Тема 6. Неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу ймовірностей. Числові характеристики

план

Функція розподілу випадкової величини та її властивості

Неперервні випадкові величини задати таблицею неможливо, бо їх значення заповнюють цілий проміжок. Тому треба задати не ймовірності окремих значень, а ймовірність того, що значення випадкової величини потрапить в певний інтервал.

Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ називається ***неперервною***, якщо її область допустимих значень неперервна, тобто можливе любе значення з цієї області. Якщо $\boldsymbol{X}$ – випадкова величина для якої $\boldsymbol{x_{min}}$ – найменше , а $\boldsymbol{x_{max}}$ – найбільше значення, то область її допустимих значень – $\boldsymbol{(x_{min}\,;x_{max})}$.

Наприклад вміст жиру в молоці; вага худоби, час очікування транспорту та інше.

Нехай X - неперервна випадкова величина, а x - деяке дійсне число.

Інтегральною функцією розподілу називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше від x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1)$$

Тепер можна дати більш точне визначення неперервної випадкової величини: випадкову величину називають *неперервною,* якщо її інтегральна функція розподілу *F(x)* неперервно диференційовна.

Властивості інтегральної функції розподілу

1. Значення інтегральної функції розподілу належать відрізку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. F(x)- неспадна функція, тобто

$$F(x_2) \ge F(x_1),\ якщо\ x_2 > x_1.$$

3. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (a,b), дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

4. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме одне конкретне значення, дорівнює нулю.

5. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то

$$1)\ F(x) = 0\ при\ x \le a;$$
$$2)\ F(x) = 1\ при\ x \ge b.$$

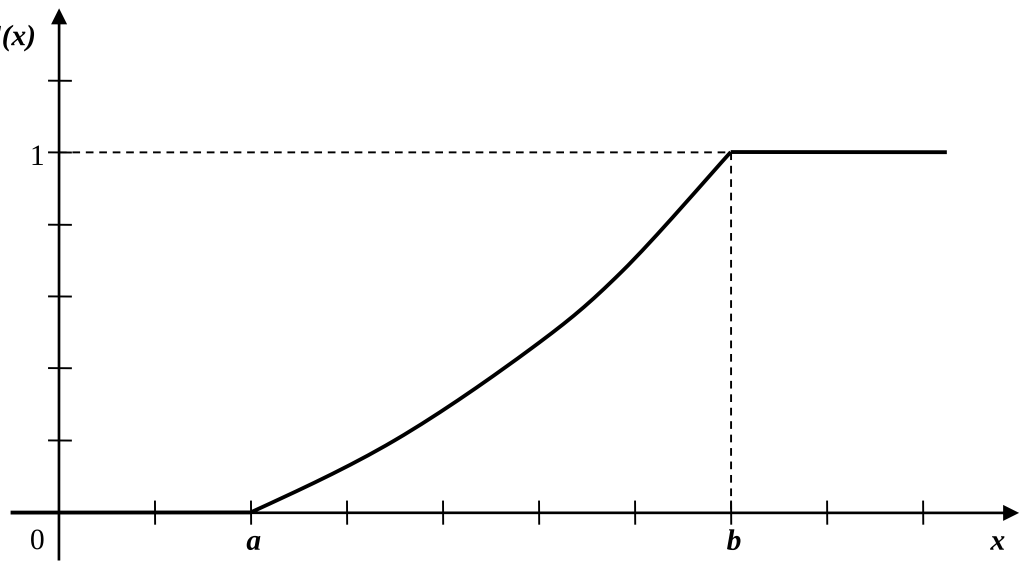


Рис. 1. Функція розподілу ймовірностей НВВ

Приклад 1 . Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \text{ при } -1 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу (0; 1). Побудувати графік F(x).

Розв 'язання. Згідно з (властивістю 3) знаходимо

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

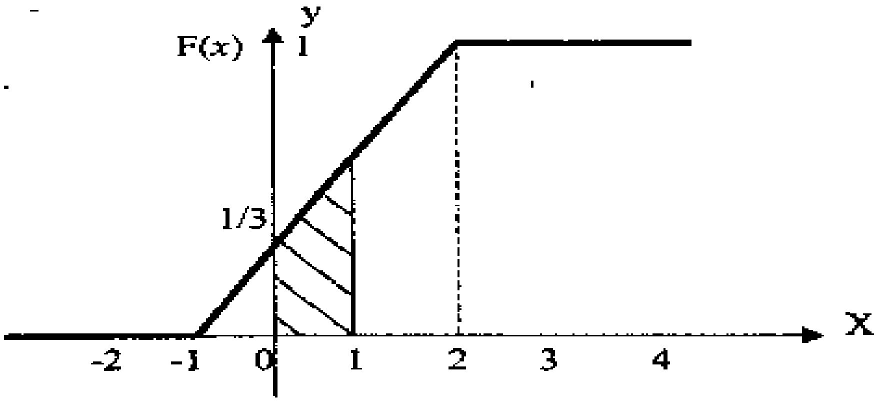


Рис.2 . Графік функції F(x).

