A/H_2)=\frac{2}{2+8}=\frac{2}{10}=0,2;$$

$$P(A/H_3)=\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}=0,3.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності, знаходимо

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0,4+\frac{1}{3}\cdot 0,2+\frac{1}{3}\cdot 0,3=0,3.$$

Таким чином ймовірність витягнути біле морозиво рівна 0,3 або 30%.

Приклад 2. В офісі є чотири ноутбуки виготовлених компанією A, 6 компанією B, 8 компанією C та два, які виготовляє D. Гарантії, що ноутбуки цих компаній працюватимуть протягом гарантійного терміну без ремонту становлять 70 %, 80%, 85%, та 55% для кожної з них. Потрібно знайти ймовірність того, що вибраний ноутбук працюватиме без ремонту протягом гарантійного терміну.

Розв'язування. Позначимо події наступним чином: H_i – вибрано ноутбук компанії;

A – ноутбук працюватиме без ремонту.

Ймовірності вибору ноутбуків кожної з компаній вважаємо рівні їх кількості

- на основі цього ймовірності приймуть значення :

$$P(H_1) = \frac{4}{4+6+8+2} = 0,2;$$

$$P(H_2) = \frac{6}{20} = 0,3;$$

$$P(H_3) = \frac{8}{20} = 0,4;$$

$$P(H_4) = \frac{2}{20} = 0,1.$$

Ймовірності, що вони працюватимуть без ремонту беремо з умови

$$P(A/H_1) = \frac{70\%}{100\%} = 0,7;$$

$$P(A/H_2) = 0,8;$$

$$P(A/H_3) = 0,85;$$

$$P(A/H_4) = 0,55;$$

Тут ми просто переводимо проценти в ймовірності.

Застосовуємо формулу повної ймовірності:

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,85 + 0,1 \cdot 0,55 =$$
$$= 0,14 + 0,24 + 0,34 + 0,055 = 0,775.$$

Таким чином, ймовірність безремонтної роботи ноутбука рівна 0,775. Колись це значення можливо було великим досягненням, в теперішній час, якщо б 22,5% ноутбуків потребували ремонту під час гарантійного терміну - це була б велика проблема виробників

Повернутись до плану

Формула Байєса

Нехай гіпотези H_i *(i=1,…,n)* утворюють повну групу несумісних подій $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$ і нехай подія *A* відбувається обов'язково з однією з гіпотез H_i Нехай подія *A* відбулася, тоді ймовірність того, що вона відбулася саме за умови H_i визначається **формулою Байєса**:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Задані умови першої задачі. Потрібно встановити ймовірність того, що морозиво витягнули з другого холодильника.

Розв'язування. Випишемо результати першої задачі, які потрібні для обчислень

$P(H_2)=\frac{1}{3}; P(A/H_2)=0,2; P(A)=0,3$

та підставимо у формулу Байєса

$$P(H_2/A)=\frac{0,33(3)\cdot 0,2}{0,3}=0,22(2).$$

Як можна бачити, такі обчислення не складні, головне зрозуміти, що і як визначається.

Для другої задачі потрібно встановити ймовірності того, що справний ноутбук належить до компаній *C* та *D*.

Розв'язування. Випишимо попередньо знайдені ймовірності

$P(H_3)=0,4;\ P(H_4)=0,1; P(A/H_3)=0,85; P(A/H_4)=0,55; P(A)=0,775.$

та застосуємо формулу Байєса

$$P(H_3/A)=\frac{0,4\cdot 0,85}{0,775}=0,4387;$$

$$P(H_4/A)=\frac{0,1\cdot 0,55}{0,775}\approx 0,071.$$

Добре розберіться чому саме так, далі буде важче.

На склад надходять телефони трьох заводів, причому частка телефонів першого заводу становить 25%, другого – 60%, третього – 15%. Відомо також, що середній відсоток телефонів з браком для першої фабрики становить 2%, другої – 4%, третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що:

а) навмання взятий телефон виявиться з браком;

б) телефон виготовлений на першому заводі, якщо він бракований;

в) на якому заводі найвірогідніше був виготовлений телефон, якщо він якісно зроблений?

