Тема 4 :Формула Бернуллі. Твірна функція. Інтегральна і локальна теореми Лапласа. Проста течія подій. Формула Пуассона.

План.

Формула Бернуллі.

Схема Бернуллі виникає при повторних незалежних випробуваннях. Незалежними випробуваннями називаються такі, що не залежать один від одного, і від результатів попередніх випробувань. Вони можуть проводитися як в однотипних умовах, так і в різних. У першому випадку ймовірність появи якоїсь події A у всіх випробуваннях одна і та ж, у другому випадку - міняється від досліду до досліду.

Нехай для кожного досліду імовірність появи події A постійна $P(A)=p$, ймовірність протилежної події визначається залежністю

$$P(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Потрібно знайти ймовірність появи події A рівно m раз в серії із n випробувань. При цьому варто зазначити, що подія A в серії дослідів може чергуватися любим способом, головне щоб виконалася рівно m раз.

Результати випробувань для зручності позначаємо літерою A у випадку появи події і "А спряжене" $\bar{A}$ для протилежної.

Випробування в яких A відбувається m раз, і не відбувається $\bar{A}$ n-m за означенням будуть сприятливими. Їх кількість N рівна кількості способів вибору m елементів із n і визначається за формулою сполучень $N = C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Визначимо імовірність сприятливої комбінації (в серії з n випробувань появи події A рівно m раз). Для простоти запису розглянемо випадок коли подія A відбулася в перших дослідах і не відбулася в решта n-m. Схематично її можна позначити наступним чином, при цьому ймовірність визначити за теоремою множення ймовірностей $P_1 = \underbrace{P(A)P(A)\ldots P(A)}_{m}\underbrace{P(\bar{A})P(\bar{A})\ldots P(\bar{A})}_{n-m} = p^m q^{n-m}$.

Для інших сприятливих випробувань P_i ймовірність буде така ж, тільки порядок їх в серії з експериментів буде змінюватися $P_1 = P_2 = \ldots = P_N = p^m q^{n-m}$. Всі сприятливі випробування є попарно несумісними, тому для знаходження шуканої ймовірності їх потрібно просумувати $P_n(m) = P_1 + P_2 + \ldots + P_N = C_n^m p^m q^{n-m}$ або $P_n(m) = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot p^m q^{n-m}$.

Вивів її вперше швейцарський математик Якоб Бернуллі (1654 р.–1705 р.), за ним і збереглася назва формули.

Якщо просумувати ймовірність всіх випробувань в яких подія A може відбутися від нуля до n разів в серії із n випробувань то отримаємо повну ймовірність

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0 = 1.$$

Доданки цієї суми співпадають по вигляду з розкладом бінома Ньютона $(p+q)^n = q^n + n \cdot pq^{n-1} + \ldots + p^n = 1$. Легко переконатися, що сума рівна одиниці $(p+q)^n = (p + [1-p])^n = 1^n = 1$. В літературі можна зустріти термін *"біноміальний розклад ймовірностей"*, це якраз множина всіх ймовірностей, яка просумована вище.

Як наслідки, з формули Бернуллі виводяться наступні формули для популярних для практики задач:

1. ймовірність появи події *A* "хоча б один раз" в серії з *n* випробувань

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(m = 0) = 1 - q^n.$$

2. ймовірність появи події *A* "хоча б певну кількість *k* раз" в серії з *n* випробувань обчислюють за формулою

$$P_n(m \geq k) = \sum_{m=k}^{n} P_n(m) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$$

або за властивістю біноміального розкладу ймовірностей

$$P_n(m \geq k) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Повернутись до плану.

Твірна функція

На основі даної залежності вводять в розгляд твірну функцію, яка дає змогу визначити можливу кількість появи події *A* в серії з *n* випробувань $\psi_n(x) = (q + p \cdot x)^n = q^n x^0 + n \cdot pq^{n-1}x + \ldots + p^n x^n$.

У схемі Бернуллі імовірність появи події *A* в усіх випробуваннях однакова. Але у практичній діяльності іноді зустрічаються і такі випадки, коли у n незалежних випробуваннях імовірності появи події *A* різні, наприклад, вони

дорівнюють $p_1, p_2, \ldots, p_n$-

Тоді імовірності непояви події A також будуть різними

$$q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2,\ \ldots,\ q_n = 1 - p_n.$$

У цьому випадку не можна обчислювати за формулою Бернуллі імовірність появи події A m разів у п випробуваннях, а треба використовувати **твірну функцію**

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k z) \qquad (1)$$

Правило

Шукана імовірність $P_n(m)$ дорівнює коефіцієнту, що стоїть при z^m.

