Тема 5. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План.

Поняття випадкової величини (в.в.) є одним з основних в теорії імовірностей та її застосуваннях. *Випадковими величинами (the random* *variables)*, наприклад, є число випавших очок при одноразовому киданні грального кубика; число атомів радія, що розпалися за даний проміжок часу; відхилення від номіналу деякого розміру деталі при правильно налагодженому технологічному процесі і т.д. Випадковою величиною, пов'язаною з даним ймовірнісним експериментом, називається величина, яка при кожному здійсненні цього експерименту приймає те чи інше числове значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме. Випадкові величини позначатимемо грецькими літерами ξ, ψ, η,…або великими літерами латинського алфавіту.

Таким чином випадковою величиною називається змінна величина, яка в результаті досліду може приймати те чи інше числове значення.

Надалі будемо розглядати два типи випадкових величин – ***дискретні*** **(*discrete*)** і ***неперервні (continuous).***

Означення 1. *Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може приймати відокремлені ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати) з відповідними імовірностями.*

Приклад 1. Кількість влучень у мішень при трьох пострілах буде X *:* 0,1,2,3. Отже, X може приймати чотири ізольовані числові значення з різними імовірностями. Тому X - дискретна випадкова величина.

Кількість викликів таксі Y на диспетчерському пункті також буде дискретною випадковою величиною, але при $t \to \infty$ значення Y також зростають, тобто їх кількість прямує до нескінченності Y : 0,1,2,..., n,....

Означення 2. *Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу* (a, b). *Кількість можливих значень такої величини є нескінчена.*

Приклад 2. Величина похибки, яка може бути при вимірюванні відстані; час безвідмовної роботи приладу; зріст людини; розміри деталі, яку виготовляє станок-автомат

1. Дискретні випадкові величини(ДВВ)

Розглянемо випадкову величину ξ (випадкові величини будемо позначати малими буквами грецького алфавіту), можливі значення якої утворюють скінченну або нескінченну послідовність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Означення 3. Нехай задана функція $P(x)$, значення якої в кожній точці $x = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) рівне імовірності того, що величина ξ прийме значення x_i

$P(x_i) = P(\xi = x_i)$. Така випадкова величина ξ називається ***дискретною (перервною).***

Функція $P(x)$ називається *законом* ***розподілу ймовірностей випадкової величини*** або ***законом розподілу***. Дана функція визначена в точках послідовності $x_1, x_2, .., x_n, \ldots$.

В кожному з дослідів випадкова величина ξ приймає завжди яке-небудь значення з області її зміни, тому: $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)+\ldots=1$.

Законом розподілу виподкової величини називається довільна відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Проводиться n незалежних дослідів, в результаті кожного з яких може з'явитися чи не з'явитися подія A. Нехай імовірність появи події A в кожному з дослідів дорівнює p.

Розглянемо випадкову величину ξ - число появ події A при n незалежних дослідах. Область зміни ξ складається з усіх цілих чисел від 0 до n включно.

Закон розподілу ймовірностей$P_n(m)$ визначається формулою Бернуллі

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} = P(\xi = m) \;.$$

Нехай випадкова величина ξ може приймати довільне ціле невід'ємне значення.

Причому

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k=0,1,2,\ldots n,\ldots);$$

Де λ - деяка додатна константа.

Кажуть, що випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона, якщо можливі значення випадкової величини ξ утворюють скінченну послідовність $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Закон розподілу ймовірностей випадкової величини дають у вигляді таблиці, в якій

$$p_i = P(\xi = x_i);$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Таблиця 1

ξ	x_1	x_2	…	x_n
$p(x_1)$	p_1	p_2	…	p_n

Цю таблицю називають ***рядом розподілу (the number distribution)*** випадкової величини ξ .

