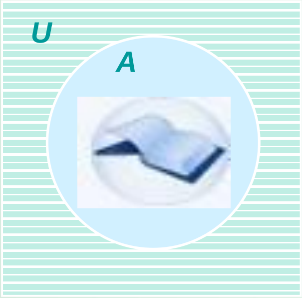
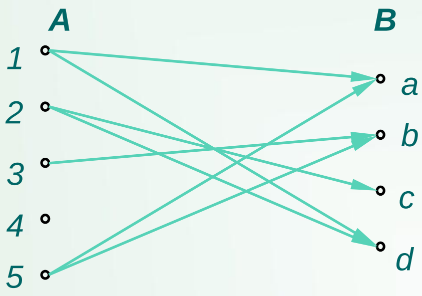
Теорія множин. Відношення.

Лекція 2

$\overline{((A \& (\overline{B})))}$





План

- Поняття множини.
- Операції над множинами.
- Діаграми Венна.
- Булеві алгебри.
- Відношення.
- Частково впорядковані множини.
- Відношення еквівалентності.

ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

Множиною називають деяку, цілком певну сукупність об'єктів або елементів. Це твердження не слід розглядати як строге означення. Скінченні множини можна описувати, перераховуючи їх елементи. Елементи, що належать скінченній множині, домовимося записувати між двома фігурними дужками й розділяти їх комами. Приклади

Очевидно, що перерахування елементів зручно тільки в тому випадку, коли множина елементів мала або довільний елемент характеризується властивістю, що легко описати. Використовуючи цей метод, не так легко описати множину громадян України й зовсім немислимо описати множину дійсних чисел.

Наприклад, {1,2,3,4} є множина, що містить натуральні числа 1, 2, 3 і 4. Множину голосних літер можна представити як {*а*, *о*, *є*, *е*, *і*, *и*}. Як правило, для позначення множин будемо використовувати прописні букви. A = {Борис, Діна, Неллі} є множина, що складається з Бориса, Діни і Ненсі. Множину перших n додатних цілих чисел позначаємо $\{1,2,3,...,n\}$, де точками показане продовження переліку елементів. Це ж позначення можна використати для деяких нескінченних множин. Наприклад, множину додатних цілих чисел можна позначити як {1,2,3,4,...}. Часто при переліку елементів множини використовується опис характеристичної властивості елементів цієї множини. Наприклад, $C=\{1,8,27,..., k^3,...\}$ описує множину кубів усіх додатних чисел, $A=\{1,4,9,... ,n^2\}$ описує множину квадратів всіх додатних чисел, які менші або рівні n.

У загальному випадку множина задається шляхом вказівки характеристичної властивості, тобто властивості, якій задовольняють елементи даної множини, і тільки вони. Для задання звичайно використовуються фігурні дужки, а в них наводиться характеристична властивість, що описує множину. Таким чином, множина $\{x : x$ має властивість $P\}$ містить тільки ті об'єкти, які мають властивість P.Спосіб задання множини повинен бути адекватним, тобто повинен повністю визначати множину. Це не важко, якщо об'єкти множини задані переліком елементів.

Приклади

Розглянемо, однак, множину $A = \{x : x$ - високий студент даної групи$\}$ або $B = \{x : x$ - гарний студент даної групи$\}$. Якщо різним студентам групи запропонувати означити множини A і B, вони можуть зробити це неоднозначно, обираючи елементами як множини A, так і множини B не тих самих людей. При розгляді множини $C = \{x : x$ – приваблива студентка групи$\}$ вибрати елементи множини C не тільки важко - не варто навіть намагатися це зробити. Однак, якщо множина $A = \{x : x$ - студент даної групи, зріст якого вище 180см$\}$ і $B = \{x : x$ - студент даної групи, середній бал якого не нижче 4$\}$, то можна сказати чітко, чи є даний студент елементом A або B.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1. Якщо a - один з об'єктів множини A, то говорять, що a - ***елемент*** множини A, або a ***належить*** A. Приналежність елемента a множині A записується як $a \in A$. Якщо a не є елементом A, це записується як $a \notin A$. Наприклад, $3 \in \{1,2,3,4\}$, але $5 \notin \{1,2,3,4\}$. Якщо P є множина $\{x : x$ був президентом України$\}$, то Леонід Кравчук $\in P$, а Віктор Берман $\notin P$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2. Множина A є ***підмножиною*** множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо кожен елемент A є елемент B; тобто якщо $x \in A$, то $x \in B$. Зокрема, кожна множина є підмножиною самої себе. Якщо A не є підмножиною B, це записується як $A \not\subset B$. Таким чином, $A \not\subset B$, якщо існує елемент A, що не належить B.