Приклад. Імовірність відмови кожного з 4 приладів у 4 незалежних випробуваннях різні і дорівнюють

p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3= 0,3, p_4 = 0,4. Знайти імовірність того, що внаслідок випробувань

а) не відмовить жоден прилад;

б) відмовлять один, два, три, чотири прилади;.

в) відмовить хоча б один прилад;

г) відмовлять не менше двох приладів.

Р о з в ' я з а н н я . Імовірності відмови приладів у випробуваннях різні, тому застосовуємо твірну функцію (1), яка у даному випадку матиме вигляд

$$\varphi_n(z) = (0.9 + 0.1z)(0.8 + 0.2z)(0.7 + 0.3z)(0.6 + 0.4z).$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні члени. Тоді матимемо

$$\varphi_n(z) = 0.302 + 0.46z + 0.205z^2 + 0.031z^3 + 0.002z^4.$$

Відповідно Правилу звідси одержуємо відповіді на питання прикладу

а) $P_4(0) = 0.302$;
б) $P_4(1) = 0.46$; $P_4(2) = 0.205$; $P_3(1) = 0.031$; $P_4(4) = 0.002$;
в) $P_4(1 \le m \le 4) = 1 - P_4(0) = 0.698$;
г) $P_4(m \ge 2) = 1-(P_4(0)+P_4(1)) = 1-(0.302+0.46) = 0.238$.

Приклад. Працівник обслуговує три станка, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що на протязі години перший станок не вимагатиме уваги працівника, дорівнює 0.9, а для другого та третього станків - 0.8 та 0.85, відповідно. Якою є імовірність того, що на протязі години

а) жоден станок не потребуватиме уваги працівника;

б) усі три станки потребують уваги працівника;

в) хоч би один станок потребує уваги працівника?

Розв'язання. Цей приклад можна розв'язати з використанням теорем множення та додавання імовірностей Розв'яжемо тепер цей приклад з використанням твірної функції, яка у даному випадку прийме вигляд

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{3}(q_k + p_k z) = (0.1 + 0.9z)(0.2 + 0.8z)(0.15 + 0.85z) =$$

$$= 0.003 + 0.056z + 0.0329z^2 + 0.612z^3.$$

Отже, коефіцієнт при z^k (k= 0,1,2,3) дорівнює імовірності того, що на протязі години уваги працівника не потребують k станків. Тому одержуємо відповіді на питання цього прикладу:

а) імовірність того, що усі три станка не потребують уваги
працівника, дорівнює коефіцієнту при z^3, тобто
$P_3(3) = 0.612$;
б)$P_3(0) = 0.003$; в)$P_3(1 \le m \le 3) = 1-P_3(3) = 1-0.612 = 0.388$.

Повернутись до плану.

Найімовірніше число k_0 появи події A в схемі Бернуллі
лежить в інтервалі

$$n \cdot p - q \le k_0 \le n \cdot p + p.$$

Для застосування схеми Бернуллі потрібно щоб виконувалися три умови:

1) досліди повинні бути незалежні між собою;

2) кожен дослід повинен мати два результати A, протилежна до неї $\overline{A}$ і ніяких інших варіантів;

3) ймовірність появи події A повинна бути однаковою для кожного наступного досліду.

Розглянемо схему розв'язування типових задач.

В тирі стрілець проводить 7 пострілів по мішені з ймовірністю улучення кожного 0,8. Яка ймовірність того, що буде:

а) рівно 4 влучення;

б) не менше за 5 влучень;

в) не більше двох влучень.

Розв'язок. проводиться $m=7$ незалежних одне від одного дослідів з ймовірністю влучення в мішень в кожному з них рівною $p=0,8$. Ймовірність того, що буде рівно $m=4$ влучень обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$P_7(4)=C_7^4\cdot 0,8^4(1-0,8)^{7-4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}0,8^4\cdot 0,2^3=$$

$$=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}\cdot 0,4096\cdot 0,008\approx 0,1147.$$

Вона становить p=0,1147.

подію A, яка полягає в тому, що при $n=7$ пострілах буде не менше за 5 влучень можна розглядати як суму трьох несумісних подій: B – 5 влучень з 7, подія C – 6 влучень з 7 і D – всі 7 пострілів влучні.

