Тема 9. Статистичні гіпотези та їх перевірка

План.

1. Статистичні гіпотези. Нульова та конкуруюча гіпотези. Проста та складна гіпотези

2. Помилки першого та другого роду

3. Статистичні критерії перевірки нульових гіпотез. Значення критерію спостереження

4. Критична область. Область прийняття гіпотези. Критичні точки

5. Потужність критерію

6. Порівняння дисперсій двох генеральних сукупностей, розподілених за нормальним законом розподілу

7. Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом розподілу

1. Статистичні гіпотези. Нульова та конкуруюча гіпотези. Проста та складна гіпотези

Гіпотеза – це деяке припущення.

Статистичною гіпотезою називають гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомого закону розподілу генеральної сукупності.

Нульовою гіпотезою (основною) називають висунуту гіпотезу, яка про щось стверджує. Позначають H_0.

Гіпотезу, що суперечить висунутій гіпотезі, називають *конкуруючою або альтернативною.* Позначають ***H***..

Якщо буде відкинута нульова гіпотеза, то буде прийнята конкуруюча їй.

Приклад запису гіпотез:

H_0: a=5; ***H1:*** $a \neq 5$. Це означає: висунуто нульову гіпотезу, яка полягає в тому, що параметр а нормального закону генеральної сукупності дорівнює «5». Висунуто конкуруючу гіпотезу, яка полягає в тому , що параметр а не дорівнює «5».

Проста гіпотеза містить лише одне припущення, *складна* декілька відразу тобто складається з декількох простих.

Повернутися до плану

2. Помилки першого та другого роду

Прийняти або відкинути гіпотезу можна двома шляхами::

1) гіпотезу приймають, і вона дійсно справедлива;

2) гіпотезу відкидають, при цім вона дійсно неправильна.

Статистичні гіпотези перевіряють на правильність, справедливість. У ході перевірки та процесу прийняття рішення можуть виникати помилки.

Помилки можуть бути першого та другого роду.

Помилка першого роду полягає в тому, що відкинута правильна гіпотеза.

Помилка другого роду полягає в тому, що прийнята неправильна гіпотеза.

Ймовірність зробити помилку першого роду позначають символом α і називають рівнем значимості. Зазвичай це числа: 0,10; 0,05; 0,01.

Повернутися до плану

3. Статистичні критерії перевірки нульових гіпотез. Значення критерію спостереження

Статистичним критерієм або просто критерієм називають деяку випадкову величину, позначимо її літерою $\boldsymbol{K}$, яка слугує для перевірки нульової гіпотези.

У часткових випадках критерії перевірки позначають відповідно до випадку, тобто в залежності від того, що перевіряють. Наприклад Т – критерій Стьюдента, А – критерій Фішера-Снедекккора.

Критерієм спостереження ($\boldsymbol{K_{спост}}$) називають значення критерію, обчислене за вибіркою.

Повернутися до плану

4. Критична область. Область прийняття гіпотези. Критичні точки

Критичною областю називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу відкидають.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень –ОДЗ) називають сукупність значень критерію, за яких гіпотезу приймають.

Основний принцип прийняття статистичних гіпотез:

Якщо значення критерію спостереження належить критичній області, то гіпотезу відкидають, якщо значення критерію спостереження належить області прийняття гіпотези, то її приймають.

Критичними точками (границями) k_{kr} називають точки, які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Критичні області бувають *односторонні* і *двохсторонні*.

Односторонні критичні області у свою чергу розрізнять : *правосторонні і лівосторонні*.

$K > k_{kr},\ k_{kr} < 0$ – для лівосторонньої області і $K < k_{kr},\ k_{kr} > 0$ – для правосторонньої критичної області.

[Повернутися до плану]

5. Потужність критерію

Під *потужністю критерію* будемо розуміти ймовірність попадання критерію у критичну область за умови, що справедлива конкуруюча гіпотеза.

Чим більша потужність критерію, тим менша ймовірність зробити помилку другого роду, яка є страшнішою за помилку першого роду. Позначимо: $(1-\beta)$, де β – ймовірність прийняти неправильну гіпотезу.

