Тема 7. ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ
СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ
МАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

План

Існує дуже багато технічних, економічних, інформаційних, фізичних, біологічних задач, що потребують дослідження процесів, які змінюються з часом і при цьому мають випадковий характер. Прикладом може бути процес радіоактивного розпаду, процес надходження заявок на станцію швидкої допомоги, електрокардіографічний сигнал, процес зміни навантаження електростанції протягом доби та ін. Подібні явища вивчаються методами теорії випадкових (імовірнісних, стохастичних) процесів.

Теорія випадкових процесів виділилася з теорії ймовірності, тому умовою успішного вивчення цієї теми студентами є глибокі знання із загального курсу теорії ймовірності, особливо є сенс звернути увагу на такі питання як аксіоми теорії ймовірності та основні визначення, побудова імовірнісних просторів, поняття умовної ймовірності та незалежності.

1.Потоки випадкових подій

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Наприклад, потік заявок, що надходить до підприємства побутового обслуговування, потік викликів до телефонної станції, потік відказів (збоїв) під час роботи на ПЕОМ тощо.

Середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу, називається ***інтенсивністю потоку***.

Потік називається ***найпростішим***, якщо він має такі властивості:

1) ***стаціонарність*** – імовірність того, що за деякий проміжок часу t відбудеться та чи інша кількість подій, залежить лише від довжини проміжку і не залежить від початку його відліку, тобто інтенсивність потоку стала;

2) ***відсутність післядії*** – імовірність настання деякої кількості подій на довільному проміжку часу не залежить від того, яка кількість подій відбулась до початку цього проміжку;

3) ***ординарність*** – імовірність настання двох і більше подій за малий проміжок часу t істотно менша за ймовірність того, що відбудеться одна подія.

Повернутись до плану.

2. Випадкові процеси у широкому розумінні

Випадковим процесом називається сім'я випадкових величин $\{x(t), t \in T\}$, де Т – деяка множина значень параметра. Параметр t найчастіше інтерпретують як час.

Якщо параметр t приймає дискретні значення, то $x(t)$ – процес з дискретним часом; якщо t змінюється на деякому інтервалі, то

$x(t)$– процес з неперервним часом.

Стани у фіксований момент часу, по суті, являють собою стани (повну групу подій), в яких може знаходитися система в цей момент. Кількість станів може бути скінченною та нескінченною. Так, розподіл Пуассона

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)}{n!}\cdot, \qquad n = 0,1,2,...\infty$$

є випадковим процесом із нескінченною кількістю станів. Випадкова величина n являє собою кількість подій на інтервалі (0;t). Таким чином, стани системи у будь-який момент t задаються випадковою величиною n=0,1,2….

Іншим прикладом може слугувати гра з підкиданням монети n разів. Кожне випробування можна розглядати як деякий момент часу. Отримана послідовність випробувань утворює випадковий процес. Станом системи при будь-якому випробуванні є або герб, або решка.

Повернутись до плану.

3.Класифікація випадкових процесів

Будь-яка класифікація має, як правило, довільний характер. Тому треба виходити з визначених принципів, що вказують хоча б «напрямок», у якому ведеться класифікація. Існуюча класифікація в теорії випадкових процесів полягає у виділенні з усієї сукупності випадкових процесів деяких класів, що допускають більш або менш конструктивний опис.

Можна виділити такі широкі класи процесів:

1) процеси з незалежними приростами;
2) марковські процеси;
3) гаусові процеси;
4) стаціонарні процеси.

Гаусові випадкові процеси потребують, щоб випадкові величини, які їх утворюють, підкорялися нормальному закону розподілу. Той факт, що гаусові випадкові процеси відіграють важливу роль у практичних задачах, часто можна пояснити таким чином.

За широких умов сума великої кількості незалежних та малих за величиною випадкових функцій наближено є гаусовою випадковою функцією, незалежно від теоретико-ймовірнісної природи окремих доданків.

Це так звана теорема про нормальну кореляцію, що є багатомірним узагальненням центральної граничної теореми.

Випадковий процес$\{x(t), t \in T\}$, де T – скінченний або нескінченний відрізок, називається процесом з незалежними приростами, якщо для будь-яких n, $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$,
Випадкові вектори $x(0), x(t_1) - x(0), \ldots, x(t_n) - x(t_{n-1})$ взаємно-незалежні.