Функцію *P(x)* можна показати у вигляді графіка (рис. 1). Для цього візьмемо прямокутну систему координат на площині. По горизонтальній осі будемо відкладати можливі значення випадкової величини ξ , а по вертикальній осі – значення функції $P(x_s) = P(\xi = x_s)$; якщо з`єднати точки цього графіка, то отримаємо фігуру, що називається ***многокутником розподілу*** **(*polygons sharing).***

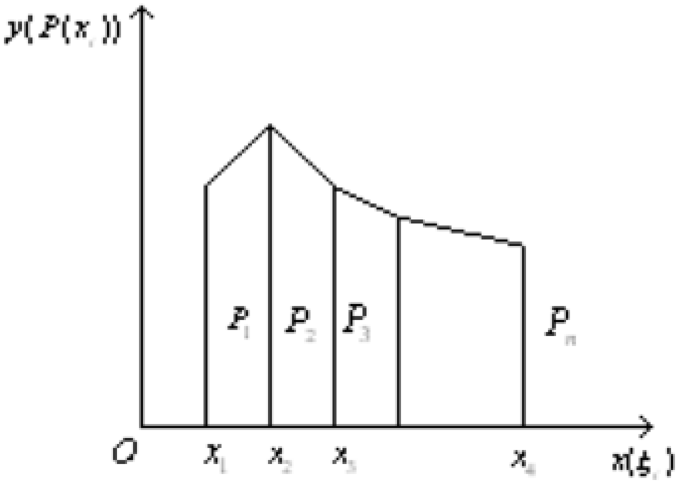


Рис. 1

Повернутись до плану.

2. Функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини та її властивості

Розглянемо функцію *F(x),* визначену на всій числовій осі *OX* . Для кожного *x* значення *F(x)* дорівнює ймовірності того, що дискретна випадкова величина ξ приймає значення менші *x*

Тобто $F(x) = P(\xi < x)$ (1).

Ця функція називається ***функцією розподілу ймовірностей*** (***the probability distribution function)***, або ***функцією розподілу.***

Розглянемо **основні властивості функції розподілу.**

Властивості функції розподілу:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

2) $F(x)$ — неспадна функція, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 \le x_2$.

3) $F(x)$ — неперервна зліва, тобто для довільного $x \in R$

$$\lim_{\varepsilon\to0+} F(x-\varepsilon) = F(x).$$

Якщо випадкова величина ξ має дискретний розподіл, то

$$F(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i , \qquad (2)$$

де підсумовування проводиться за всіма індексами i, для яких виконується умова $x_i < x$.

Тобто за рядом розподілу легко відновлюється функція розподілу. І навпаки, за функцією розподілу легко відновлюється ряд розподілу дискретної випадкової величини:

множина значень випадкової величини співпадає з множиною точок $\{x_i\}$ розриву $F(x)$, а відповідні ймовірності p_i дорівнюють величинам скачків функції розподілу у точках x_i, тобто

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = \lim_{\varepsilon\to0} F(x+\varepsilon) - F(x), \quad \varepsilon > 0. \qquad (3)$$

Зауважимо, що з одним і тим же експериментом може бути пов'язано багато різних випадкових величин.

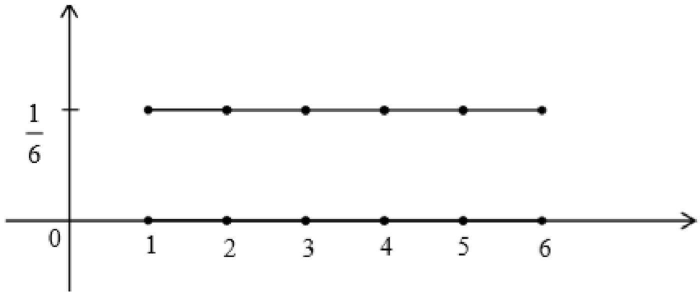
Приклад 2. Експеримент полягає у підкиданні симетричного однорідного грального кубика. Нехай випадкова величина ξ дорівнює кількості очок, які випали при одному підкиданні, а випадкова величина ψ дорівнює кількості шісток при одному підкиданні кубика. Побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу, функцію розподілу випадкової величини: а) ξ; б) ψ . Розв’язання. а) ξ може набувати значень 1, 2, 3, 4, 5 та 6 з однаковими ймовірностями 1/6 .

Випадкова величина ξ - число очок, що випали при однократному киданні грального кубика.

Ряд розподілу має вигляд:

ξ_i	1	2	3	4	5	6
$P(\xi_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

а многокутник розподілу —



Знайти функцію розподілу F(x). При $x \le 1$, $F(x)=0$ тому що ξ не приймає значень менше 1.