[Повернутися до плану]

6. Порівняння дисперсій двох генеральних сукупностей, розподілених за нормальним законом розподілу

На практиці це задачі про точність приладів.

Висувається нульова гіпотеза: $H_0 : M(S_x^2) = M(S_y^2)$, тобто $H_0 : D(X) = D(Y)$.

Якщо нульова гіпотеза буде справедлива, то різниця між дисперсіями викликана за рахунок випадковості вибірок.

В якості критерію перевірки беруть відношення більшої виправленої дисперсії до меншої: $F = \dfrac{S_б^2}{S_м^2}$. В якості величини, з якою порівнюється значення статистичного критерію беруть критерій Фішера-Снедеккора зі ступенями свободи (вільності): $k_1 = n_б - n_1$, $k_2 = n_м - n_2$. Критична область будується в залежності від виду конкуруючої гіпотези.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1) $H_1 : D(X) > D(Y)$, тоді будується одностороння (правостороння) критична область, а саме: $P(F > F_{kr}(\alpha; k_x; k_y)) = \alpha$. Значення $\boldsymbol{F}$ знаходять з таблиць Фішера-Снедеккора. Областю прийняття гіпотези будуть значення $F < F_{kr}$.

<u>Приклад 1</u>

Нехай зроблено дві вибірки із генеральних сукупностей. $n_x = 12; n_y = 14$;

$S_x^2 = 12{,}3$;

$S_y^2 = 14$; $\alpha = 0{,}05$.

Розв’язання:

$H_0 : D(X) = D(Y)$;

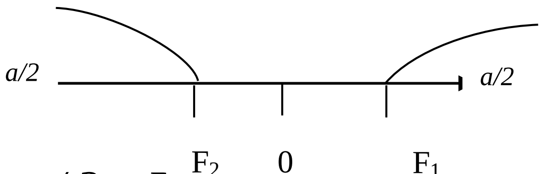
$H_1 : D(X) > D(Y)$.

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2} = \frac{12{,}3}{7{,}4} \approx 1{,}66.$$

З таблиць Фішера маємо $F_{kr}(\alpha; k_x; k_y) = F_{kr}(0{,}05; 11; 13) = 2{,}63$. Як бачимо $F < F_{kr}$, тобто немає підстав відкидати нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Судження зроблені з ймовірністю 0,95.

2) $H_0 : D(X) = D(Y)$ за.конкуруючої гіпотези $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

У цьому випадку будують двохсторонню критичну область



$P(F < F_1) = \alpha / 2$ і $P(F > F_2) = \alpha$ бласть прийняття гіпотези $\boldsymbol{H_0}$ визначається як: $F_1 < F < F_2$.

Область симетрична відносно нуля, тому досить знайти праву критичну точку.

<u>Правило перевірки:</u>

Розраховуємо величину: $F = \frac{S_б^2}{S_м^2}$, за рівнем значимості α знаходимо $\alpha/2$. З таблиць Фішера знаходимо $F_{kr}\left(\alpha/2; n_1 - 1; n_2 - 1\right)$. Порівнюємо:

Якщо $F_{cn} < F_{kr}$ немає причин відкидати нульову гіпотезу; якщо $F_{cn} > F_{kr}$, нульова гіпотеза відкидається.

<u>Приклад 2</u>

Нехай зроблено дві вибірки із генеральних сукупностей. $n_x = 10; n_y = 16$;

$S_x^2 = 1{,}2$;

$S_y^2 = 0{,}4$; $\alpha = 0{,}1$.

Розв’язання:

$H_0 : D(X) = D(Y)$;

$H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

$$F_{cn} = \frac{S_б^2}{S_м^2} = \frac{1{,}2}{0{,}4} = 3{,}0.$$

$$\alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05.$$

З таблиць Фішера маємо $F_{kr}(\alpha; k_x; k_y) = F_{kr}(0{,}05; 9; 15) = 2{,}59$. Як бачимо $F_{cn} > F_{kr}$, тобто є підстави відкинути нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Судження зроблені з ймовірністю 0,9.