Саме з вивчення процесів з незалежними приростами виникла теорія випадкових процесів. Спочатку вивчався вінеровський процес (або процес броунівського руху), а потім і більш загальні процеси з незалежними приростами. Якщо спостерігати у мікроскоп з дуже великим збільшенням маленьку крупинку колоїдного розміру, що занурена у рідину, то виявляється, що така часточка знаходиться у постійному русі і її шлях являє собою дуже складну ламану лінію з хаотично напрямленими ланками.

У першому наближенні можна вважати, що зміщення часточки під впливом зіткнень з молекулами середовища незалежні між собою, та розглядати броунівський рух як процес з незалежними приростами. Оскільки окреме зміщення мале, то можна вважати, що до їхньої суми застосовується центральна гранична теорема теорії ймовірності, а броунівський рух розглядати як гаусів процес.

Марковський процес (або «процес без післядії») є випадковим процесом, що має таку властивість: для кожного моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи у майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану у теперішньому часі (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли та яким чином система прийшла у цей стан (тобто, як розвивався процес у минулому).

Марковські процеси набули дуже широкого застосування у кібернетиці (особливо, в теорії інформації). Оскільки конспект лекцій призначено для студентів спеціальності «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерна інженерія», то саме на цьому класі випадкових процесів буде зроблено акцент.

Випадковий процес$\{x(t), t \in T\}$, де Т – скінченний або нескінченний відрізок, називається стаціонарним, якщо для будь-якого n та будь-яких $t_{1}, t_{2}, \dots, t_n$ таких, що $t + t_k \in T$ $(k = 1, \dots, n)$, сумісний розподіл випадкових векторів $x(t_1 + t), \dots, x(t_n + t)$ не залежить від t. Іншими словами, стаціонарні процеси – це процеси, які відбуваються в умовах, що є незмінними з плином часу.

Повернутись до плану.

4.Пуассоновські потоки подій. Формула Пуассона

Імовірність того, що за проміжок часу $t+\Delta t$ не відбудеться жодна подія, подається у вигляді :

$$\begin{gathered} P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t+O(\Delta t))\to \\ \to P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-\lambda\,\Delta t\,P_0(t)+O(\Delta t)P_0(t). \end{gathered} \tag{7.1.}$$

Імовірність того, що за цей самий проміжок часу здійсниться m подій, визначається так:

$$\begin{gathered} P_m(t+\Delta t)= \\ =P_m(t)\,P_0(\Delta t)+P_{m-1}(t)P_1(\Delta t)+\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)P_i(\Delta t)\to \\ \to P_m(t+\Delta t)=P_m(t)(1-\lambda\Delta t+O(\Delta t))+ \\ +P_{m-1}(t)(\lambda\,\Delta t+O(\Delta t))+\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)P_i(\Delta t), \\ \text{якщо}\quad m>1; \\ P_m(t+\Delta t)= \\ =P_m(t)-\lambda\,\Delta tP_m(t)+O(\Delta t)P_m(t)+\lambda\,\Delta t\,P_{m-1}(t)+ \\ +O(\Delta t)\,P_{m-1}(t)+\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)P_i(\Delta t)\to \\ \to P_m(t+\Delta t)=P_m(t)-\lambda\,\Delta t\,P_m(t)+\lambda\,\Delta tP_{m-1}(t)+O(\Delta t) \end{gathered} \tag{7.2}$$

оскільки

$$O(\Delta t)P_m(t)+O(\Delta t)P_{m-1}(t)+\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)\,P_1(\Delta t)=O(\Delta t).$$

Перенісши $P_0(t)$ і $P_m(t)$ в рівняннях (7.1), (7.2) у ліву частину, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-\lambda\Delta t P_0(t)+O(\Delta t)P_0(t)\,;} \\ &\boldsymbol{P_m(t+\Delta t)-P_m(t)=-\lambda\,\Delta t P_m(t)+\lambda\,\Delta t P_{m-1}(t)+O(\Delta t).} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Поділимо ліву і праву частини системи рівнянь (13.3) на Δt і виконаємо граничний перехід при $\Delta t \to 0$. У результаті дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P_0'(t)=-\lambda\,P_0(t)}\,; \\ &\boldsymbol{P_m'(t)=-\lambda\,P_m(t)+\lambda\,P_{m-1}(t)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Для розв’язування системи (4) використаємо твірну функцію

$$\boldsymbol{A(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m P_m(t)=P_0(t)+xP_1(t)+x^2P_2(t)+\ldots+x^kP_k(t)+\ldots} \quad (7.5)$$

Розглянемо властивості функції $A(x, t)$.