Отже, $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, але $\{1, 2, 5\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$. Якщо $A = \{x : x$ - студент спеціальності «математика»$\}$, $B = \{ x : x$ - студент факультету фізики, математики та інформатики$\}$, а $C = \{x : x$ - студент спеціальності «хімія»$\}$, то $A \subseteq B$, але $C \not\subset B$. Множини рівні, якщо вони містять ті самі елементи. Якщо A є множина $\{2, 4, 6\}$, а B є множина $\{x : x$ - додатне парне ціле число, менше $7\}$, тоді A і B - рівні множини. Таким чином, ми приходимо до наступного означення.

ОЗНАЧЕННЯ 2.3. Нехай A і B - деякі множини. Говорять, що A ***дорівнює*** B, і пишуть $A = B$, якщо для будь-якого x маємо: $x \in A$ тоді і тільки тоді, коли $x \in B$. Інакше кажучи, $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то це записують $A \subset B$ і говорять, що A є ***власною підмножиною*** B.

Таким чином, доведення рівності множин *A* і *B* складається з двох етапів:

1) Довести, що *A* є підмножиною *B*.

2) Довести, що *B* є підмножиною *A*.

Оскільки множина однозначно визначається тільки елементами, які вона містить, порядок їх переліку ролі не грає. Наприклад, {1,2,4,6} = ={2,1,6,4}. Крім того, будь-який елемент або належить даній множині, або ні. Кожен елемент може входити в множину не більше одного разу.

Введемо дві нових множини: універсальна множина, або універсум, і порожня множина. У деякому смислі вони являють собою протилежності, оскільки порожня множина не містить елементів, а універсальна множина містить "всі" елементи.

ОЗНАЧЕННЯ 2.4. ***Порожня множина*** (позначається $\varnothing$ або $\{\}$) є множина, що не містить елементів. ***Універсальна множина*** U є така множина, яка містить всі розглянуті множини.

У теорії чисел універсальна множина звичайно збігається із множиною всіх цілих або натуральних чисел. Слід зазначити, що універсальна множина U, хоча й названа універсальною, однозначно не визначена, якщо точно не зазначена область розгляду (предметна область). Звичайно, будь-яка множина, що містить U, може бути використана як універсальна множина. За означенням, кожна множина є підмножиною універсальної множини. Порожня множина є підмножиною будь-якої даної множини A, оскільки кожен елемент порожньої множини належить A. Можна сказати, що не існує елементів порожньої множини, які не належали б A.

Операції над множинами

ОЗНАЧЕННЯ 2.5. ***Перетином*** множин A і B називається множина, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать і A, і B. Перетин множин A і B позначається $A \cap B$. Це означення рівносильне наступному:$A \cap B = \{x : x \in A$ і x Î $B\}$.Наприклад, якщо $A = \{1,2,3,4,5\}$ і $B = \{1,3,5,7,9\}$, тоді $A \cap B = \{1,3,5\}$. Якщо C ={x : x має зріст вище 180см} і D = {x : x любить грати в шахи}, тоді $C \cap D$ = {x : x має зріст вище 180см і любить грати в шахи}. Зверніть увагу, що в описі перетину множин $B \cap C$ використана зв'язка "і". Надалі ми переконаємося, що символи $\cap$ і $\wedge$, введені раніше, пов'язані між собою й мають схожі властивості.