якщо: $1<x\le 2$, то

$$F(x) = p(\xi < 2) = p(\xi = 1) = \frac{1}{6};$$

$2 < x \le 3$, то $F(x) = p(\xi < 3) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$

$3 < x \le 4$,то

$$F(x) = p(\xi < 4) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) + p(\xi = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

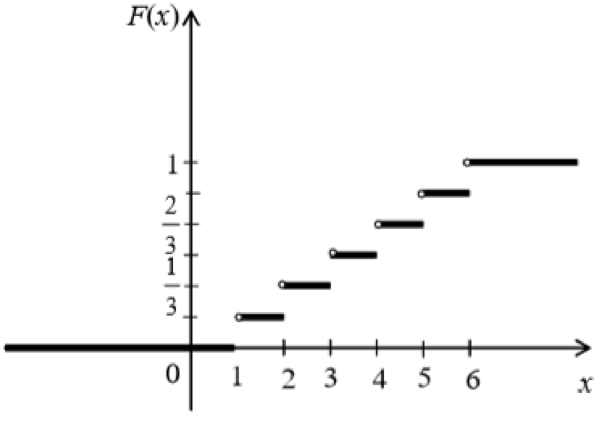
Далі аналогічно : $4 < x \le 5; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$

$$5 < x \le 6; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6};$$

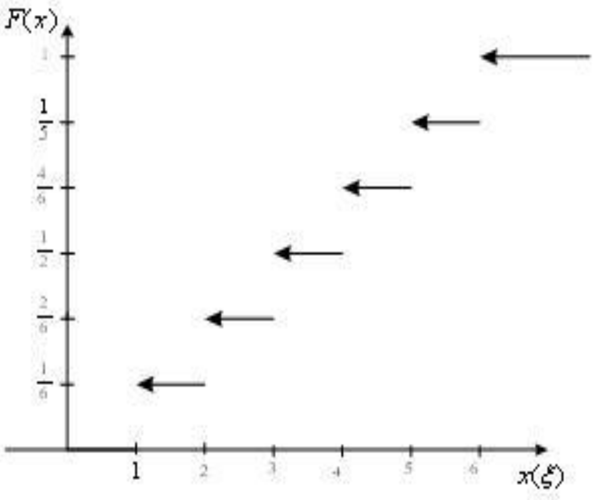
$$6 < x; F(x) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & npu\ \ x\le 1,\\ \frac{1}{6}, & npu\ \ 1<x\le 2,\\ \frac{2}{6}, & npu\ \ 2<x\le 3,\\ \frac{3}{6}, & npu\ \ 3<x\le 4,\\ \frac{4}{6}, & npu\ \ 4<x\le 5,\\ \frac{5}{6}, & npu\ \ 5<x\le 6,\\ 1, & npu\ \ x>6.\end{cases}$$

Графік функції розподілу має вид:



або



б) Оскільки при одному підкиданні грального кубика шістка може або зовсім не випасти, або випасти лише один раз, то випадкова величина ψ набуває двох значень: 0 та 1. Легко бачити, що $P\{\psi=0\}=\frac{5}{6}$, $P\{\psi=1\}=\frac{1}{6}$.

Ряд розподілу:

ψ	0	1
p_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Многокутник розподілу:

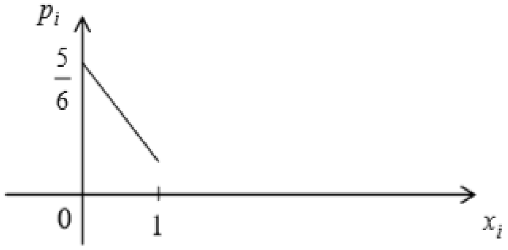
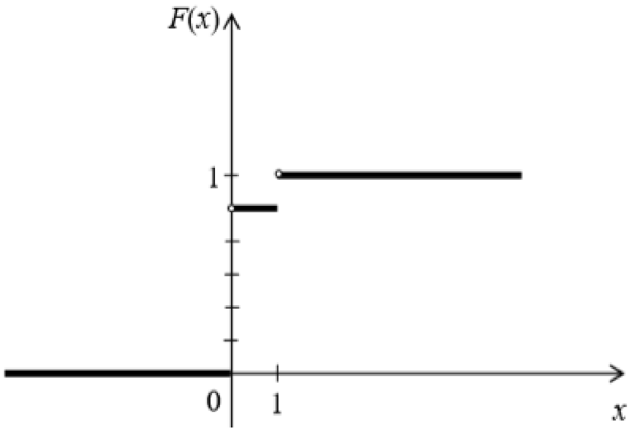


Рис. 3.

Функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ \frac{5}{6}, & при\ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ x>1.\end{cases}$$

Графік функції розподілу:



Повернутись до плану.

3. Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин

3.1 Способи задання та закони розподілу

Нехай випадкова дискретна величина X приймає значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ з відповідними імовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Задати закон розподілу такої випадкової величини - це задати рівність $p_k = P(X = x_k)$, яку можна розглядати як функцію.

Тому закон розподілу X можна задати *аналітично, таблично, графічно.*

Табличний спосіб

Функція розподілу для дискретної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i).$$

Найбільш часто використовують табличний спосіб задання ДВВ, який називають ***рядом розподілу*** і зображують у вигляді

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

У першому рядку записані усі можливі значення *X*, а у другому рядку - відповідні імовірності, які мають властивість

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Приклад 3. Умовами лотереї передбачено: один виграш - 100 гривень, два - 50 гривень, вісім - 10 гривень, дев'ятнадцать -1 гривня. Знайти закон розподілу суми виграшу власником одного лотерейного білету, якщо продано 1000 білетів.

Розв'язання. Будемо шукати закон розподілу суми виграшу *X* у вигляді ряду розподілу. Тоді

X	100	50	10	1	0
$P(X)$	0.001	0.002	0.008	0.019	0.97

Де p(0) = 1 - (0.001 + 0.002 + 0.008 + 0.019) = 1 - 0.03 = 0.97.

Зауваження *1. Якщо випадкова дискретна величина може приймати нескінчену кількість значень, то її ряд розподілу (таблиця) буде мати нескінчену кількість елементів у кожному рядку, причому ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *повинен бути збіжним, а його сума повинна дорівнювати одиниці.*

Графічний спосіб. Візьмемо прямокутну систему координат. На осі абсцис будемо відкладати можливі значення ДВВ, а на осі ординат - відповідні значення імовірності. Одержимо точки з координатами (x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n),

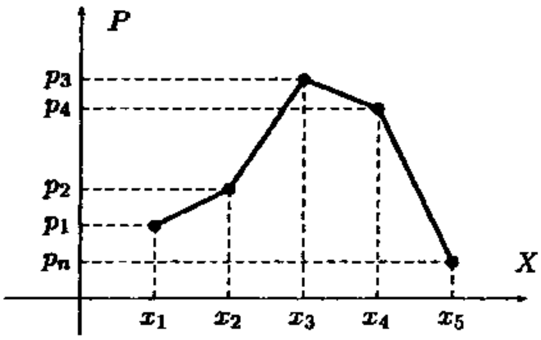


рис. 3.

Поєднавши ці точки прямими, одержимо графік (дивись рис. 3) у вигляді ***многокутника розподілу*** випадкової дискретної величини.

Значення ДВВ, імовірність якого найбільша, називають ***модою***. На рис. 3 мода – x_3. .

Аналітичний спосіб задання випадкової дискретної величини базується на заданні певної функції, за якою можна знайти імовірність p відповідного значення x_k ,тобто

$$p_k = f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Вкажемо деякі найважливіші закони розподілу ДВВ та задачі, в яких вони зустрічаються.

Повернутись до плану.

1. Біноміальний закон розподілу. Цей закон має вигляд

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

і використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з'являється з імовірністю *p*.

2. Закон розподілу Пуассона. ДВВ *X* приймає злічену множину значень (m = 0,1,2,...) з імовірностями

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (a > 0).$$

Цей розподіл використовують у задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування, для обчислення: кількості вимог на виплату страхових сум за рік, кількості дефектів однакових виробів.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n досить велике, а p або $1 — p$ прямує до нуля, то біноміальний розподіл апроксимує розподіл Пуассона, параметр якого a = np, причому при p ≤ 0,1 або p ≥ 0,9 ця апроксимація дає добрі результати незалежно від величини n.

Зауваження 2. Якщо у формулі Пуассона покласти a =λt, де – λ інтенсивність течії випадкових подій в одиницю часу, то формула прийме вигляд

$$P_t(X=m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}\quad (m=0,1,2,\ldots).$$

Повернутись до плану.

3. Геометричний розподіл. Цей розподіл має вигляд

$$P(X=m)=pq^{m-1},$$

Де p = *P(A)* - імовірність появи події *A* в кожному випробуванні, *q= 1 —p, X* - кількість випробувань до появи події *A* в серії незалежних повторних випробувань.