При $x = 1$ $A(1, t) = 1$.

При $x = 0$ $A(0, t) = p_0(t)$, $A(x, 0) = p_0(0) = 1$,

$$\boldsymbol{A^{(m)}(0,t)=m!\,;\quad P_m(t)\to P_m(t)=\frac{A^{(m)}(0,t)}{m!}}. \quad (7.6)$$

Помножимо друге рівняння системи (13.4) на x^m і підсумуємо ліву та праву частини рівняння:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m'(t)=\lambda x\sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m(t)+\lambda\sum_{m=0}^{\infty} x^m\, P_m(t).$$

або з урахуванням (13.5)

$$A'(x,t)=\lambda(x-1)\,A(x,t). \quad (7.7)$$

Розв’язавши диференціальне рівняння, дістанемо:

$$\frac{dA(x,t)}{dt}=\lambda(x-1)\,A(x,t)\to\frac{dA(x,t)}{A(x,t)}=\lambda(x-1)dt\to$$

$$\to\int_0^t\frac{dA(x,t)}{A(x,t)}=\lambda(x-1)\int_0^t dt\to$$

$$\to\ln A(x,t)\,|_0^t=\lambda(x-1)t\,|_0^t\to$$

$$\to\ln A(x,t)-\ln A(x,0)=\lambda(x-1)t\to$$

$$\to A(x,t)=e^{\lambda(x-1)t}\quad,\qquad(7.8)$$

оскільки $A(x,\ 0) = p_0\ (0) = 1$.

Згідно з властивістю $A(x,\ t)$ маємо:

$$P_0(t)=A(0,t)=e^{-\lambda t}\ ;$$

$$P_m(t)=\left.\frac{A^{(m)}(x,t)}{dt^m}\right|_{x=0}=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\,e^{-\lambda t}\ .$$

Отже, імовірність того, що за час t відбудеться m випадкових подій, які утворюють найпростіший потік, обчислюється за формулою

$$P_m(t)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ ,\qquad(7.9)$$

де λ – це інтенсивність найпростішого потоку, тобто: середнє число подій, які відбудуться за одиницю часу [с, хв, год.].

Повернутись до плану.

Приклад 7.1.

Автомобілі, що рухаються по шосе в одному напрямку, утворюють найпростіший потік із параметром $\lambda=3c^{-1}$ (тобто, через умовну лінію, яка проведена перпендикулярно до шосе в певному місці, у середньому проїжджає 3 автомобілі за 1 с. Обчислити ймовірність того, що за 2 с через умовну лінію проїде: 1) 4 автомобілі; 2) не більш як 4.

Розв’язання:

Із умови задачі:

$$\lambda = 3\left[\frac{1}{\text{сек.}}\right] \quad \lambda t = 3\left[\frac{1}{\text{сек.}}\right]\ 2\ \text{сек.} = 6.$$

коли $a = \lambda t = 6$ знаходять:

1) $P_4(2) \approx 0{,}133853$;

2) $P_{0\le m\le 4}(2) = P_0(2) + P_1`(2) + P_2(2) + P_3(2) + P_4(2) =$
$= 0{,}002479 + 0{,}014873 + 0{,}044618 + 0{,}089235 + 0{,}133853 = 0{,}285058.$

Повернутись до плану.

5.Марковські процеси

Прикладом марковського процесу може бути відома дитяча гра, у якій фішки учасників повинні переміститися з початкового пункту A_0 ("старт") у кінцевий A_k ("фініш"). Потрапивши в той або інший проміжний пункт A_j, фішка може або наблизитися до фінішу (за рахунок "пільги", передбаченої умовами гри), або видалитися від нього (за рахунок "штрафу").