За формулою Бернуллі знаходимо імовірності подій

$$P(B)=P_7(5)=C_7^5\cdot 0,8^5\cdot(1-0,8)^2=$$

$$=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 0,32768\cdot 0,04\approx 0,275;$$

$$P(C)=P_7(6)=C_7^6\cdot 0,8^6\cdot 0,2^1\approx 7\cdot 0,262\cdot 0,2=0,367;$$

$$P(D)=P_7(7)=C_7^7\cdot 0,8^7\cdot 0,2^0=0,8^7\approx 0,2097.$$

Тоді ймовірність шуканої події A рівна сумі знайдених імовірностей

Подібним чином ймовірність події A – не більше двох влучень при семи пострілах можна обчислити, як суму ймовірностей трьох подій:

B – 2 влучення з 7,

C – 1 з 7,

D – жодного влучання із 7 пострілів (7 промахів).

На практиці студенти часто забувають розглядати події подібні до жодного влучання D, тож не робіть подібних помилок і Ви, та добре запам'ятайте можливість виникнення такого варіанту. Імовірності знаходимо за знайомою вже формулою

$$P(B)=C_7^2\cdot 0,8^2\cdot 0,2^5=$$

$$=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 0,64\cdot 0,00032\approx 0,0043;$$

$$P(C)=C_7^1\cdot 0,8^1\cdot 0,2^7\approx 7\cdot 0,8\cdot 0,00001=0,00007;$$

$$P(B)=C_7^0\cdot 0,8^0\cdot 0,2^7=0,2^7\approx 0,00001.$$

Сумуючи ймовірності одержимо

$$P(A)\approx 0,0043+0,00007+0,00001=0,00438.$$

Однак події A (не більше трьох влучень при п'яти пострілах) і (не менше чотирьох влучень при п'яти пострілах) протилежні один одному, тому

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,52822=0,47178.$$

Монету підкидають п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більше трьох разів.

Розв'язок. Ймовірність випадання гербу чи решки вважаємо незалежною подією з ймовірністю $p=q=0,5$. По аналогії з попередньою задачею, шукана ймовірність рівна сумі трьох наступних $P(A)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)$.

Щоб не шукати стільки доданків, з наведених вище формул отримаємо простішу

$$P(A)=1-P_5(4)-P_5(5)=1-5\cdot 0,5^5-0,5^5=0,8125.$$

Така ймовірність більша 81%.

Імовірність появи події в одному досліді рівна 0,4. Скільки потрібно провести дослідів, щоб найімовірніша кількість появи події була рівна 20.

Розв'язок. Згідно умови виписуємо дані

$$k_0=20; p=0,4; q=1-0,4=0,6$$

та проводимо розрахунки за нерівністю

$$n \cdot p - q \le k_0 \le n \cdot p + p.$$

$$\begin{cases} n \cdot 0,4 - 0,6 \le 20; \\ n \cdot 0,4 + 0,4 \ge 20. \end{cases}$$

З нерівностей отримаємо

$$n \le \frac{20 + 0,6}{0,4} = 51,5; n \ge \frac{20 - 0,4}{0,4} = 49 \Rightarrow 49 \le n \le 51$$

три числа 49,50,51. Отже потрібно провести від 49 до 51 досліду.

Три біатлоністи незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для першого рівна 0,9; для другого – 0,85; для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що буде закрито дві мішені з трьох.

Розв'язок. Імовірності влучання для стрілків різні, тому застосовуємо твірну функцію. Для неї вхідні дані приймуть заначення $p_1 = 0,9; q_1 = 1 - 0,9 = 0,1; p_2 = 0,85;$

$$q_2 = 0,15; p_3 = 0,8; q_3 = 0,2.$$

Після підстановки та рокладу в ряд за степенями змінної отримаємо

$$\psi_3(x) = (0,1 + 0,9x)(0,15 + 0,85x)(0,2 + 0,8x) =$$
$$= 0,003 + 0,056x + 0,329x^2 + 0,612x^3.$$

Шукана ймовірність входить в розклад множником при другому степені x^2

$$P(A) = 0,329.$$

З цього прикладу також легко переконатися, що сума всіх множників при степенях $x^\alpha, \alpha = 0,1,2,3$ рівна повній ймовірності (одиниці).

Схема Бернуллі на практиці не складна, важливо вловити як в обчисленнях реалізувати завдання типу "не більше *m* раз", "не менше *m* раз", "рівно *m* раз" із *n* випробувань. Як тільки Ви це зрозумієте, все решта зведеться до сумування, множення та піднесення до степеня.

Повернутись до плану.

Інтегральна і локальна теореми Лапласа.

Якщо кількість незалежних випробувань достатньо велика застосування формули Бернуллі стає трудомістким. Для спрощення обчислень застосовують локальну та інтегральну теореми Лапласа, які дають близький до формули Бернуллі результат при великій кількості випробувань і не потребують великих обчислень.