Повернутись до плану.

Диференціальна функція розподілу

. *Диференціальною функцією розподілу,* *або* *щільністю ймовірності* називають першу похідну від інтегральної функції:

$$f(x) = F'(x). \quad (2)$$

Знаючи диференціальну функцію *f(x)*, можна знайти інтегральну функцію *F*(*x*) за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \quad (3)$$

Властивості диференціальної функції розподілу

1. Диференціальна функція невід'ємна:

$f(x) \geq 0.$

2. Інтеграл від диференціальної функції в межах від -∝ до +∝ дорівнює одиниці (умова нормування):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (4)$$

3. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу (a,b) дорівнює

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

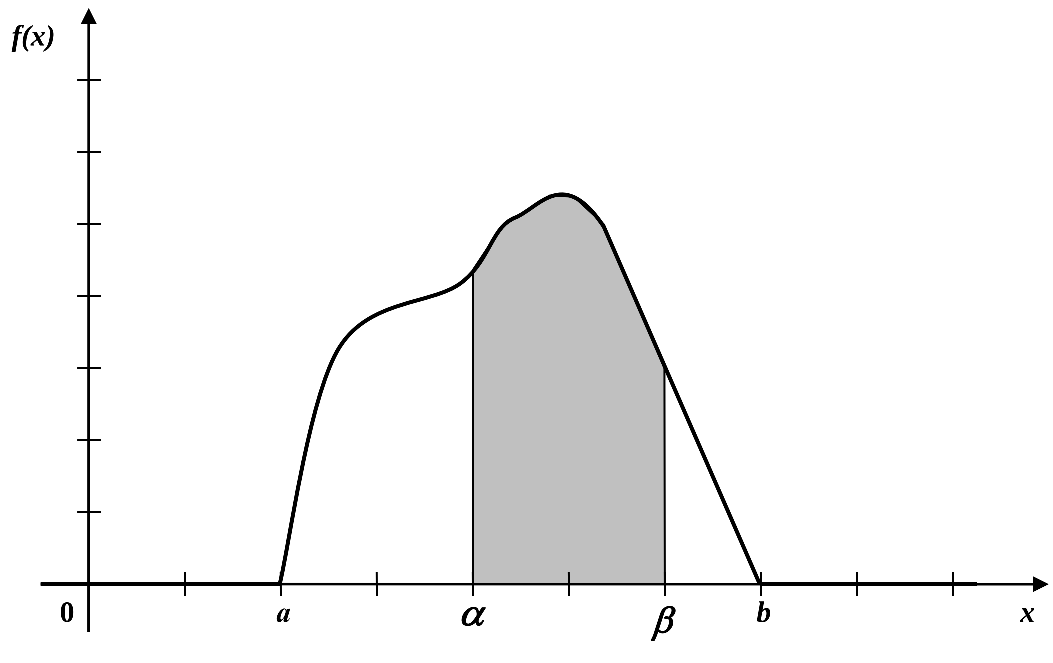


Рис.3. Функція щільності розподілу

Щоб обчислити ймовірність того, що випадкова величина прийме значення в заданому інтервалі (α,β) використаємо одну з формул (у залежності від умови задачі):

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

або

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

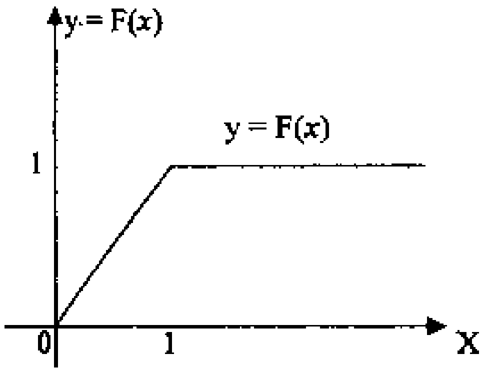
На рисунку 3. ця площа заштрихована.

Приклад3 Знайти щільність розподілу випадкової величини X заданої

функцією розподілу $$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } x \le 0, \\ x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$ I

Розв 'язання. За означенням щільності ($f(x) = F'(x).$) знаходимо I

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{F}'(x) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ при } x \le 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$



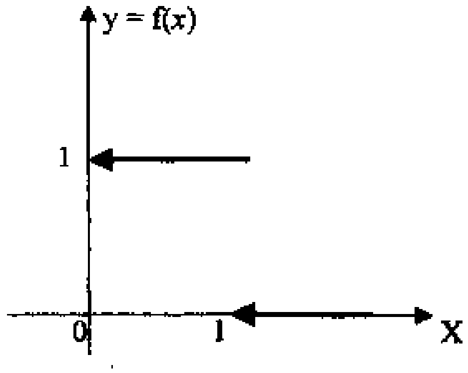


Рис.4. Графіки функції у = F(x) *Рис. 5. Графіки функції у =f(x)*

Приклад 4. Знайти функцію розподілу F(x), якщо щільність розподілу

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \frac{1}{(b-a)} \text{ при } a < x \le b, \\ 0 \text{ при } x > b. \end{cases}$$