Число кроків, на яке фішка переміщається із займаного нею пункту A_i у пункт A_j, визначається числом очків, що випали на кинутій гральній кості. Тому імовірність того, що фішка з пункту A_i переміститься в A_j, не залежить від того, яким шляхом фішка виявилася в позиції A_i, а визначається лише ймовірністю P_{ij} випадання відповідного числа очків на грані кості. Виникає ситуація, у точності характерна для марковского процесу з кінцевою безліччю станів A_0, A_1,…, A_i,..., A_j,..., A_k і дискретним часом. Рахунок моментів переходів з одного стану в інший заміняється рахунком числа самих переходів.

Позиції $A_i, (i = 0, \dots k)$ асоціюються зі станами системи S гри. Тоді карту гри з зображеними на ній позиціями й ймовірностями переходів з кожної позиції у наступні можна вважати графом відповідного ланцюга.

Важливу роль у багатьох задачах відіграють так звані марковські випадкові процеси. У таких процесах "майбутнє залежить від минулого тільки через сьогодення".

Повернутись до плану.

6.Марковський випадковий процес з дискретними станами

Випадковий процес називається процесом з дискретними станами, якщо можливі стани системи A_1, $A_{2,\dots}$ можна перерахувати (пронумерувати) один за одним, а сам процес полягає у тому, що час від часу система стрибком (миттєво) переходить з одного стану в інший.

Для аналізу випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – графом станів. Кожний стан будемо зображати вершинами, а можливі переходи з одного стану в інший – орієнтованими дугами, що з'єднують ці вершини. Можливість системи залишитися у наступний момент часу в тому ж самому стані зображується петлею, що виходить і входить в одну й ту ж саму вершину.

Приклад.7.2. Система – комп'ютер, що може знаходитися в одному з можливих станів:

A_1 – комп'ютер працює; A_2 – комп'ютер вийшов з ладу, чекає на тестування; A_3 – тестування комп'ютера; A_4 – ремонт комп'ютера;

A_5 – списання комп'ютера.

Графічна модель функціонування системи зображена на рис. 7.1.

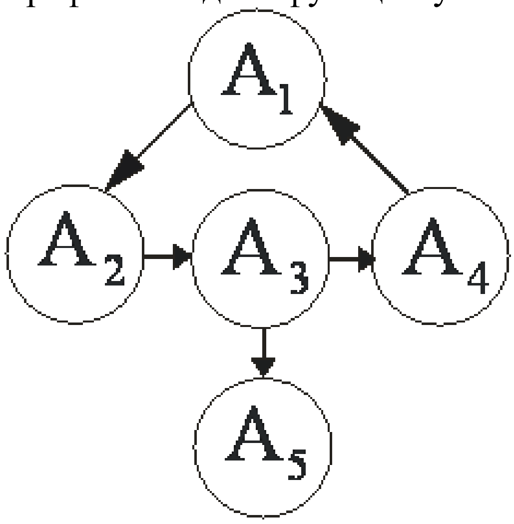

Рис.7. 1. Графічна модель функціонування системи

Повернутись до плану.

7.Марковський випадковий процес з дискретним часом

Нехай маємо систему, що може знаходитися у станах $A_1, A_2, \dots, A_n$ при цьому переходи системи із стану в стан можливі тільки у моменти $t_1, t_2, \dots$ Будемо називати ці моменти кроками, а процес, що відбувається у системі, розглядатимемо як функцію цілочислового аргументу (номера кроку).

Умовимося позначати через A_i^k подію, яка полягає у тому, що система за k кроків опинилася у стані A_i. За будь-якого k подіїA_1^k, A_2^k, ..., A_n^k утворюють повну групу подій.

Позначимо ймовірності цих подій через p_i^k:

$$p_1^k = P(A_1^k),\ p_2^k = P(A_2^k), \dots, p_n^k = P(A_{1n}^k)$$

Тоді події утворюють повну групу і для них виконується рівність:

$$p_1^k + p_2^k + \dots + p_n^k = 1$$

Ці ймовірності називаються абсолютними ймовірностями станів.

Для будь-якого кроку існують ймовірності переходу системи з будь-якого стану у будь-який інший стан за один крок, а також ймовірності затримки системи у даному стані. Такі ймовірності називаються перехідними і задаються матрицею:

$$,P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots & p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

де p_{ij} – ймовірність переходу системи зі стану i у стан j, а сама матриця називається стохастичною.