Локальна теорема Лапласа

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях з ймовірністю появи події A рівній p $(0<p<1)$ подія A наступить рівно k разів (байдуже в якій послідовності) визначається за наближеною формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

Де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ – функція Гауса,

$$x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$$ – аргумент функції Гауса;

$q=1-p$ – ймовірність протилежної події $\bar{A}$.

Формулу $P_n(k)$ називають локальною формулою Лапласа.

Функція $\varphi(x)$ володіє наступними властивостями:

1) вона є парною функцією $\varphi(-x)= \varphi(x)$;

2) для всіх аргументів більших за чотири функція нескінченно мала

$\forall |x| > 4,\ \varphi(x) = 0.0...$

Теорему Лапласа рекомендують застосовувати при значеннях добутку більших за дев'ять $n*p*q>9$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Ймовірність, що в n незалежних випробуваннях подія A з імовірністю появи p $(0<p<1)$ настане не менше k_1 разів і не більше k_2 (незалежно від послідовності появи) наближено визначається залежністю $P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – інтегральна функція Лапласа;

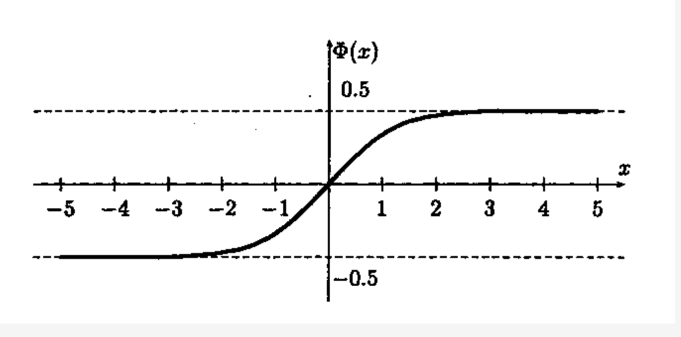
$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ – аргументи інтегральної функції розподілу;

$q=1-p$ – ймовірність не виконання події A.

Функція Лапласа Ф(x) володіє такими властивостями:

1) вона є непарною $\Phi(-x) = -\Phi(x);$

2) для всіх аргументів більших за п'ять вона рівна 0,5 $\forall |x| > 5, \varphi(x) = 0.5.$



Значення обидвох функцій Лапласа $\varphi(x), \Phi(x)$ знаходять з таблиць, в яких вони з достатньою точністю протабульовані.

[Повернутись до плану.]

Завдання на застосування теорем Лапласа

Приклад 1. Є 100 лунок по яких випадковим чином розкидають 30 кульок. Кожна кулька з однаковою ймовірністю може попасти в будь-яку лунку (в одну лунку попадає не більше однієї кульки). Знайти ймовірность того, що в вибрану лунку попаде рівно одна кулька.

Розв'язання. Проводиться *m=30* незалежних кидків кульок з однаковою ймовірністю попадання при кожному кидку

$$p = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Імовірність попадання в лунку рівно одної кульки визначимо за локальною формулою Лапласа:

$$P_{20}(1) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}.$$

Для цього визначаємо складові

$$\sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0,01 \cdot (1 - 0,01)} = 0,545;$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1 - 30 \cdot 0,01}{0,545} \approx 1,2844;$$

$$\varphi(1,2844) = 0,1749.$$

та підставимо в формулу $P_{20}(1) = \frac{0,1749}{0,545} = 0,321.$

Ймовірність, що попаде лише одна кулька рівна 0,321.

Приклад 2. Проводиться 200 незалежних дослідів з ймовірністю успіху у кожному 24 %. Яка ймовірність успішного проведення 50 дослідів?

Розв'язання. За умовою $n=200; p=24\%/100\%=0,24; q=0,76; k=50$,знаходимо складові формули Лапласа

$$\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0,24\cdot 0,76}=6,0398;$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{50-200\cdot 0,24}{6,0398}\approx 0,331;$$

$$\varphi(0,331)=0,378.$$

Підставляючи в формулу, знаходимо ймовірність $P_{200}(50)=\frac{0,378}{6,0398}\approx 0,063.$

Ймовірність досить мала p=0,063.

Приклад 3. Ймовірність виходу з ладу за зміну одного верстату рівна 0,1. Визначити ймовірність виходу з ладу від 2 до 13 верстатів при наявних 100.