Означимо перетин трьох і більше множин. Нехай A_1, A_2 і A_3 множини. Їх перетин можна записати так:

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Очевидно, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A_1$, $x \in A_2$ і $x \in A_3$; ($x \in B$ тоді і тільки тоді, коли x належить всім трьом множинам A_1, A_2 і A_3.

Нехай $J = \{1,2,3\}$, тоді $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A_j$ для всіх $j \in J$, що рівносильне запису $B = \{x : x \in A_j \ \forall\ j \in J\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.6. Якщо $I = \{1,2,3,\ldots, k\}$, то

$\cap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdot \cdot \cdot \cap A_k = \{x : x \in A_i$ для всіх $i \in I\}$.

Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній із множин A або B і позначається $A \cup B$. Це можна записати так: $A \cup B = \{x : x \in A$ або $x \in B\}$. Приклади

Об'єднання множин A_1, A_2 і A_3 визначається в такий спосіб: $B = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$. Далі буде показано, що $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, тому можна використати запис $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Очевидно, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A_1$ або $x \in A_2$ або $x \in A_3$; іншими словами, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли x належить хоча б одній із трьох множин A_1, A_2 або A_3. Таким чином, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $j \in \{1,2,3\}$, $x \in A_j$, що рівносильно запису $B = \{x : x \in A_j$ для деякого $j \in \{1, 2, 3\}\}$.

ПРИКЛАД . Наприклад, якщо $A = \{1,2,6,7\}$, а $B = \{2,3,5,6\}$, тоді $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$.

Об'єднання $A \cup B$ утворено з A та B шляхом з'єднання разом елементів з A і B.

Якщо $A = \{x : x$ - політик$\}$, а $B = \{x : x$ - випускник ХДУ$\}$, то $A \cup B = \{x : x$ - політик або випускник ХДУ$\}$. Зверніть увагу, що в описі об'єднання $A \cup B$ використана зв'язка "або" так само, як в описі перетину множин використана зв'язка "і".

ОЗНАЧЕННЯ 2.8. Нехай $I = \{1,2,..., k\}$, тоді

$\cup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \{x$: існує $i \in I$ таке, що $x \in A_i\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.9. Нехай A і B множини. ***Різницею множин*** $A - B$ називається множина всіх тих і тільки тих елементів A, які не належать B. Або $A - B = \{x : x \in A$ і $x \notin B\}$.

Симетричною різницею множин A і B (позначається $A \Delta B$), є множина $(A - B) \cup (B - A)$.

Приклади

ОЗНАЧЕННЯ 2.10. ***Доповнення*** множини A (позначається A') - це множина елементів універсума, які не належать A.

Отже, $A' = U - A = \{x : x \in U$ і $x \notin A\}$.

Наприклад, якщо $A = \{1,2,4,6,7\}$, а $B = \{2,3,4,5,6\}$, то $A - B = \{1,7\}$, а $A \Delta B = \{1,3,5,7\}$.

Симетрична різниця множин A і B складається з тих елементів, які належать у точності одній із двох множин A або B. Якщо $A = \{x : x$ грає в теніс$\}$, а $B = \{x : x$ грає в гольф$\}$, то $A - B = \{x : x$ грає в теніс, але не грає в гольф$\}$. Множина $A \Delta B = \{x : x$ грає тільки в теніс або грає тільки в гольф$\}$. Зверніть увагу на подібність зі зв'язкою “ виключаюче або“ попередньої лекції.

Якщо U - множина додатних цілих чисел, а $A = \{2,4,6,8,...\}$ – множина всіх парних додатних чисел, то
$A' = \{1,3,5,7,...\}$ - множина всіх непарних додатних чисел. Якщо U - множина всіх букв англійського алфавіту, $V = \{a, e, u, o, i\}$, то V' - множина всіх букв, що позначають в англійській мові приголосний звук. Якщо $A = \{x : x$ – фанат наукової фантастики$\}$, тоді $A' = \{x : x$ не любить наукову фантастику$\}$. Зверніть увагу, що доповнення множини пов'язане із символом ~ у логіці.