Розв 'язання. Згідно з ($F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$) знаходимо і

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \dfrac{(x-a)}{(x-b)} \text{ при } a < x \le b, \\ 1 \text{ при } x > b. \end{cases}$$

<u>Приклад5 .</u> знайти функцію розподілу' F(x), якщо щільність розподілу f(x) має такий вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 \text{ при } 0 < x < 2, \\ 0 \text{ при } x < 0, x > 2. \end{cases}$$

Розв 'язання. Спочатку знайдемо коефіцієнт к, використовуючи умову (2°):

$$\int_{в}^{b} k\ f(x)\ dx = 1.$$

У нашому випадку

$$\int_{0}^{2} kx^2 dx = \Big|_0^2 = k\left(\frac{8}{3} - 0\right) = 1; \quad k = \frac{3}{8}.$$

Тоді

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 \text{ при } 0 < x < 2, \\ 0 \text{ при } x < 0, x > 2. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{8}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \frac{x^3}{8} \text{ при } 0 < x < 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Повернутись до плану.

Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання ***M(X) :***

$$M(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x \cdot f(x) dx.$$

Медіаною Me(X) випадкової величини *X* називається те значення *x*, для якого

$$P\{X < Me(X)\} = P\{X > Me(X)\} = \frac{1}{2}.$$

Медіана, як правило, застосовується для неперервної випадкової величини і геометрично подає абсцису точки, в якій пряма *x = Me(X)* поділяє навпіл площу, обмежену кривою розподілуf(x) і віссю *Ox*.

Приклад.6 Неперервна випадкова величина *X* має щільність імовірності

$$f(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12 & \text{ïðè } x\in(1;\ 2);\\ 0 & \text{ïðè } x\notin(1;\ 2).\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12 & \text{ïðè } x\in(1;\ 2);\\ 0 & \text{ïðè } x\notin(1;\ 2).\end{cases}$$

Знайти: а) математичне сподівання, б) моду, в) медіану цієї величини.

Розв ***'язання.*** а) За формулою $M(X)=\int_a^b xf(x)dx.$ маємо:

$$M(X)=\int_1^2 xf(x)dx=-6\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=1,5.$$

б) Для визначення моди перевіримо функцію f(x) на наявність екстремумів, для чого визначимо, при якому значенні *x* її похідна дорівнює нулю:

$$f'(x)=-12x+18=0;\ \ x=1,5.$$

При переході через точку *x* = 1,5 похідна змінює знак з «+» на «-», тому в цій точці f*(x)* має максимум, а отже, мода *Mo(X)* = 1,5.

Оскільки крива розподілу *f(x)* симетрична відносно прямої *x* = 1,5 , то ця пряма поділяє навпіл площу, обмежену кривою *f(x)* і віссю *Ox,* а отже, *Me(X)* = 1,5.

Взагалі, якщо крива розподілу симетрична відносно прямої $x = a$ і має в точці a максимум, то $M(X) = Mo(X) = Me(X)$ = a..

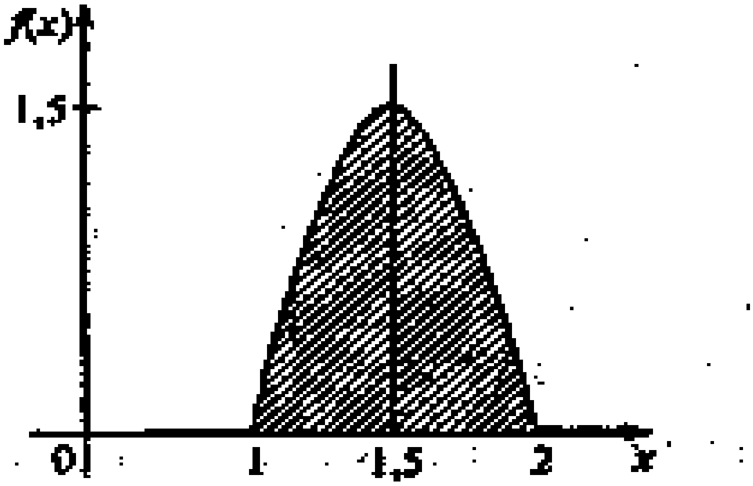


Рис 5

Дисперсія неперервної випадкової величини ***X*** :

$$D(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx.$$

Або за формулою:

$$D(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Усі числові характеристики НВВ мають властивості відповідних числових характеристик ДВВ.