Розв'язання. Записуємо вхідні дані

$$n=100; p=0,1; q=0,9; k_1=2; k_2=13.$$

Для подібних прикладів застосовуємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа та знаходимо ймовірність

$$x_1=\frac{2-100\cdot 0,1}{\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}}=\frac{-8}{3}\approx -2,66;$$

$$x_2=\frac{13-100\cdot 0,1}{3}=1;$$

$$P_{100}(2;13)=\Phi(1)-\Phi(-2,66)=0,341+0,496=0,837.$$

В результаті отримаємо p=0,837/

Розв'язування задач за наведеними теоремами дає змогу при великій кількості випробувань знаходити наближене значення ймовірності. Локальна теорема необхідна при визначенні конкретної кількості появи подій, інтегральна теорема Муавра-Лапласа – у випадках, коли задано діапазон можливої кількості появ події. Таблиці табулювань функцій, які застосовуються у формулах можна знайти в довідниках по теорії ймовірностей та інтернеті.

Повернутись до плану.

Локальна та інтегральна функції Лапласа. Формула Бернуллі

Завдань на формулу Бернуллі, Лапласа, Пуассона в інтернеті безліч, проте не всі вони розкривають відповідь на прості питання:

яку з формул ймовірності і в яких випадах потрібно застосовувати?

Яка похибка формули Лапласа і від чого вона залежить?

Чому в окремих випадках без спрощених формул Пуассона та Лапласа не обійтися?

Дочитайте розв'язки завдань до кінця і Ви отримає усі відповіді на поставлені вище запитання.

1 Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює $p=0.9$.

Визначити ймовірність того, що за час t з $n=250$ приладів вийдуть з ладу:

а) рівно $k_1=220$ приладів;

б) від $k_2=230$ до $k_3=235$ приладів;

в) не менше $k_4=215$ приладів;

г) менше $k_5=227$ приладів.

Значення для кожного варіанту наведені у таблиці, а також продубльовані в умові

Розв'язання: а) Ймовірність, що вийде з ладу рівно 220 приладів з 250 точно можна знайти за формулою Бернуллі

$$P_{250}(220)=C_n^{k_1}\cdot p^{k_1}\cdot(1-p)^{n-k_1}=$$

$$=\frac{250!}{220!\,(250-220)!}\cdot 0,9^{220}\cdot(1-0,9)^{30}\approx 0,0458$$

Для даної теми та інших з теорії ймовірностей старайтеся використовувати одну з програм: Maple, MathCad, Matlab.

Тоді обчислення для будь-яких вхідних значень не таке важке і при великих вхідних значеннях n можна застосовувати **формулу Бернуллі**.

Запам'ятайте, що вона **дає найточніші значення ймовірності** і всі решту результати слід звіряти з нею.

Разом з тим в математичних пакетах можна обчислювати наближене значення за допомогою локальної теореми Лапласа.

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \phi(x);$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}};$$

$$x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

Наведені формули поширені не тільки в ймовірності, але й для опису статистичних процесів.

Властивості функції phi(x) досить легко запам'ятати:

так як маємо експоненту у від'ємному парному степені то функція Лапласа парна, визначена для всіх дійсних значень змінної

та прямує до нуля, якщо змінна прямує до безмежності.

Це Ви повинні добре знати.

Спершу перевіряємо чи виконується умова *n•p•q=250•0,9•0,1=22,5>9*, тоді розбіжність зі значенням отриманим за формулою Бернуллі мінімальна.

Чим добуток ближчий до 9, а в окремій літературі вимагають більше 10, тим більше грішить формула Лапласа.

Виконаємо обчислення змінної:

$$x = \frac{220 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} = -1,0541$$

За таблицями табулювання локальної функції Лапласа маємо

$$\varphi(x) = \varphi(-1,0541) = 0,2289$$

Багато з Вас зразу побачить в цьому пробему - **де брати таблиці локальної та інтегральної фунцій Лапласа?**

Відповідей декілька:

1. стара схема - шукати в математичному довіднику (при сучасних технологіях листати сторінками і тратити час дорожче для себе);

2. знайти в інтернеті на математичному сайті. через смартфони чи ноутбуки.

3. завантажити додаток гугла для ймовірності, їх зараз безліч та вибрати один з готових, який безкоштовно надає широкий функціонал.

4. в любому з мат. пакетів знайти потрібне значення з точністю куди кращою ніж в паперовому довіднику, оскільки там функції протабульовані з певним кроком сітки, а проміжні значення необхідно інтерполювати, що не завжди є просто та займає часу.

Після цього знайти ймовірність можна за формулою

$$P_{250}(220) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{22,5}} \cdot 0,2289 \approx 0,0483$$

Розбіжність зі значенням отриманим за формулою Бернуллі *($p=0.0458$)* незначне!

б) Ймовірність, що від 230 до 235 приладів із 250 вийдуть з ладу знайдемо за інтегральною формулою Лапласа:

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

- інтегральна функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}};\ x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

- аргументи інтегральної функції розподілу.