ТЕОРЕМА 2.13. Для довільних множин A, B і C справедливі рівності

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ДОВЕДЕННЯ. Нижче наведене доведення частини (а). Доведення частини (б) проведіть самостійно.

Покажемо, що кожна з множин, що входять у рівність, є підмножиною іншої.

$a \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$ означення перетину

$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge ((a \in B) \vee (a \in C)) \Leftrightarrow$ означення об'єднання

$\Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (a \in B)) \vee ((a \in A) \wedge (a \in C)) \Leftrightarrow$ властивість дистрибутивності логіки

$\Leftrightarrow (a \in (A \cap B)) \vee (a \in (A \cap C)) \Leftrightarrow$ означення перетину

$\Leftrightarrow a \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ означення об'єднання

Ми переконалися, що властивості, доведені в теорії множин, мають свої аналоги у логіці.

ОЗНАЧЕННЯ 2.14. ***Множиною всіх підмножин*** множини A, або ***булеаном*** множини A, (позначається $P(A)$), є множина, що складається з усіх підмножин множини A.

Отже, булеаном множини $A = \{1,2,3\}$ є множина

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Коли A містить 3 елементи, $P(A)$ складається з $2^3 = 8$ елементів або, що те ж саме, A включає $2^3 = 8$ підмножин.

У загальному випадку, якщо A містить n елементів, множина $P(A)$ включає 2^n елементів, тому що A має 2^n підмножин. Із цієї причини $P(A)$ часто позначають через $\mathbf{2}^A$. Ще однією операцією над множинами є декартовий добуток.

ОЗНАЧЕННЯ 2.15. ***Декартовим добутком*** множин A і B (позначається $A \times B$), є множина $\{(a, b) : a \in A$ і $b \in B\}$. Об'єкт (a, b) називається ***впорядкованою парою*** з першим компонентом a і другим компонентом b.

Множина $A \times B$ складається з усіх упорядкованих пар, що мають першим компонентом елемент із A, а другим компонентом - елемент із B. Порядок компонентів у парі суттєвий!

ДІАГРАМИ ВЕННА

Діаграми Венна - дуже зручний інструмент, що дозволяє зображувати множини й ілюструвати операції над ними. Множини в діаграмах Венна зображуються внутрішніми частинами кіл, їх перетином, об'єднанням і т.д. Прямокутник зображує універсальну множину. На рис. 2.1 наведена діаграма Венна для множини *A*, що зображена внутрішньою частиною кола. Зовнішня частина кола, що перебуває усередині прямокутника, зображує *A'*.

На рис. 2.2 наведена діаграма Венна для двох множин, скажемо, *A* і *B*, кожна множина зображена колом, і кола перетинаються.

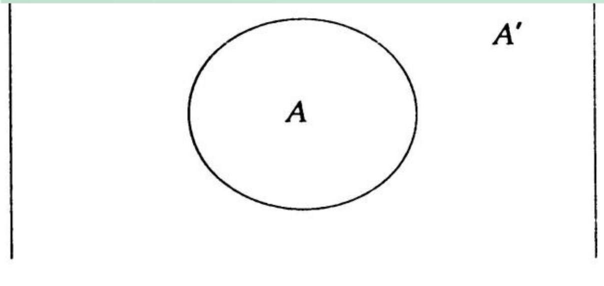


Рис. 2.1

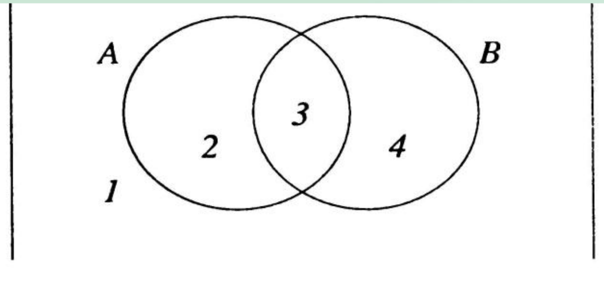


Рис. 2.2

Як показує діаграма, внутрішня частина прямокутника розділена на чотири частини. Множині $A \cap B$ відповідає зафарбована частина діаграми на рис. 2.3. Зафарбована область на рис. 2.4 представляє $A \cup B$.