Приклад7 Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення НВВ Х, заданої функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -3, \\ \dfrac{(x+3)^2}{16} \text{ при } -3 \le x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу Х:

$$f(x) = F'(x).$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -3, \\ \dfrac{(x+3)}{8} \text{ при } -3 \le x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання за формулою $M(X) = \int_a^b x f(x)dx.$

$$M(X) = \int_{-3}^{1} x \frac{x+3}{8} dx = \frac{x^3}{3\cdot 8}\Big|_{-3}^{1} + \frac{3x^2}{16}\Big|_{-3}^{1} = \frac{28}{3\cdot 8} - \frac{3\cdot 8}{16} = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Дисперсію знайдемо за формулою

$$D(X) = \int_a^b (X - M(X))^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X).$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \int_{-3}^{1} \frac{x^2(x+3)}{8} dx - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^4}{4\cdot 8}\Big|_{-3}^{1} + \frac{x^3}{8}\Big|_{-3}^{1} - \frac{1}{9} = \frac{1-3^4}{4\cdot 8} + \frac{28}{8} - \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Середнє квадратичне відхилення обчислюється за формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}942.$$

Повернутись до плану.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин визначаються виглядом їх диференціальних функцій розподілу (щільності імовірностей) $f(x)$.

Найчастіше використовуються наступні закони розподілу.

1.Рівномірний розподіл ймовірностей та його числові характеристики

Неперервна випадкова величина ***X*** називається ***рівномірно розподіленою*** на відрізку **[*a*, *b*],** якщо функція щільності є сталою величиною на деякому проміжку.

Завдяки цьому ймовірності попадання на рівні інтервали цього проміжку – однакові і ця властивість використовується для вирішення соціально важливого питання забезпечення деякої групи громадян рівними можливостями виграшу або програшу. Щільність розподілу та функція розподілу задаються наступним шляхом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & x>b. \end{cases}$$

Якщо X рівномірно розподілена на проміжку [a,b], то ймовірність належності X будь-якому інтервалу $[x_1,x_2]$ з [a,b] пропорційна довжині цього інтервалу

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{x_2-x_1}{b-a}.$$

Інакше кажучи, ймовірність попадання X на інтервал $[x_1,x_2]$ дорівнює відношенню довжини цього інтервалу до довжини усього проміжку [a,b].

Цей розподіл задовольняють, наприклад, похибки округлення різноманітних розрахунків.

$$\boldsymbol{F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b, \\ 1, & x>b. \end{cases}}$$

Графіки ***F(x)*** та ***f(x)*** подано на рис. 7.1.

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення в заданому інтервалі:

$$\boldsymbol{P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}},$$

якщо $\boldsymbol{a\le\alpha\le\beta\le b}$,

або

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

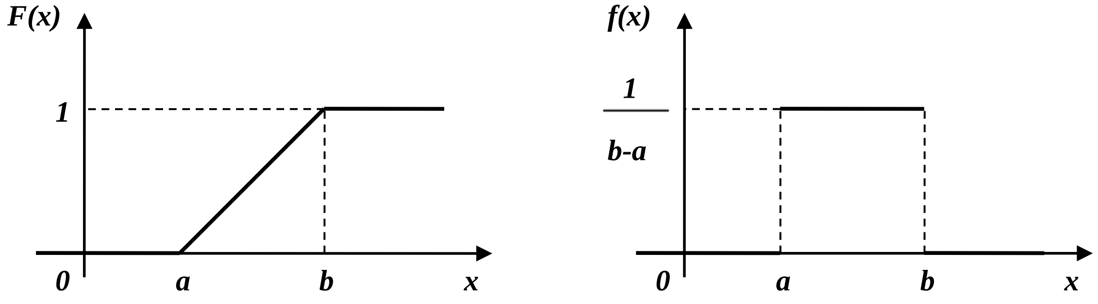


Рис. 7.1. Криві рівномірного розподілу

[Повернутись до плану.]

Числові характеристики рівномірно розподіленої неперервної величини

Модальне значення відсутнє, медіана співпадає з середнім значенням.

$$M(X) = \frac{a+b}{2};$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(X) = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}.$$

Коефіцієнт асиметрії: $\gamma=0$ коефіцієнт ексцесу: $\mu=9/5$.

Приклад 7.1.

Урожайність зернових у господарстві складає від 20 до 50 центнерів з гектару. Якщо урожайність знаходиться в межах 20 - 35 ц/га, то рентабельність складає 10%, в межах 35 - 40 ц/га – 15%, в межах 40-50 ц/га – 25%.

Знайти очікуваний рівень рентабельності та його середньоквадратичне відхилення (розподіл урожайності вважати рівномірним).