Розв'язування. Проаналізуємо отже із завдань, щоб Ви якомого краще навчилися розбиратися в формулах.

а) Введемо для ясності позначення:

A – навмання вибраний телефон виявився бракованим;

Припущення: H_1 – телефон виготовлений на першій, H_2 – другій та H_3 – третій фабриках відповідно.

Гіпотези є попарно несумісними і утворюють повну групу. Ймовірність кожного припущення визначаємо діленням процентної частки продукції до всієї (100%)

$$P(H_1)=\frac{25\%}{100\%}=0,25;$$

$$P(H_2)=0,6;\ P(H_3)=0,15.$$

Це не важко знайти для більшості задач теорії ймовірностей..

Подібним чином визначаємо умовні ймовірності шуканої події A

$$P(A/H_1)=\frac{2\%}{100\%}=0,02;$$

$$P(A/H_2)=0,04;\ P(A/H_3)=0,01.$$

Застосуємо формулу повної ймовірності для визначення можливості вибору бракованого телефону

$$P(A)=0,25\cdot 0,02+0,6\cdot 0,04+0,15\cdot 0,01=$$
$$=0,005+0,024+0,0015=0,0305.$$

Ймовірність трохи більша за три сотих.

б) для відшукання ймовірності припущення H_1 за умови, що подія A виконалася **застосуємо формулу Байєса**

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0,25\cdot 0,02}{0,0305}\approx 0,164.$$

Таким чином, маючи попередні розрахунки, провести обчислення досить просто.

в) щоб визначити, на якому заводі найвірогідніше був виготовлений нормальний телефон, необхідно порівняти між собою ймовірності кожного з припущень :

$P(H_1/\bar{A}); P(H_2/\bar{A}); P(H_3/\bar{A})$

де $\bar{A}$ подія (витягнули телефон без браку) протилежна до події *A*. Для протилежних подій використовують формулу

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}0305 = 0{,}9695.$

За подібною формулою визначаємо умовні ймовірності події $\bar{A}$, за умови що справедливі припущення H_1 , H_2 , H_3

$P(\bar{A}/H_1) = 1 - P(A/H_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98;$

$P(\bar{A}/H_2) = 1 - P(A/H_2) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96;$

$P(\bar{A}/H_3) = 1 - P(A/H_3) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$

За формулою Байєса обчислюємо ймовірності

$$P(H_1/\bar{A}) = \frac{P(H_1)P(\bar{A}/H_1)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}98}{0{,}9695} \approx 0{,}2527;$$

$$P(H_2/\bar{A}) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}96}{0{,}9695} \approx 0{,}5941;$$

$$P(H_3/\bar{A}) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}99}{0{,}9695} \approx 0{,}1532.$$

Найбільшу імовірність має друге припущення, тому телефон виготовлено на другому заводі.

Повернутись до плану

Задачі на повну ймовірність та формулу Байєса

Задачі на формулу повної ймовірності та Байєса в плані обчислень одні з найпростіших, головне вловити в яких випадках застосовувати формули. Далі буде проаналізовано 5 завдань, які внесуть ясність для чого потрібна формула Байєса та який її зміст.

На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє $n_1=80\%$, друга – $n_1=10\%$, третя – $n_1=10\%$ усіх виробів. Частка браку відповідно $k_1=2\%$, $k_2=3\%$, $k_3=1\%$.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибраний гвинт бракований?

б) Яка ймовірність того, що його виготовлено *2* - машиною?