Інтегральна формула Лапласа працює коли потрібно знайти ймовірність з немалого проміжку при велиих n. Запам'ятайте це.

Вона дає можливість швидко оцінити ймовірність не виконуючи при цьому велиих за часом обчислень.

Уявіть собі, що тут потрібно шукати (235-230+1)=6 доданків за формулою Бернуллі, при цьому скорочувати факторіали, або імовірність p підносити до високого (>200) порядку степеней.

Для студентів це непідйомне завдання як і для інженерів, тому в давнину були придумані такі формули як Лапласа та Пуасона.

Зараз вже є високоточні компютери та математичні пакети, які все це швидко рахують з наперед заданою точністю.

Ми ж дотримуємося теорії і знаходимо точки "ікси"

$$x_1 = \frac{230 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} \approx 1,0541;$$

$$x_2 = \frac{235 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} \approx 2,1082$$

А далі через значення інтегральної функції Лапласа в них значення ймовірності.

$$P_{250}(230;235) = \Phi(2,1082) - \Phi(1,0541) =$$
$$= 0,4825 - 0,3541 = 0,1284$$

За формулою Бернуллі точне значення рівне *0.1625773175*.

в) Ймовірність, що не менше 215 приладів зі 250 вийдуть з ладу обчислимо за інтегральною теоремою Лапласа:

$$x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \frac{215 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} \approx -2,1082;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \frac{250 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} \approx 5,2705.$$

$$P_{250}(215;250) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(5,2705) +$$
$$+ \Phi(2,1082) = 0,5 + 0,4825 = 0,9825$$

г) Ймовірність, що менше 227 приладів вийдуть з ладу означає, що від 0 до 227.

Без спрощених формул на аудиторному занятті таке завдання не рішити (потрібно шукати 228 імоверностей через формулу Бернуллі)

Тому знову скористаємося інтегральною теоремою Лапласа:

$$x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \frac{0 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} \approx -47,4342;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \frac{227 - 250 \cdot 0,9}{\sqrt{22,5}} \approx 0,4216;$$

$$P_{250}(0;227) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0,4216) +$$
$$| + \Phi(47,4342) = 0,1633 + 0,5 = 0,6633$$

Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює $p=0.9$.

Визначити ймовірність того, що за час t з $n=500$ приладів вийдуть з ладу:

а) рівно $k_1=7$ приладів;

б) від $k_2=1$ до $k_3=5$ приладів;

в) не менше $k_4=4$ приладів;

г) менше $k_5=3$ приладів.

№	n	p	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
	500	0,008	7	1	5	4	3

Розв'язання: а) Ймовірність, що вийде з ладу рівно 50 приладів з 90 найточніше можна знайти за формулою Бернуллі

$$P_{500}(7) = C_n^{k_1} \cdot p^{k_1} \cdot (1-p)^{n-k_1} =$$
$$= \frac{500!}{7!(500-7)!} \cdot 0,008^7 \cdot (1-0,008)^{493} \approx 0,0594$$

Якщо обчислювати швидко то наближене значення дає локальна теорема Пуассона.

Оскільки *k=n•p•q=500•0.008=4<10*, то похибка формул мінімальна

$$P_n(k) = \frac{\lambda^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda}$$
$$P_{500}(7) = \frac{4^7}{7!} \cdot e^{-4} \approx 0,0595$$

Похибка з точним значенням *0.0594* невелика.

Зверніть увагу, що для використання формули Пуасона необхідно, щоб добуток *n•p•q* був менший 10.

Для цього ймовірність р повинна приймати значення близькі до нуля. Для Лапласа навпаки, тому у студентів виникає плутанина, чи можна - чи ні користуватися спрощеними формулами.

Тому що порушення умови веде до занижених або завишених значень ймовірності.

б) Ймовірність, що від 1 до 5 приладів із 500 вийдуть з ладу, знайдемо за теоремою Пуассона для $k_2=1$ і $k_3=5$ та формулою імовірності протилежної події

$$1-(P_{500}(6)+P_{500}(7)) =$$
$$= 1-\left(\frac{4^6}{6!} \cdot e^{-4} + \frac{4^7}{7!} \cdot e^{-4}\right) =$$
$$= 1-(0,0595+0,1042) \approx 0,8363$$

Точне значення рівне

p=0.7677368032

Розбіжність більша, це плата за наближені обчислення.