Деякі з перехідних ймовірностей можуть дорівнювати нулю (це означає, що перехід системи за один крок із стану i у стан j неможливий), на головній діагоналі розташовані ймовірності затримки системи у тому ж стані на наступному кроці.

Матриця перехідних ймовірностей Р разом з вихідними ймовірностями $\{p_j^0\}$ $(j = 1,2, \ldots, n)$ повністю задає марковський ланцюг.

Марковський ланцюг називається однорідним, якщо перехідні ймовірності не залежать від номера кроку, у протилежному випадку марковський ланцюг називається неоднорідним.

Розглянемо однорідний марковський ланцюг.

Нехай $\{p_j^k\}$ – абсолютні ймовірності станів системи після k переходів, тобто, в момент tk. Величини $\{p_j^k\}$ можна виразити через $\{p_j^0\}$ та Р, використовуючи формулу повної ймовірності:

$$p_j^1 = p_1^0\, p_{1j} + p_2^0\, p_{2j} + p_3^0\, p_{3j} \ldots + p_m^0\, p_{mj} = \sum_{i=1}^{m} p_i^0\, p_{ij}$$

$$p_j^2 = \sum_{i=1}^{m} p_i^1\, p_{ij}$$, тобто

$$p_j^2 = \sum_{i=1}^{m} p_i^1\, p_{ij} = \sum_i \left(\sum_m p_m^0\, p_{mi} \right) p_{ij} = \sum_m p_m^0 \left(\sum_i p_{mi}\, p_{ij} \right) = \sum_m p_m^0\, p_{mj}^2$$

$$p_j^k = \sum_i p_i^0 \left(\sum_m p_{im}^{k-1}\, p_{mj} \right) = \sum_i p_i^0\, p_{ij}^k \qquad (7.10)$$

де p_{ij}^{k} $- k$ - крокова перехідна ймовірність (ймовірність переходу системи з стану i у стан j за k кроків.

У загальному вигляді для всіх i та j:

$$p_{ij}^{k} = \sum_{k} p_{ik}^{k-l}\, p_{ij}^{l}\ , \quad 0 < l < k$$

Ці рівняння відомі як рівняння Колмогорова-Чепмена.

Матриці переходів вищих порядків мають вигляд:

$$\left\| p_{ij}^{2} \right\| = \left\| p_{ij} \right\| \cdot \left\| p_{ij} \right\| = p^{2}$$
$$\left\| p_{ij}^{3} \right\| = \left\| p_{ij}^{2} \right\| \cdot \left\| p_{ij} \right\| = p^{3}$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\left\| p_{ij}^{k} \right\| = \left\| p_{ij}^{k-1} \right\| \cdot \left\| p_{ij} \right\| = p^{k}$$

Тобто, якщо абсолютні ймовірності визначені у векторній формі

$$p^{(k)} = \left\{ p_{1}^{k}, p_{2}^{k}, \dots, p_{n}^{k} \right\}, \text{ то}$$

$$p^{(k)} = p^{(0)}\, p^{(k)}.$$

Приклад.7.3. Розглянемо марковський ланцюг з двома станами:

$$p(0) = (0{,}7 \quad 0{,}3), \qquad P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Визначимо p(1), p(4), p(8).

$$P^{2} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix}$$

$$P^{4} = P^{2}P^{2} = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \\ 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix},$$

$$P^{8} = P^{4}P^{4} = \begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} = \qquad = \begin{pmatrix} 0{,}4281 & 0{,}5719 \\ 0{,}4274 & 0{,}5726 \end{pmatrix},$$

Таким чином,

$$p(1) = (0{,}7 \quad 0{,}3) \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}32 \quad 0{,}68) \qquad ,$$

$$p(4) = (0{,}7 \quad 0{,}3)\begin{pmatrix} 0{,}443 & 0{,}557 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix} = (0{,}7435 \quad 0{,}5665) \quad ,$$

$$p(8) = (0{,}7 \quad 0{,}3)\begin{pmatrix} 0{,}4281 & 0{,}5719 \\ 0{,}4274 & 0{,}5726 \end{pmatrix} = (0{,}4279 \quad 0{,}5721)$$

Цікаво відмітити, що рядки матриці P^8 несуттєво відрізняються один від одного. Окрім цього, вектор p(8) також несуттєво відрізняється від кожного рядка матриці P^8. Цей результат пов'язаний з довгостроковими властивостями марковських ланцюгів, згідно з якими довгострокові абсолютні ймовірності не залежать від p(0). Такі ймовірності називаються сталими.