№	n_1%	n_2%	n_3%	k_1%	k_2%	k_3%	i
	80	10	10	2	3	1	2

Розв'язання: а) Схема розрахунків спільна для всіх завдань, тому ми один раз її виписуємо, а в наступних прикладах будемо лише посилатися на методику. Спершу формуємо H_i - гіпотези, що виріб виготовлений i-тій машині, де $i=1,2,3$. Тоді ймовірність кожної з гіпотез рівна частці виробів в загальній сукупності

$$p(H_1)={}^{80}\!/_{(80+10+10)}={}^{80}\!/_{100}=0,8;$$

$$p(H_2)=p(H_3)={}^{10}\!/_{100}=0,1.$$

Їх сума рівна повній ймовірності $=1$. Цю умову обов'язково перевіряйте, інакше теорія не працює, якщо це не підтверджується.

Нехай подія A полягає в тому, що випадково вибраний гвинт бракований.

Тоді на основі початкових умов можемо виписати ймовірності того, що бракований гвинт виготовлений на кожній з машин

$$p\left({}^{A}\!/_{H_1}\right)={}^{2}\!/_{(80+10+10)}=0,02;$$

$$p\left({}^{A}\!/_{H_2}\right)={}^{3}\!/_{100}=0,03;$$

$$p\left({}^{A}\!/_{H_3}\right)={}^{1}\!/_{100}=0,01.$$

Це фактично значення браку у відсотках розділене на 100%.

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність, що гвинт бракований

$$p(A)=p(H_1)\cdot p\left({}^{A}\!/_{H_1}\right)+p(H_2)\cdot p\left({}^{A}\!/_{H_2}\right)+p(H_3)\cdot p\left({}^{A}\!/_{H_3}\right)=$$

$$=0.8\bullet0.02+0.1\bullet0.03+0.1\bullet0.03=0.02$$

Обчислення прості, а суть формули в тому що ймовірність рівна сумі добутків вкладу кожної з машин на відсоток браку.

б) Ймовірність, що бракований гвинт вироблений 2 машиною за формулою Байєса рівна вкладу першої машини в попередню ймовірність

$$p\left(A/_{H_2}\right) = p(H_2)\cdot p\left(A/_{H_2}\right)\Big/_{p(A)} = 0{,}1\cdot\frac{0{,}03}{0{,}02} = 0{,}15$$

Фізична суть цього запису така, що ми знаходимо долю імовірності, що бракована деталь виготовлена 2 машиною у повній ймовірності p(A).

Розглянемо ще кілька завдань для закріплення матеріалу.

На заводі виготовляють запчастини до автомобілів. Перший завод виготовляє $n_1=70\%$, другий – $n_1=20\%$, третій – $n_1=10\%$ усіх запчастин. Частка браку відповідно $k_1=3\%$, $k_2=1\%$, $k_3=2\%$.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибрана запчастина бракована?

б) Випадково вибрана запчастина виявився бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовив *3* станок?

№	$n_1\%$	$n_2\%$	$n_3\%$	$k_1\%$	$k_2\%$	$k_3\%$	i
	70	20	10	3	1	2	3

Розв'язання: а) Складаємо H_i - гіпотези, що виріб виготовлений i-тій машині, де $i=1,2,3$.

Тоді ймовірність кожної з гіпотез рівна частці виробів в загальній сукупності

$$p(H_1) = 70/_{(70+20+10)} = 70/_{100} = 0{,}7;$$

$$p(H_2) = 20/_{100} = 0{,}2;$$

$$p(H_3) = 10/_{100} = 0{,}1.$$

Їх сума рівна повній ймовірності =1.

Подія А полягає в тому, що випадково вибрана запчастина бракована.