Ряд імовірностей цього розподілу буде нескінченно спадною геометричною прогресією із знаменником q , сума якої дорівнює одиниці.

Геометричний розподіл застосовують у різноманітних задачах статистичного контролю якості виробів, в теорії надійності та у страхових розрахунках.

Повернутись до плану.

4. Гіпергеометричний розподіл.

Цей розподіл має вигляд

$$P(X=m)=\frac{C_k^m\cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1,2,\ldots,n,\ k\geq n.$$

Він вказує імовірність появи *m* елементів з певною властивістю серед n елементів, взятих із сукупності *N* елементів, яка містить k елементів саме такої властивості.

Цей розподіл використовують у багатьох задачах статистичного контролю якості.

Зауваження 3. Якщо об'єм вибірки n малий у порівнянні з об'ємом N сукупності, тобто –n/N ≤ 0.1; n/k≤ 0.1, n/(N-k)≤0.1, *то імовірності у гіпергеометричному розподілі будуть близькими до відповідних імовірностей біноміального розподілу з p* = k/N

У статистиці це означає, що розрахунки імовірностей для безповторної вибірки будуть мало відрізнятись від розрахунків імовірностей для повторної вибірки.

Повернутись до плану.

5. Поліноміальний розподіл. Цей розподіл має вигляд

$$P_n(X_1 = m_1; X_2 = m_2; \ldots; X_s = m_s) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_s!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}.$$

Він застосовується тоді, коли внаслідок кожного із здійснених повторних незалежних випробувань може з'явитися s різних подій A_I з імовірністю P_I причому $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1.$

Закони розподілу ДВВ повністю характеризують випадкові величини і дозволяють розв'язувати усі пов'язані з ними задачі.

Повернутись до плану.

4.Числові характеристики ДВВ

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину, але він інколи буває невідомим, тоді обмежуються так званими числовими характеристиками:

1)математичним сподіванням;
2)дисперсією;
3)середнім квадратичним відхиленням.

[Повернутись до плану.]

1. Математичне сподівання ДВВ

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її значень на відповідні ймовірності і позначають M(X):

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \,. \qquad (1)$$

Тут X - ДВВ, що набуває значення x_k з ймовірностями p_k $k = \overline{1,n}$

Із означення випливає, що *M(X)* - не випадкова, а стала величина.

Приклад 4.1. Жива маса (кг) новонароджених телят задана законом розподілу

X	48	53	57	61
P	0.2	0.4	0.3	0.1

Контроль 0,2+0,4+0,3+0,1=1.

Знайти математичне сподівання маси новонародженого теляти.

Розв 'язання. Знайдемо *M(X)* згідно з (1)

M(X) = 48 • 0,2 + 53 • 0,4 + 57 • 0,3 + 61 • 0.1 = 54.

Математичне сподівання випадкової величини маса новонародженого теляти дорівнює 54,0 кг.

Середня маса теляти:

$$\bar{X} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} x_k = 1/4(48 + 53 + 57 + 61) = 54{,}7 \text{ (кг).}$$

Математичне сподівання наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини і тим точніше, чим більше число випробувань n. Якщо записати (1) у вигляді:

$$M(X) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = x_c \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} pk = 1\right), \qquad (2)$$

нехай p_k - маса матеріальних точок, розміщених на числовій осі ох, x_k координати цих точок, то формулу (2) можна розглядати як формулу центра ваги системи матеріальних точок. Тому математичне сподівання називають *центром розподілу.*

[Повернутись до плану.]

2. Властивості математичного сподівання ДВВ

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій
M(C)=C. (3)

2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання
M(CX)=CM(X). (4)

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних ДВВ дорівнює добутку їх математичних сподівань
M(XУ)=M(X)M(У). (5)

Доведення. **Нехай задані ДВВ X та Y своїми законами розподілу**

	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

$p_1+p_2=1$

$q_1+q_2=1.$

Тоді значення

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_1
P	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_1

і

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{2} x_1y_1\cdot p_1q_1+x_2y_1\cdot p_2q_1+x_1y_2\cdot p_1q_2+x_2y_2\cdot p_2q_2\,,$$

або

$$M(XY)=y_1q_1(x_1p_1+x_2p_2)+y_2q_2(x_1p_1+x_2p_2)=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=M(X)M(Y)\,.$$

4. Математичне сподівання суми двох ДВВ дорівнює сумі математичних сподівань.