в) Ймовірність, що не менше 4 приладів із 500 вийдуть з ладу обчислимо, як протилежну подію до того, що з ладу вийдуть менше 4 приладів, тобто або 0, або 1, або 2, або3:

$$p = 1 - (P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)) =$$
$$= 1 - \left(\frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} + \frac{4^1}{1!} \cdot e^{-4} + \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} + \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} \right) \approx 0.5665$$

Точне значення імовірності

p=0 .5673147532

Маємо задовільну збіжність.

г) Ймовірність, що менше 3 приладів вийдуть з ладу означає, що від 0 до 3:

Обчислюємо за інтегральною теоремою Пуассона:

$$p = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) \approx$$
$$\approx 1 - 0{,}4335 = 0{,}5665$$

Завдання 3 Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює p=0.55.

Визначити ймовірність того, що за час t з n=90 приладів вийдуть з ладу:

а) рівно k1=50 приладів;

б) від k2=45 до k3=55 приладів;

в) не менше k4=47 приладів;

г) менше k5=49 приладів.

№	n	p	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
	90	0,55	50	45	55	47	49

Розв'язання: а) Точне значення ймовірності, що вийде з ладу рівно 50 приладів з 90 знаходимо за формулою Бернуллі

$$P_{90}(50) = C_n^{k_1} \cdot p^{k_1} \cdot (1-p)^{n-k_1} =$$
$$= \frac{90!}{50! \cdot (90-50)!} \cdot 0,55^{50} \cdot (1-0,55)^{40} \approx 0,0839$$

Наближене значення знаходимо за локальною теоремою Лапласа.

Умова k= n•p•q=90•0.55•0.45=22,275>10 виконується, отже похибка наступних формул мінімальна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \phi(x);$$
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}};$$
$$x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

Виконаємо обчислення "ікса":

$$x = \frac{50 - 90 \cdot 0,55}{\sqrt{22,275}} = 0,1059$$

За таблицями табулювання локальної функції Лапласа маємо значення "phi"

$$\phi(x) = \phi(0,1059) = 0,3967$$

Ймовірність рівна 0.0841

$$P_{90}(50) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{22,275}} \cdot 0,3967 \approx 0,0841$$

Похибка обчислень мінімальна.

б) Ймовірність, що від 45 до 55 приладів із 90 вийдуть з ладу знайдемо за інтегральною формулою Лапласа:

$$P_n(k_1;k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

де

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$ - інтегральна функція Лапласа;

$$x_1=\frac{k_1-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}};\ x_2=\frac{k_2-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}$$ - аргументи інтегральної функції розподілу.

Знаходимо "ікси" функції Лапласа, а далі за таблицею значення інтегральної функції в точках та саму ймовірність

$$x_1=\frac{45-90\cdot 0,55}{\sqrt{22,275}}\approx -0,953;$$
$$x_2=\frac{55-90\cdot 0,55}{\sqrt{22,275}}\approx 1,165$$

$$P_{90}(45;55)=\Phi(1,165)+\Phi(0,953)=0,378+0,33=0,708$$

в) Ймовірність, що не менше 47 приладів зі 90 вийдуть з ладу обчислимо за інтегральною теоремою Лапласа:

$$x_1=\frac{k_1-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}=\frac{47-90\cdot 0,55}{\sqrt{22,275}}\approx 0,53;$$

$$x_2=\frac{k_2-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}=\frac{90-90\cdot 0,55}{\sqrt{22,275}}\approx 8,581;$$

$$P_{90}(47;90)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=$$
$$=\Phi(8,581)-\Phi(0,53)=0,5-0,202=0,298$$

Формули легко читати, проте вони приховують масу обчислень, які необхідні для отримання правильної відповіді.

г) Ймовірність, що менше 49 приладів вийдуть з ладу означає, що від 0 до 48 знходимо за інтегральною теоремою Лапласа:

$$x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \frac{0 - 90 \cdot 0,55}{\sqrt{22,275}} \approx -10,488;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \frac{48 - 90 \cdot 0,55}{\sqrt{22,275}} \approx -0,318;$$

$$P_{90}(0;48) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) =$$
$$= \Phi(-0,318) - \Phi(-10,488) = -0,125 + 0,5 = 0,375$$

Повернутись до плану.

Проста течія подій. Формула Пуассона

Означення *Течією **подій** називають послідовність таких подій, які з'являються у випадкові моменти часу.*

Наприклад, заява до диспетчерського пункту з викликом таксі.

Означення Течія подій називається пуассонівською, якщо вона:

1. Стаціонарна, тобто залежить від кількості k появ події та часу t і не залежить від моменту свого початку;

2. Має властивість відсутності післядії, тобто імовірність появи події не залежить від появи або не появи події раніше та не впливає на найближче майбутнє;

3. Ординарна, тобто імовірність появи більше однієї події в малий проміжок часу є величина нескінченно мала у порівнянні з імовірністю появи події один раз у цей проміжок часу.