Дамо ще кілька визначень.

Марковський ланцюг називається незвідним, якщо будь-який стан A_j може бути досягнутим із будь-якого іншого стану A_i за скінченну кількість переходів, тобто при $i \neq j$:

p_{ij} (k)>0.

У цьому випадку всі стани ланцюга називаються сполученими.

Множина С станів у марковському ланцюгу називається замкненою, якщо система, колись опинившись в одному зі станів цієї множини, буде знаходитися у множині С протягом нескінченного інтервалу часу. Частковим випадком замкненої множини є єдиний стан A_j з перехідною ймовірністю p_{ij} = 1. У цьому випадку стан A_j називається поглинаючим. Всі стани незвідного ланцюга мають утворювати замкнену множину та жодна інша підмножина не може бути замкненою.

Розглянемо тепер загальний випадок – неоднорідний марковський ланцюг, для якого ймовірності переходу p_{ij} змінюються з кожним кроком. Позначимо через $p_{ij}\ (k)$ ймовірність переходу системи зі стану *i* у стан *j* на *k*-му кроці. Якщо задані матриці ймовірностей переходів на кожному кроці *P(k),* тоді ймовірність, що система за *k* кроків опиниться у стані A_j, обчислюється за формулою:

$$p_j^k = \sum_i p_i^{k-1} p_{ij}^{(k)} \qquad (7.11.)$$

яка відрізняється від аналогічної формули (7.10.) для однорідного ланцюга Маркова тільки тим, що у ній фігурують перехідні ймовірності, які залежать від номера кроку. Обчислення за формулою (7.11.) не є складнішими за випадок з однорідним ланцюгом (тільки на кожному кроці використовується інша стохастична матриця).

Повернутись до плану.

Приклад 7.4.

Система θ– лічильник у таксі. Стан системи в момент *t* характеризується кількістю кілометрів, пройдених автомобілем до даного моменту. Нехай у момент t_0 лічильник показує S_0. Ймовірність того, що в момент $t > t_0$ лічильник показуватиме ту чи іншу кількість кілометрів S_1, .залежить від S_0.але не залежить від того, в які моменти часу змінювались покази лічильника до моменту t_0

Деякі процеси можна наближено вважати марковськими.

Приклад 7.5.

Система θ – група шахістів. Стан системи характеризується кількістю фігур супротивника, що збереглися на дошці до моменту t_0. Ймовірність того, що в момент $t > t_0$ матеріальна перевага буде на боці одного із супротивників, залежить насамперед від того, в якому стані перебуває система в даний момент t_0, а не від того, коли і в якій послідовності зникали фігури з дошки до моменту t_0

Аналізуючи випадкові процеси з дискретними станами, зручно користуватися геометричною схемою – так званим ***графом станів***. Зазвичай стани системи зображають прямокутниками (кружечками), а можливі переходи від одного стану до іншого – стрілками, що сполучають стани.

Приклад 7.6.

Побудувати граф станів такого випадкового процесу: пристрій θ утворено із двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом зарані не відомого випадкового часу.

Розв'язання: Можливі стани системи: θ_0 – обидва вузли справні; θ_1 – перший вузол ремонтується, а другий справний; θ_2 – другий вузол ремонтується, а перший справний; θ_3 – обидва вузли ремонтуються.