Імовірності того, що бракована запчастина виготовлена на одному із заводів рівна відношенні проценту браку до 100%

$$p\left(A/H_1\right) = 3/(70+20+10) = 0,03;$$

$$p\left(A/H_2\right) = 1/100 = 0,01;$$

$$p\left(A/H_3\right) = 2/100 = 0,02.$$

Застосовуючи формулу повної ймовірності знаходимо ймовірність, що деталь бракована

$$p(A) = p(H_1)\cdot p\left(A/H_1\right) + p(H_2)\cdot p\left(A/H_2\right) + p(H_3)\cdot p\left(A/H_3\right) =$$

$$=0.7•0.03+0.2•0.01+0.1•0.02=0.025$$

б) За формулою Байєса знаходимо імовірність, що бракована запчастина виготовлена на 3 заводі

$$P\left(A/H_3\right) = p(H_3)\cdot p\left(A/H_3\right)/p(A) = 0,1\cdot\frac{0,02}{0,025} = 0,08$$

На трьох заводах виготовляють діодні лампочки до фар автомобілів. Перший завод виготовляє $n_1=70\%$, другий – $n_1=12\%$, третій – $n_1=18\%$ всієї продукції.

Частка браку відповідно $k_1=4\%$, $k_2=1\%$, $k_3=2\%$.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибрана лампочка бракована?

б) Яка ймовірність того, що її виготовлено 3 - заводом?

№	$n_1\%$	$n_2\%$	$n_3\%$	$k_1\%$	$k_2\%$	$k_3\%$	i
	70	12	18	4	1	2	3

Розв'язання: а) Складаємо три H_i - гіпотези, що виріб виготовлений заводами.

Імовірність кожної з гіпотез рівна долі лампочок з кожного заводу в

$$p(H_1) = {}^{70}\!\!\diagup_{70+12+18} = {}^{70}\!\!\diagup_{100} = 0{,}7;$$

$$p(H_2) = {}^{12}\!\!\diagup_{100} = 0{,}12;$$

загальній кількості $p(H_3) = {}^{18}\!\!\diagup_{100} = 0{,}18$

Сумуванням підтверджуємо, що їх сума рівна повній ймовірності.

Шукана подія полягає в тому, що випадково вибрана лампочка бракована.

На основі початкових умов виписуємо ймовірності того, що бракована лампочка виготовлена кожним із заводів

$$p\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_1}\right) = {}^{4}\!\!\diagup_{70+12+18} = 0{,}04;$$

$$p\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_2}\right) = {}^{1}\!\!\diagup_{100} = 0{,}01;$$

$$p\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_3}\right) = {}^{2}\!\!\diagup_{100} = 0{,}02$$

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність, що вибрана лампочка бракована

$$p(A) = p(H_1)\cdot p\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_1}\right) + p(H_2)\cdot p\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_2}\right) + p(H_3)\cdot p\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_3}\right) =$$

$$=0.7\bullet 0.04+0.12\bullet 0.01+0.18\bullet 0.02=0.0328$$

б) Ймовірність, що неробоча лампочка виготовлена на 3 заводі розраховуємо за формулою Байєса

$$P\left({}^{A}\!\!\diagup_{H_3}\right) = p(H_3)\cdot {}^{p\left({}^{A}\!\diagup_{H_3}\right)}\!\!\diagup_{p(A)} = 0{,}18\cdot\frac{0{,}02}{0{,}0328} = 0{,}11$$

На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє $n_1=60\%$, друга – $n_1=23\%$, третя – $n_1=17\%$ усіх виробів. Частка браку відповідно $k_1=4\%$, $k_2=2\%$, $k_3=3\%$.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибраний гвинт бракований?

б) Яка ймовірність того, що його виготовлено 3 - машиною?

№	$n_1\%$	$n_2\%$	$n_3\%$	$k_1\%$	$k_2\%$	$k_3\%$	i
	60	23	17	4	2	3	1

Розв'язання: а)Нехай H_i - гіпотези, що виріб виготовлений i-тій машині, де $i=1,2,3$.

Імовірність кожної з гіпотез рівна долі виробів кожної машини в загальній сукупності

$$p(H_1) = {}^{60}\!/\!_{(60+23+17)} = {}^{60}\!/\!_{100} = 0,6;$$

$$p(H_2) = {}^{23}\!/\!_{100} = 0,23;$$

$$p(H_3) = {}^{17}\!/\!_{100} = 0,17.$$

Їх сума рівна повній ймовірності. Подія, що цікавить полягає в тому, що випадково вибраний гвинт бракований.