Повернутися до плану

7. Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом розподілу

За вибіркою об’єму ***n*** обчислено вибіркову дисперсію $S_в^2$. Відомо, що генеральна (теоретична дисперсія) дорівнює σ^2. Необхідно перевірити гіпотезу про рівність вибіркової і генеральної дисперсій.

Висуваємо нульову гіпотезу $H_0 : M\left(S^2\right) = \sigma_в^2$, тобто перевіримо чи значимо відрізняється виправлена дисперсія, знайдена за вибіркою, від гіпотетичної дисперсії генеральної сукупності.

Критерієм перевірки слугує Хі-квадрат критерій : $\chi^2 = (n-1) \cdot S_в^2 / \sigma_0^2$.

Критична область будується в залежності від конкуруючої гіпотези.

1) $H_1: S_в^2 > \sigma_0^2$.

Тоді $\chi_{cn}^2 = (n-1)\cdot S_в^2 / \sigma_0^2$ і $\chi_{kr}^2(\alpha; k)$ береться х таблиць Пірсона.

Якщо $\chi_{cn}^2 < \chi_{kr}^2$, то немає причин відкидати нульову гіпотезу.

Якщо $\chi_{cn}^2 > \chi_{kr}^2$, то нульова гіпотеза відкидається.

2) $H_1: S_в^2 \neq \sigma_0^2$. Знаходиться лівостороння та правостороння критичні точки інтервалу області допустимих значень. $\chi_{kr\,пр}^2(\alpha/2; k)$ правостороння критична точка та $\chi_{kr\,лів}^2(1-\alpha/2; k)$ лівостороння критична точка. У випадку, якщо $\chi_{лів}^2 < \chi_{cn}^2 < \chi_{пр}^2$ – немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

Якщо $\chi_{cn}^2 > \chi_{пр}^2$ або $\chi_{cn}^2 < \chi_{лів}^2$, то $\boldsymbol{H_0}$ відкидається.

3) $H_1: S_в^2 < \sigma_0^2$

$\chi_{kr}^2(1-\alpha; k)$

Якщо $\chi_{cn}^2 > \chi_{kr}^2$, то нульова гіпотеза не відкидається

Якщо $\chi_{cn}^2 < \chi_{kr}^2$, то нульова гіпотеза відкидається

<u>Приклад 3</u>

$\sigma_0^2=10$; n=12; $S_в^2=14{,}5$; $\alpha=0{,}02$

$H_0: S_в^2 = \sigma_в^2$

$H_1: S_в^2 > \sigma_0^2$

Розв’язання:

$\chi_{cn}^2 = (n-1)\cdot S_в^2 / \sigma_0^2 = 11\cdot 14{,}5/10 = 15{,}95$.

$\chi_{kr}^2(0{,}01; 11) = 24{,}7$

$\chi_{cn}^2 < \chi_{kr}^2$

Немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

<u>Приклад 4</u>

$\sigma_0^2=10$; n=12; $S_в^2=14{,}5$; $\alpha=0{,}02$

$H_0: S_в^2 = \sigma_в^2$

$H_1: S_в^2 \neq \sigma_0^2$

Розв’язання:

$$\chi^2_{cn} = (n-1)\cdot S^2_{в} / \sigma^2_0 = 11\cdot 14{,}5 / 10 = 15{,}95$$

α/2=0,02/2=0,01;   1-α/2 = 0,99.

$$\chi^2_{kr\,лів}(1-\alpha/2; k_{np}) = \chi^2_{kr\,лів}(0{,}99;11) = 3{,}05$$

$$\chi^2_{kr\,np}(\alpha/2; k) = \chi^2_{kr\,np}(0{,}01;11) = 24{,}7$$

$$3{,}05 < \chi^2_{cn} < 24{,}7\,.$$

Відповідь:

Немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Судження зроблені на 2% рівні значимості.

Приклад 5

Примітка

Якщо пораховано $D_в$ (не виправлена дисперсія), то критерій спостереження розраховується за формулою: $\chi^2_{cn} = n\cdot D_в / \sigma^2_0$, або виправляємо дисперсію $S^2_в = \frac{n}{n-1} D_в$.

Якщо $n > 30$, то перевірку гіпотези проводять за інтегральними функціями Лапласа

Повернутися до плану