Розв'язання:

За допомогою функції розподілу ***F(x)*=(x-20)/(50-20)** знайдемо ймовірності влучення в інтервали (20;35); (35;40); (40;50):

$$\boldsymbol{p_1 = (35-20)/30 = 0{,}5;\ p_2 = (40-35)/30 \approx 0{,}17;\ p_3 = (50-40)/30 \approx 0{,}33}$$

Звідси, очікувана рентабельність дорівнює:

$$\boldsymbol{\overline{\rho} = 0{,}5 \cdot 10\% + 0{,}17 \cdot 15\% + 0{,}33 \cdot 25\% = 15{,}8\%}$$

$$\boldsymbol{\sigma_\rho^2 = 0{,}5 \cdot 10^2 + 0{,}17 \cdot 15^2 + 0{,}33 \cdot 25^2 - 15{,}8^2 = 44{,}86}$$

$$\boldsymbol{\sigma_\rho = 6{,}7\%}$$

Повернутись до плану.

2. Експоненціальний розподіл

Показниковий (або експоненціальний) закон розподілу ймовірностей застосовується в теорії надійності, в теорії масового обслуговування, при аналізі та прогнозуванні природних катастроф (землетрусів, повеней, цунамі).

Показниковому розподілу задовольняють: тривалість телефонної розмови, гарантійний термін ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера і т.д.

Неперервна випадкова величина X розподіленою за *показниковим законом*, якщо щільність її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0\ , & x<0,\end{cases}$$

Де λ– параметр розподілу.

Функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0\ , & x<0,\end{cases}$$

Графіки ***f(x)***та ***F(x)*** подано на рис. 7.2 та 7.3.:

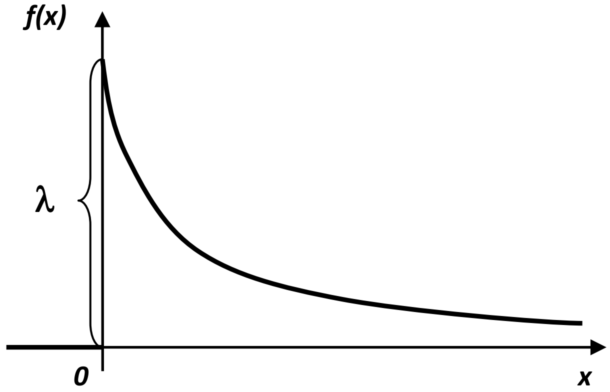


Рис. 7.2. Крива щільності показникового розподілу

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення в заданому інтервалі:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

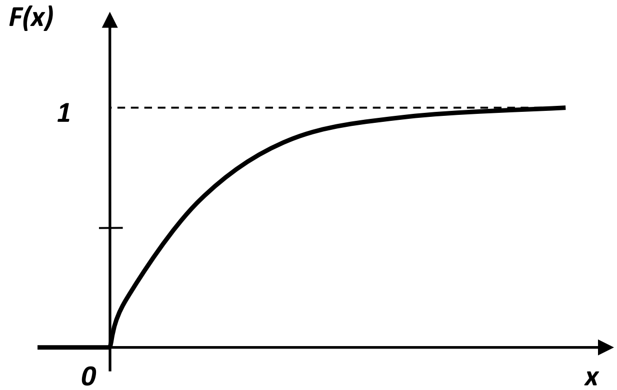


Рис. 7.3. Крива функції показникового розподілу

Числові характеристики неперервної величини, розподіленої за показниковим законом

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Модальне значення дорівнює нулю, медіана $x_m = \ln 2 / \lambda$.

Коефіцієнти асиметрії та ексцесу для показникового розподілу $\gamma = 2; \quad \mu = 6$.

Приклад 7.2.

Середнє значення магнітуди землетрусу за шкалою Ріхтера дорівнює 2 балам. Руйнування будівель починається з 5 балів. Яка ймовірність, що такий землетрус відбудеться протягом наступних 10 років?

Розв'язання:

Якщо середній показник дорівнює 2 балам, то параметр $\lambda = 0{,}5$. Звідси ймовірність землетрусу більшого за 5 балів протягом року дорівнює: $p(M > 5) = e^{-0{,}5 \cdot 5} \approx 0{,}082$.

Для розрахунку ймовірності хоч одного такого землетрусу протягом 10 років використаємо формулу Пуассона:

$$\lambda_1 = 10 \cdot 0{,}082 = 0{,}82.$$

Звідси ймовірність того, що такий землетрус не відбудеться дорівнює:

$$p(0) = e^{-0{,}82} \approx 0{,}44;$$

тоді ймовірність протилежної події:

$$p(m \geq 1) = 0{,}56.$$

Повернутись до плану.

3.Нормальний розподіл. Стандартний нормальний розподіл. Функція Лапласа

Серед розподілів неперервних випадкових величин ***нормальний закон*** (закон Гауса) займає центральне місце. Цей закон дуже поширений на практиці. Він виявляється у всіх випадках, коли випадкова величина X є результатом взаємодії великої кількості факторів, кожний з яких незначно впливає на величину X і не можна вказати точно який з них впливає більше за інші.