Закон розподілу для суми:

$X+Y$	x_1+y_1	x_2+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

За означенням:

$$M(X+Y)=(x_1+y_1)p_1q_1+(x_1+y_2)p_1q_2+(x_2+y_1)p_2q_1+(x_2+y_2)p_2q_2=$$

I $$(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y\,q_2)=M(X)+M(Y)\,.$$ (6)

Приклад4.2 Проведено три постріли з ймовірностями влучень у ціль: p_1= 0,4; p_2 = 0,3; p_3=0,6. Знайти математичне сподівання загальної кількості влучень.
Розв'язання. Кількість влучень при одному пострілі є випадковою

величиною, яка може набувати двох значень: 1 (влучення) з ймовірністю p=0,4 і 0 (промах) з ймовірністю q = 1 - 0,4 = 0,6. Тоді

M(X) = 1*0,4 +0*0,6 = 0,4. Для другого пострілу

M(Y) = 1*0,3 + 0*0,7 = 0,3. Для третього пострілу

M(Z) = 7*0.6+0*0,4 = 0,6.

Загальна кількість влучень є випадковою величиною $X+У+Z$, тому згідно (6)

$$M(X+Y+Z)=M(X)+M(У)+M(Z)=0,4+0,3+0,6=1,3.$$

Повернутись до плану.

3. Приклади обчислення математичного сподівання ДВВ

3.1 Біномний розподіл ДВВ

Математичне сподівання М(Х) числа появи події А в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірність p (0<p<1) появи події А в коленому випробуванні

$M(X)=np.$ (7)

Доведення:

$$M(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot p_n(k)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=np\sum \frac{k}{n} C_n^k p^{k-1} q^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}=$$

$$np\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r p^r q^{n-1-r}=np; \qquad \left(\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r p^r q^{n-1-r}=1\right).$$

Приклад.4.3 Ймовірність влучення у ціль при стрільбі з гармати p = 0,6 Знайти математичне сподівання *М(Х)* загального числа влучень, якщо зроблено 10 пострілів,

Розв 'язання. М(Х) = пр = 10 • 0,6 = 6 (влучень).

3.2 Розподіл Пуассона. Відхилення ДВВ від М(Х)

Якщо ДВВ має розподіл Пуассона з параметром λ, то її математичне сподівання М(Х)= λ

Доведення. За умовою ДВВ має розподіл з параметром λ, тому

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad \left(k=\overline{0,\infty}\right).$$

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda .$$

"

Означення. Відхиленням випадкової величини X називається різниця між випадковою величиною та її математичним сподіванням, тобто X - М(Х).

<u>Теорема.</u> *Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю $M((X)\text{-}M(X))$* = 0 Дійсно, згідно з властивостями *M(X)* маємо:

$M((X) - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$

Оскільки відхилення недостатньо характеризує розміщення значень ДВВ, тому розглядають квадрат відхилення ДВВ.

Повернутись до плану.

4. Дисперсія ДВВ та її властивості

Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$D(X)=M[X-M(X)]^2$ (9)

Приклад 4.4. Використовуючи початкові дані прикладу 4.1 та знайдене там *M(X)* = 54, необхідно знайти дисперсію (розсіювання) випадкової величини *X*-маси новонародженого теляти.

Запишемо розподіл випадкових величин: $X – M(X)$ і $(X - M(X))^2$:

$X – M(X)$	-6	-1	3	7
P	0,2	0,4	0,3	0,1

$(X – M(X))^2$	36	1	9	49
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Згідно з рівністю (9), знаходимо

D(X) = 36*0,2 +1*0,4+9*0,3 + 49*0,1 = 15,2.

Формула обчислення дисперсії (9) може бути записана у вигляді:

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$. (10)

Приклад 4.5. Знайти *D(X)* за формулою (10) в прикладі 4.1.

Розв 'язання. Запишемо розподіл випадкової величини X^2

X^2	2304	2809	3249	3721
P	0,2	0,4	0,3	0,1 ,

тоді $M(X^2)$ = 2304 * 2 + 2809 *0,4 + 3249* 0,3 + 3721*0,1 = 2931,2 .

$M^2(X) = (54)^2=2916$.

D(X) = 2931,2 -2916 = 15,2.