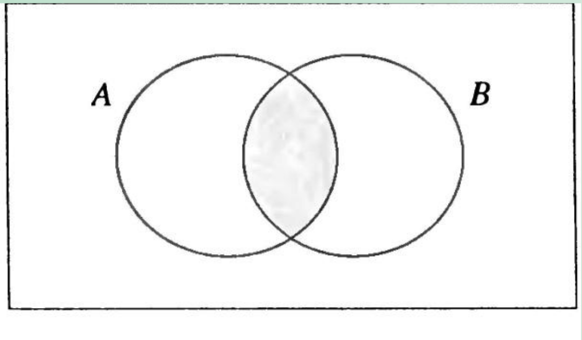


Рис. 2.3

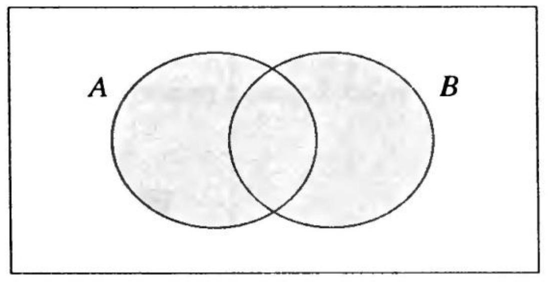
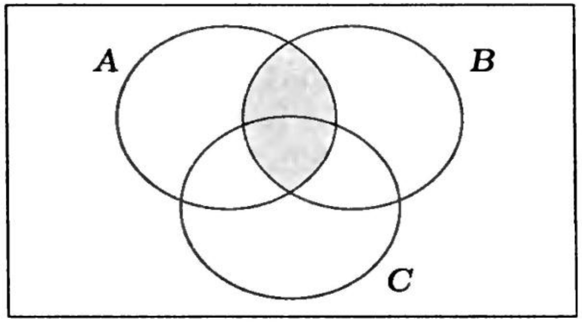
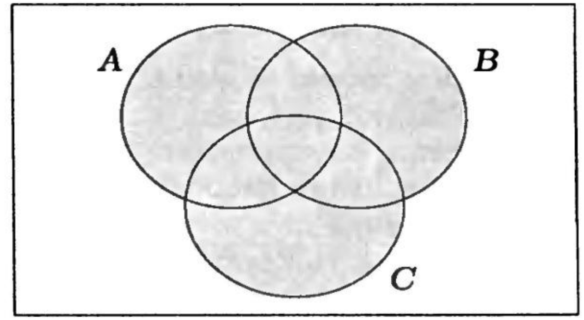