Виписуємо ймовірності, що бракований гвинт виготовлений кожною з машин

$$p\left({}^{A}\!/\!_{H_1}\right) = {}^{4}\!/\!_{(60+23+17)} = 0,04;$$

$$p\left({}^{A}\!/\!_{H_2}\right) = {}^{2}\!/\!_{100} = 0,02;$$

$$p\left({}^{A}\!/\!_{H_3}\right) = {}^{3}\!/\!_{100} = 0,03.$$

Застосовуючи формулу повної ймовірності знаходимо

$$p(A) = p(H_1)\cdot p\left({}^{A}\!/\!_{H_1}\right) + p(H_2)\cdot p\left({}^{A}\!/\!_{H_2}\right) + p(H_3)\cdot p\left({}^{A}\!/\!_{H_3}\right) =$$

$$=0.6\bullet 0.04+0.23\bullet 0.02+0.17\bullet 0.03=0.0337$$

б) За формулою Байєса знаходимо мовірність, що бракований гвинт вироблений 1 машиною

$$p\left(A/H_1\right)=p(H_1)\cdot p\left(A/H_1\right)/p(A)=0,6\cdot\frac{0,04}{0,0337}=0,712$$

На фабриці виготовляють підошви до взуття. Перша фабрика виготовляє $n_1=30\%$, друга – $n_1=56\%$, третя – $n_1=14\%$ усієї продукції. Відсоток браку на заводах відповідно рівний $k_1=2\%$, $k_2=4\%$, $k_3=3\%$.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибрана підошва бракована?

б) Підошва виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її вилито *на першій фабриці*?

№	$n_1\%$	$n_2\%$	$n_3\%$	$k_1\%$	$k_2\%$	$k_3\%$	i
	30	56	14	2	4	3	1

Розв'язання: а) Ймовірність гіпотез, що брак належить певній фабриці рівна

$$p(H_1)=30/(30+56+14)=30/100=0,3;$$

$$p(H_2)=56/100=0,56;$$

$$p(H_3)=14/100=0,14.$$

Їх сума рівна повній ймовірності.

Нехай подія A полягає в тому, що випадково вибрана підошва бракована.

Записуємо ймовірності того, що її вилито на фабриці

$$p\left(A/H_1\right)=2/(30+56+14)=0,02;$$

$$p\left(A/H_2\right)=4/100=0,04;$$

$$p\left(A/H_3\right)=3/100=0,03$$

Формула повної ймовірності застосовується щоб знайти p(A), що підошва бракована

$$p(A)=p(H_1)\cdot p\left(A/H_1\right)+p(H_2)\cdot p\left(A/H_2\right)+p(H_3)\cdot p\left(A/H_3\right)=$$

=0.3•0.03+0.56•0.04+0.14•0.03=0.033

б) За формулою Байєса знаходимо імовірність, що браковану підошву виготовлено першою фабрикою

$$p\left(A/H_1\right)=p(H_1)\cdot p\left(A/H_1\right)/p(A)=0{,}3\cdot\frac{0{,}02}{0{,}033}=0{,}18$$

Приклади, що тут розглянуті в основному містять три виробники продукції і шукаємо ймовірність браку. Такі завдання поширені при прийомці і контролі якості продукції.

В інтернеті чимало задач де шукають імовірність позитивних подій

Наприклад: стрільці стріляють по мішені, відома влучність кожного зі стрільців. Подія полягає в тому, що стрілець влучив. Яка ймовірність, що влучив 2 або 4 стрілець?

Таких задач чимало, а схема розрахунків незмінна і думаю Вам тепер зрозуміла Побільше працюйте самостійно та розв'язуйте по кілька завдань на кожну з тем, тоді розуміння предмету та знання прийдуть скоріше та триматимуться голови довший час!

[Повернутись до плану]