Властивості дисперсії дискретної випадкової величини*

1. *Дисперсія ДВВ X невід 'ємна, тобто*

$D(X)\geq 0$

2. *Дисперсія сталої величини* С *дорівнює нулю* I

D(C)= O

5. *Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрату*

$D(CX) = C^2D(X)$

4. *Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних ДВВ X та У дорівнює сумі їх дисперсій* \

$D(X + У)=D(X) + D(У)$ *I*

| Дисперсія суми С + *X* дорівнює дисперсії від *X:*

$D(C + X) = 0 + D(X) = D(X).$

Це означає, що зміщення випадкової величини не змінює її дисперсії. Наведемо формули обчислення дисперсії ДВВ:

а) ***Біномний розподіл.*** Дисперсія біномного розподілу ДВВ X з параметрами *n і p* дорівнює *npq* тобто

$D(X)=M(X^2) -M^2(X) = n^2p^2 -np^2 -n^2p^2 = np(1-q) = npд$

$D(X) = npq$ (11)

Приклад 4.6 Проводяться 10 незалежних випробувань, для яких ймовірність *p* - величина стала: *p* = 0,6. Знайти дисперсію D*(X)* - числа появи цих подій у цих випробуваннях.

Розв 'язання: За умовою *n = 10 p* = 0,6 q= 0,4. Шукана дисперсія *D(X)= npq* = 10 • 0,6 • 0,4 = 2,4

б) ***Розподіл Пуассона.*** Дисперсія розподілу Пуассона з параметром λ ДВВ X дорівнює λ, тобто

$D(X) = \lambda$

Повернутись до плану.

5. Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини

Для оцінки ступеня розсіювання можливих значень випадкової величини *X* навколо її середнього значення *M(X)* можна ввести ще й лінійну характеристику - середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (13)$$

Приклад 4.7 Знайти середнє квадратичне відхилення у прикладі 4.4 *Розв'язання.* Згідно з формулою (13) маємо

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}2} \approx 3{,}898.$$

<u>Теорема.</u> *Середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню з суми квадратів їх середніх квадратичних відхилень, тобто:*

$$\sigma\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(X_k)}. \qquad (14)$$

Дійсно, якщо

$$X=\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

то

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} D(X_k),$$

тоді

$$\sigma\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(X_k)}.$$

Повернутись до плану.

6. Незалежні випадкові величини, що мають однаковий розподілі

Випадкові величини, що мають однаковий розподіл, мають і однакові числові характеристики.

Нехай взаємонезалежні випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n мають однаковий розподіл (позначимо їх середнє арифметичне через $\bar{X}$, тобто $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, і для них $M(X_k)=a$, $D(X_k)=D$, $\sigma(X_k)=\sigma$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, тоді мають місце теореми:

Теорема. *Математичне сподівання середнього арифметичного однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин дорівнює математичному сподіванню кожної з них:*

1 $$M(\bar{X}) = a.$$

Дійсно,

$$M(\bar{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)=\frac{a}{n}\cdot n=a.$$

Теорема. Дисперсія середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних величин у n разів менша за дисперсію кожної з них:

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{D}{n}.$$

Дійсно,

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{D \cdot n}{n^2} = \frac{D}{n}.$$

Теорема. Середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення кожної з них

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Дійсно,

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \sqrt{\frac{D}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Зауваження. Середнє арифметичне великої кількості взаємно незалежних, випадкових величин має значно менше розсіювання, ніж кожна окрема випадкова величина. Про це слід пам 'ятати при вимірюванні різних фізичних величин.

Повернутись до плану.

7. Моменти розподілу ДВВ

Розгляд поруч з математичним сподіванням випадкової величини X, ще й математичного сподівання квадрату випадкової величини X^2 допомагає краще охарактеризувати вплив на математичне сподівання тих можливих значень випадкової величини X, які великі, але малоймовірні.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k

$$\nu_k = M(X^k), \quad \text{де} \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \qquad (15)$$

Тоді початковий момент першого порядку збігається з математичним сподіванням випадкової величини X: ν_1 =M(X) *а* ν_2 =M(X^2).

Дисперсія

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \nu_2 - \nu_1^2 .$$

<u>Центральним моментом</u> k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини (X-M(X))

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right] \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \qquad (16)$$

Очевидно, $\mu_1 = M(X-M(X)) = 0$, $\mu_2 = M(X-M(X))^2 = D(X)$.