Означення Середнє число λ появ події А в одиницю часу називають *інтенсивністю* течії.

Теорема . Якщо течія подій пуассонівська, то імовірність появи події А k разів за час t можна знайти за формулою

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (*)$$

де λ - *інтенсивність течіії.*

Зауваження 1. Формулу (*) іноді звуть математичною моделлю простої течії подій.

Приклад. *Середня кількість замовлень, що поступають до комбінату побутового обслуговування кожну годину, дорівнює 3. Знайти імовірність того, що за дві години поступлять*

а) 5 замовлень;

б) менше 5 замовлень;

в) не менше 5 замовлень.

Р о з в' я з *а н н я . Маємо просту течію подій з інтенсивністю* $\lambda = 3$. *За формулою (*) одержуємо*

а)

$$P_2(5) = \frac{(3 \cdot 2)^5}{5!} e^{-3 \cdot 2} = \frac{(6)^5}{5!} e^{-6},$$

б) $P_2(k < 5) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) + P_2(4) = 115e^{-6}$,

в)

$P_2(k \geq 5) = 1 - P_2(k < 5) = 1 - 115e^{-6}$.

Зауваження 2. *Прикладами простої течії подій можуть бути: поява викликів на* АТС, *на пункти швидкої медичної допомоги, прибуття літаків до аеропорту або клієнтів у підприємство побутового обслуговування, серія відмов елементів або блоків приладів та таке інше.*

Формула Пуассона

Якщо проводиться *n* незалежних дослідів, кількість яких велика, у кожному з яких ймовірність появи події *A* постійна і дуже мала, то ймовірність того, що подія *A* настане рівно *m* разів може бути обчислена за формулою Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np.$$

Формула Пуассона використовується у випадку коли $\lambda \leq 10$.

Найбільшу імовірність має кількість успіхів, що дорівнює цілій частині λ *або* цілій частині $\lambda+1$

Приклад

У партії телевізорів на 10000 виробів у середньому припадає 8 бракованих. 1) Яка ймовірність що в цій партії з 1000 телевізорів буде 2 бракованих вироби? 2)Яка найбільш ймовірна кількість бракованих виробів і чому вона дорівнює?

<u>Розв'язання.</u>

Спочатку знайдемо ймовірність бракованого виробу: $p=8/10000=0,0008$. Звідси $\lambda = 0,0008 \cdot 1000 = 0,8$

1)За формулою Пуассона ймовірність двох бракованих виробів:

$$P_{1000}(2) \approx \frac{0{,}8^2}{2!} \cdot e^{-0{,}8} \approx 0{,}144,$$

2)Ціла частина від 0,8 дорівнює 0, тобто найбільш ймовірна кількість бракованих виробів дорівнює 0, або 1. Знайдемо ймовірності цих подій:

$$P(0) = e^{-0{,}8} = 0{,}449$$
$$P(1) = 0{,}8 \cdot e^{-0{,}8} = 0{,}359$$

Тобто більш ймовірно, що в цій партії не буде бракованих виробів: *P(0)=0,45.*

Значення   функції табульовані

Повернутись до плану.

Питання для самоперевірки та вправи

1. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?

2. Яку формулу звуть формулою Бернуллі і що вона дозволяє обчислювати?

3. За якими формулами знаходять імовірність появи події *А* менше *т* або не менше за га разів у *п* випробуваннях схеми Бернуллі?

4- За якою формулою знаходять імовірність появи події *А* хоча б один раз у п випробуваннях?

5. Як можна знайти найбільш імовірне значення числа появ події *А* у схемі Бернуллі?

6. Як можна знайти кількість випробувань у схемі Бернуллі, яка дозволяє з імовірністю Р стверджувати, що подія *A* з'явиться хоча б один раз?

7. У яких випадках доцільно використовувати граничні теореми у схемі Бернуллі?

8. Коли доцільно застосовувати формули Пуассона, локальну або інтегральну формули Муавра-Лапласа?

9. Як визначаються і які мають властивості локальна та інтегральна функції Лапласа?

10. Як знаходять $P_n(m)$ у випадку послідовності випробувань із різними імовірностями?

11. Як формулюється теорема Бернуллі і який вона має наслідок?

12. Який існує зв'язок між твердженням теореми Бернуллі та інтегральною функцією Лапласа? Які задачі дозволяє розв'язувати цей зв'язок?

13. За якою формулою знаходять імовірність появи у випадку простої течії?