Прикладами випадкових величин, що мають нормальний розподіл, будуть: маса яблука, відхилення при стрільбі та ін.

Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються деякі закони розподілу.

Графік функції ***f(x)*** називається ***нормальною кривою*** (рис.7.4).

Нормально розподілена випадкова величина може приймати будь-які значення в інтервалі $[-\infty;\ +\infty]$ та має функцію щільності ймовірності:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

де ***a*** та ***σ*** – параметри розподілу (***a*** – довільне число***;*** ***σ*** – довільне додатне число).

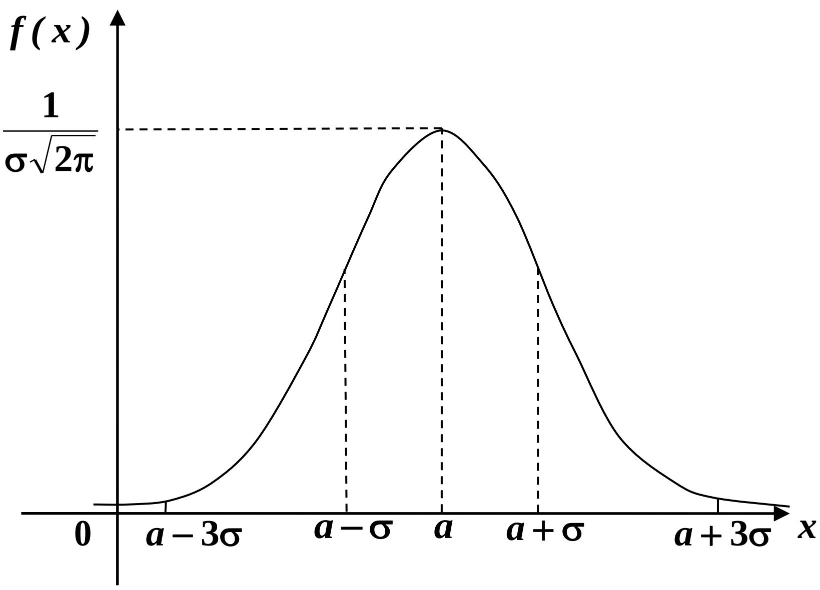


Рис 7.4. Крива нормального розподілу

Як показують дослідження функції ***f(x),*** вона визначена на всій числовій осі, вісь ***x*** є асимптотою функції ***f(x)***.

Максимуму функція ***f(x)*** досягає в точці ***x = a*** і дорівнює він

$$\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\ .$$

Точки перегину функції $x_1 = a - \sigma$ та $x_2 = a + \sigma$.

Нормально розподілена випадкова величина практично не приймає значень, які відрізнялися б від середнього значення більше ніж на 3σ. Це твердження називають ***правилом «трьох сигм»*** (ймовірність того що випадкова величина виходить за межи цього інтервалу дорівнює 0,0027).

Однак на практиці це твердження часто веде до трагічних наслідків (до Чорнобильської катастрофи вважалось, що ймовірність такої події не перевищує10^{-6}), по-перше, тому, що означена ймовірність не така вже й мала, по друге, тому що відповідність нормальному розподілу рідко перевіряється.

Мода, медіана та математичне сподівання для нормального розподілу співпадають. За параметрами нормального розподілу обчислюються і всі числові характеристики:

$$M(X) = m_x = a, \quad D(X) = \sigma^2.$$

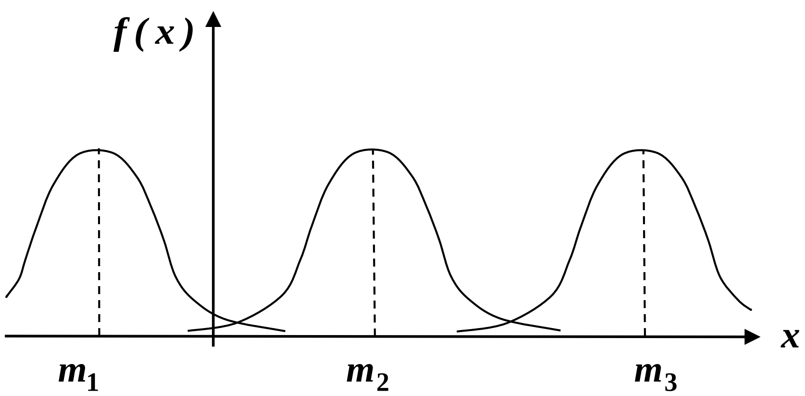


Рис.7.5.

Як видно з рис.7.5, при зміні значення $m_x = a$ графік функції ***f(x)*** «жорстко» переміщується вздовж осі ***x*** **.**

При зміні значення σ змінюється загальний вигляд графіка: при збільшенні значення σ у k раз максимальне значення функції зменшується в k раз і графік «витягається» в обидва боки вздовж осі x.

При зменшенні значення σ все відбувається в зворотному напрямку (див. рис. 7.6).