Легко можна отримати співвідношення, які пов'язують центральні моменти другого і третього порядку з початковим:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1 \cdot \nu_2 + 2\nu_1^3;$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3 \cdot \nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \qquad (17)$$

Приклад 7.1 Знайти початкові та центральні моменти першого та другого порядків випадкової величини *X*, заданої розподілом

X	1	2	5	100
P	0.6	0.2	0.19	0.01

Розв'язання. Згідно з рівностю (15) знаходимо:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}19 + 100 \cdot 0{,}01 = 2{,}95 .$$

Запишемо закон розподілу X^2:

X^2	1	4	25	10000
P	0.6	0.2	0.19	0.01

Обчислюємо v_2 і μ_2

$$v_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,19 + 10000 \cdot 0,01 = 106,15;$$

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = 106,15 - 8,70 \approx 97,45.$$

Зауважимо, що $M(X^2)$ величина значно більша за $M(X)$. Моменти більш високих порядків застосовуються нечасто.

Початкові і центральні моменти, вирахувані за даними спостережень, називають *емпіричними.*

Повернутись до плану.

\

Завдання

1. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	-3	-2	2	3
P	0.3	0,1	0,2	0,4

Знайти: 1) Закон розподілу ДВВ $У=X^2$; 2) математичне сподівання М(Х); 3)

математичне сподівання М(У).

2. Незалежні дискретні випадкові величини X та У мають математичне сподівання М(Х)=2 і М(У)=5. Знайти математичне сподівання величини Z=4X-3У.

3. Незалежні дискретні випадкові величини X та У мають математичне І сподівання М(Х)=5 і М(У)=4. Знайти математичне сподівання величини Z=3X(У+8).

4. Дискретна випадкова величина X набуває трьох можливих значень: $x_1=4$ з і імовірністю $p_1=0,5$; $x_2=6$ з імовірністю $p_2=0,3$ та x_3 з імовірністю p_3. Знайти x_3 і р3, знаючи, що М(Х)=8.

5. Заробітна плата працівників цеху розподіляється таким чином:

Зарплата (грн)	80	90	100	110	120	130
Число працівників	10	25	40	50	50	25

Обчислити середню заробітну плату працівників.

6. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення ДВВ X, заданої законом розподілу:

X	4	2	1	0	3	5
P	0.01	0.02	0.25	0.40	0.10	0.22

7. Дискретні величини X та У незалежні і мають дисперсії D(X)=5, D(У)=10, Обчислити дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини Z=2X+3У+7.

8. Дискретні величини X та У незалежні і мають дисперсії D(X)=3, D(У)=5. Обчислити дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини Z=4X+2У-10

9. Проводиться 100 незалежних повторних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи деякої події дорівнює 0,6. Визначити математичне сподівання та дисперсію числа появи події в цих випробуваннях.

10. Ймовірність виграти за лотерейним білетом дорівнює 0,4. Придбано 30 білетів. Визначити математичне сподівання та дисперсію числа білетів, на які випадають виграші.

11. Комплекс для виробництва вершкового масла складається з двох незалежно працюючих ліній. Ймовірності відмови кожної з ліній протягом місяця однакові. Знайти дисперсію ДВВ X — числа відмовивши ліній на протязі місяця, якщо M(X)=0,2.
12. Необхідно дослідити 1000 проб сировини. Ймовірність того, що сировина виявиться неякісною, при кожній пробі одна й та ж сама. Визначити дисперсію ДВВ X - числа проб, у яких сировина виявиться неякісною, якщо M(X)=200.
13. ДВВ X має тільки два можливих значення: x_1та x_2, причому $x_2 > x_1$.
Ймовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу ДВВ X, якщо математичне сподівання та дисперсія відомі: M(X)=1,4; D(X)=0,24.
14. ДВВ X має тільки два можливих значення x_1 та x_2, причому $x_2 > x_1$, Ймовірність того, що X набуде значення x_1, дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу ДВВ X, якщо математичне сподівання M(X)=2,6 та середнє квадратичне відхилення δ(X)=0,8.
15. Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події *A* в кожному випробуванні. Знайти ймовірність появи події *A,* якщо дисперсія числа появи події у трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63. (Використати формулу 11.).
16. Ймовірність того, що витрати води на підприємстві не перевищать норми в робочий день, р — стала величина. Дисперсія ДВВ X — числа днів, протягом яких відбудеться перевитрата води з перших десяти днів місяця, - дорівнює 12/5. і Знайти р.

Повернутись до плану.