Граф системи наведено на рис7. 2

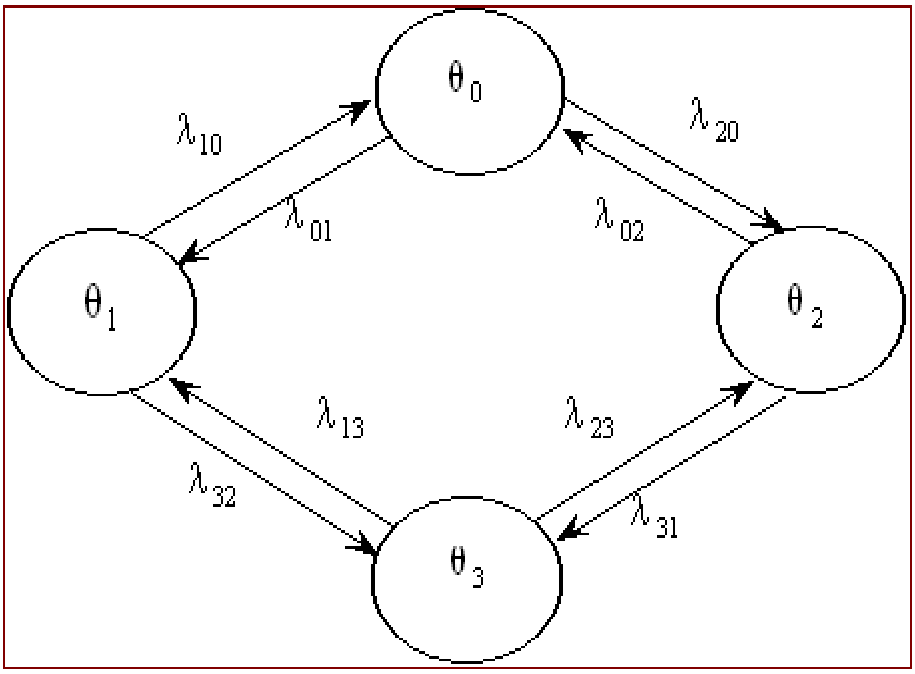

Рис.7.2. Граф системи

Стрілка, напрямлена із θ_0 до θ_1 означає перехід системи в момент відказу першого вузла; стрілка із θ_1 до θ_0 – перехід у момент закінчення ремонту цього вузла. Стрілки із θ_0 до θ_3 немає, оскільки припускається, що вузли виходять із ладу незалежно один від одного.

Вивчаючи марковські процеси, часто з метою наочного висвітлення цього питання розглядають певну економічну або будь-яку іншу систему *A*, котра в кожний фіксований момент часу $t = t_i$ може перебувати в одному з несумісних станів $\omega_i = \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \ldots$, причому перехід цієї системи з одного стану ω_i до іншого ω_j може відбуватися в моменти часу $t = t_1, t_2, \ldots\ t_k, \ldots$.

Нехай випадковий перехід системи *A* із одного стану в будь-який можливий інший здійснюється лише в певні моменти часу $t = t_1, t_2, \ldots\ t_k, \ldots$, які називають ***кроками процесу***. Такі процеси називаються ***марковськими з дискретними станами і дискретним часом***. Множину всіх можливих станів системи, в яких може перебувати марковський процес, називають ***простором станів процесу*** і позначають Ω. Символами $\omega_i \in \Omega$ позначають ***конкретні стани*** процесу.

Запис $\omega_i \to \omega_j$ означає ***перехід процесу із i-го стану до j-го***. Простір станів Ω може бути обмеженим і необмеженим. Далі розглядатимемо марковські процеси з обмеженою кількістю станів простору Ω.

Приклад 7.7.

Футбольна команда готується до чергового матчу, результатом якого можуть бути з певною ймовірністю лише три несумісні стани (події): команда виграє – стан ω_1; нічийний результат матчу – стан ω_2; команда програє матч – стан ω_3. Отже, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Перелічені стани є несумісними, і перехід команди в кожний із цих станів може здійснюватися з певною ймовірністю. Розглядаючи команду як систему, можна стверджувати, що в ній відбувається марковський процес із дискретними станами та дискретним часом переходу з одного стану до іншого за один крок (за один матч).

Приклад 7.8.

Фермер купив трактор. У процесі роботи його в господарстві трактор може з певною ймовірністю перебувати в одному з несумісних станів: ω_1 – працездатному ω_2 – непрацездатному. Перехід із одного стану до іншого може відбуватися в дискретні моменти часу.

Отже, випадковий процес, який маємо в системі (тракторі), буде марковським процесом із дискретними станами та дискретним часом. Простір станів $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Повернутись до плану.

ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

1. Дайте визначення випадкового процесу.
2. Вкажіть основні класи випадкових процесів.
3. Що таке марковський процес з дискретними станами?
4. Дайте визначення марковського ланцюга.
5. Який марковський ланцюг називається незвідним?
6. Яка множина у марковському ланцюзі називається замкненою?
7. Наведіть основні ознаки кожного з класів випадкових процесів.

Повернутись до плану.