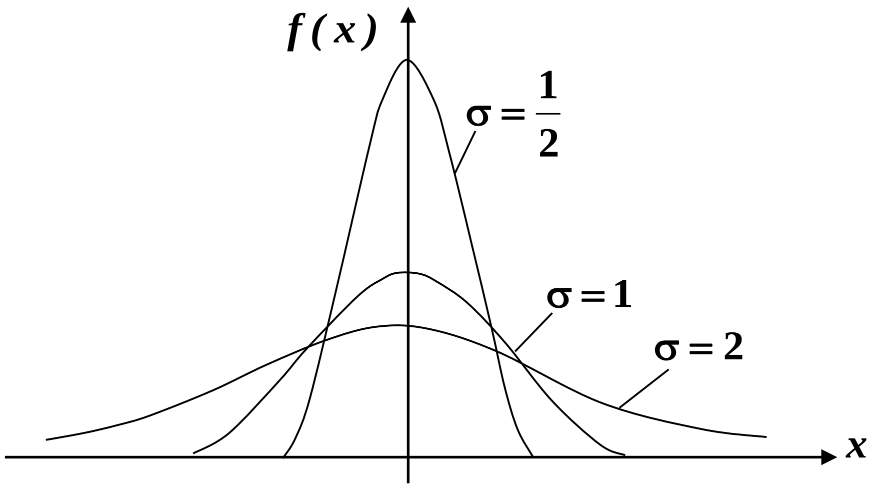


Рис.7.6.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X приймає значення в інтервалах $(-\infty;\alpha)$, $(\alpha:\beta)$, $(\beta;+\infty)$, обчислюють за формулами:

$$P(x \le \alpha) = \Phi(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}),$$

$$\boldsymbol{P(\alpha \le x \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right),}$$

$$\boldsymbol{P(x \ge \beta) = 1 - \Phi(\frac{\beta - m_x}{\sigma})},$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

називається функцією Лапласа. Ця функція визначена для $x \geq 0$ та табульована (див. табл.2 додатку), для $x<0$ вона визначається:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Введемо нормовану змінну з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією:

$$z_\beta = \frac{(\beta - m_x)}{\sigma}; \quad z_\alpha = \frac{\alpha - m_x}{\sigma} ,$$

Тоді $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi(z_\beta) - \Phi(z_\alpha)$.

Нормальний закон розподілу повністю визначається своїм математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням: $N(m_x;\sigma)$.

Нормованим називається нормальний розподіл **N(0;1)** з параметрами $m_x = 0, \ \sigma = 1.$

Повернутись до плану.

Приклад 7.3.

Випадкова величина має нормальний розподіл з $\boldsymbol{m_x = 2}$ і $\boldsymbol{\sigma = 0{,}5}$. Знайти:
1) модальне значення та відповідне значення щільності розподілу,

2) ймовірність того, що ця випадкова величина належить інтервалу (1; 2,5),

3) ймовірність того, що випадкова величина менша за 1, ймовірність того, що випадкова величина більша за 3.

Розв'язання:

1) Щільність розподілу ймовірностей:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 0{,}25}}, \qquad \max f(x) = f(2) = \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} = 0{,}8}.$$

Тобто модальне значення дорівнює математичному сподіванню.

Графік розподілу ймовірностей має вигляд (рис. 7.7):

2) При $\boldsymbol{\alpha = 1}$ маємо $\boldsymbol{z_\alpha = \frac{1-2}{0{,}5} = -2}$,

$$\boldsymbol{\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 \approx 0{,}0228}$$

з таблиці функції Лапласа,

при $\boldsymbol{\beta = 2{,}5}$ маємо $\boldsymbol{z_\beta = \frac{2{,}5-2}{0{,}5} = 1}$,

$\boldsymbol{\Phi(1) = 0{,}8413}$ з таблиці функції Лапласа.

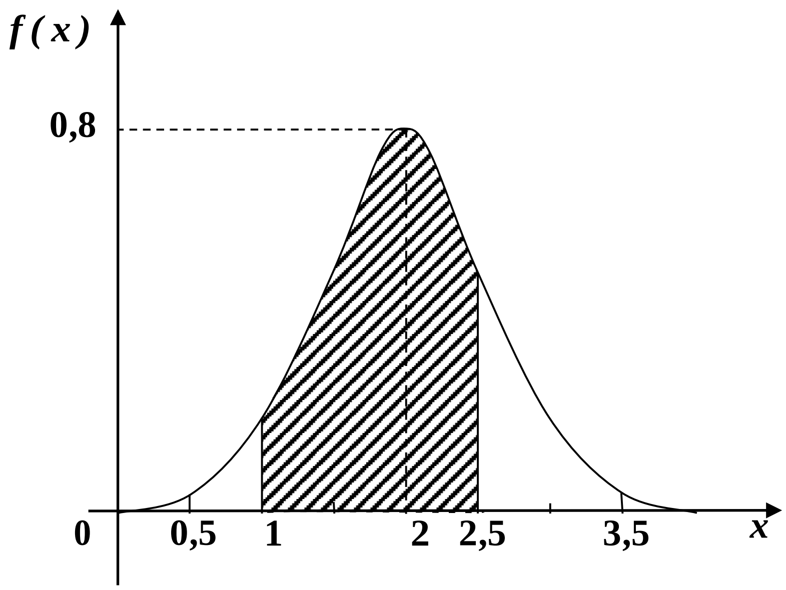


Рис. 7.7.

Звідки $P\ (1 < X < 2{,}5) = 0{,}8414 - 0{,}0228 = 0{,}8186$, чому дорівнює заштрихована площа на графіку $f(x)$ (рис. 7.7).

3) Знайдемо нормовану змінну для ***x=1:***

$$z_1 = \frac{1-2}{0{,}5} = -2,$$

p(x<1)=Φ(-2)=0,0228.

Знайдемо нормовану змінну для **x=3**:

$$z_1 = \frac{3-2}{0{,}5} = 2,$$

p(x>3)=1-Ф(2)=0,0228.

Приклад 7.4.

Урожайність зернових вимірюється в центнерах з гектару та має нормальний розподіл $\boldsymbol{N(30;7)}$. Рентабельність складає 30% для урожайності в межах 25 – 40 ц/га, та 10% в інших випадках. Знайти очікувану рентабельність та її середньоквадратичне відхилення.

Розв'язання:

Позначимо урожайність y (ц/га).

Знайдемо ймовірність знаходження урожайності в межах (25;40). Знайдемо нормовані змінні:

$$\boldsymbol{x_1 = (25 - 30)/7 = -0{,}71;\ x_2 = (40 - 30)/7 = 1{,}43}.$$

Тоді

$$\boldsymbol{p(25 < y < 40) = \Phi(1{,}43) - \Phi(-0{,}71) = \Phi(1{,}43) + \Phi(0{,}71) - 1 = 0{,}682};$$

Ймовірність протилежної події дорівнює 0,318. Очікувана рентабельність:

$\overline{\rho} = 30\% \cdot 0{,}682 + 10\% \cdot 0{,}318 = 23{,}64\%$

$\sigma_{\rho}^{2} = 30^{2} \cdot 0{,}682 + 10^{2} \cdot 0{,}318 - 23{,}64^{2} = 86{,}75$

$\sigma_{\rho} = 9{,}31\%$

Повернутись до плану.

Завдання

1. Випадкова величина задана функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & при\; 0 < x \le \pi, \\ 1 & при \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу *f(x)* та побудувати графік.

2. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x^{2} & при\; 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу *f(x)* та побудувати графік.

3. НВВ Х задана щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\cos x & при -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0 & при \quad x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Визначити ймовірність того, що в результаті випробування НВВ Х набуде значення з інтервалу $(0;\frac{\pi}{4})$

4. НВВ Х задана щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1,\\ \ln x & при \; 1<x\le e,\\ 0 & при \quad x>e.\end{cases}$$

Визначити ймовірність того, що НВВ набуде значення з інтервалу (1;2).

5.Задано щільність розподілу ймовірностей НВВ Х:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1,\\ Cx-\frac{1}{2} & при \; 1<x\le 2,\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Знайти: 1) сталий параметр С; 2) функцію розподілу НВВ Х.

6. Задано щільність розподілу ймовірностей

$f(\mathrm{x})=\frac{C}{1+x^2}$,

причому $-\infty<x<\infty$.

Визначити: 1) сталий параметр С;

2) ймовірністьпопадання цієї випадкової величини в інтервал (-1;1);

3) функцію розподілу цієї випадкової величини.

7. НВВ X задано щільністю розподілу f(x)=1/3 в інтервалі (2;5), ззовні цього інтервалу f(x)=0. Знайти числові характеристики НВВ X.

8.Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, заданої функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 3, \\ \frac{1}{\pi}(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}) & при -3 < x \le 3, \\ 1 & при \quad x > 3. \end{cases}$$

9. Знайти математичне сподівання та дисперсію НВВ X, якщо її щільність розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при -\infty < x < 1, \\ \frac{3}{x^4} & при \ 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

10. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при -\infty < x < x_0, \\ 1-\frac{x_0^3}{x^2} & при \ x_0 \le x < \infty. \end{cases}$$

Знайти числові характеристики X.

Вказівка. Знайти спочатку щільність розподілу.

11. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<3, \\ \dfrac{x+3}{8} & \text{при} -3 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Знайти: 1) функцію розподілу F(x); 2) числові характеристики M(X), D(X); 3) ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу (1/2; 2).

12. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ k\cos x & \text{при} -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти: 1) сталу k; 2) числові характеристики M(X), D(X).

Повернутись до плану.