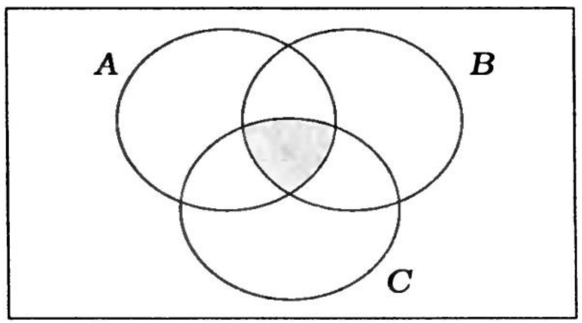
Рис. 2.4



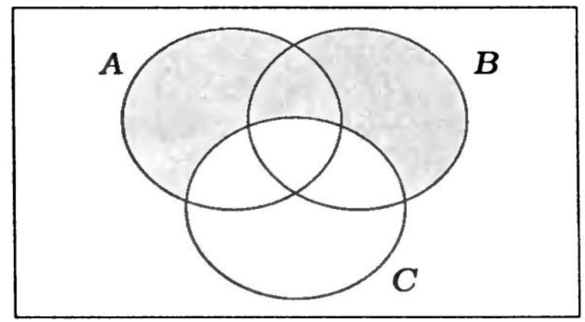
$A \cap B$



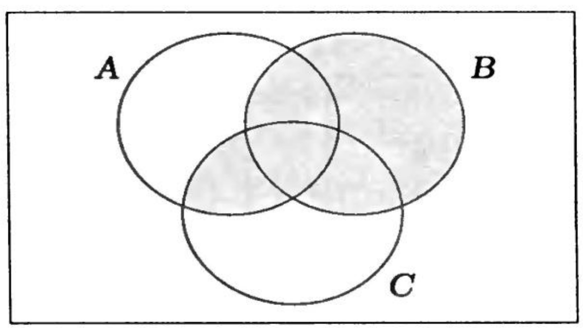
$A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$



$(A \cup B) - C$



$(A \cap C) \cup B$

Рис. 2.5

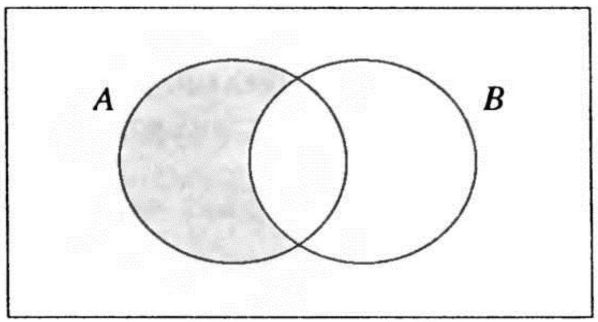


Рис. 2.6

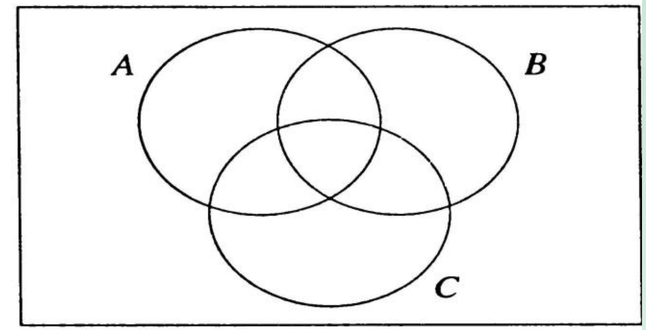


Рис. 2.7

Зафарбовані області на рис. 2.5 зображують множини $A \cap B$, $(A \cup B \cup C)$, $(A \cap B \cap C)$, $(A \cup B) - C$ і $(A \cap C) \cup B$. Множина $A - B$ представлена зафарбованою областю на рис. 2.6. Діаграма Венна для трьох множин, наприклад, A, B і C, показана на рис. 2.7. Ця діаграма складається з восьми частин.

Використовуючи діаграми Венна, можна показати рівність двох множин.

Приклади

ПРИКЛАД 2.16. Покажемо, що $(A \cup B)' = A' \cap B'$. Множина $(A \cup B)'$ - доповнення множини $A \cup B$, представленої діаграмою Венна на рис. 2.4, тому її зображує зафарбована область, показана на рис. 2.8.

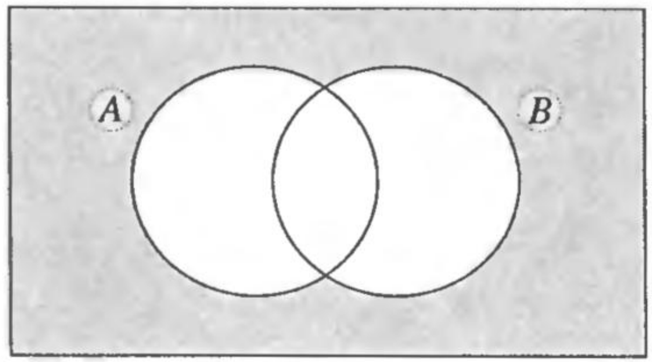


Рис. 2.8

Множині A' відповідає зафарбована область на рис. 2.9. А множині B' - зафарбована область на рис. 2.10.

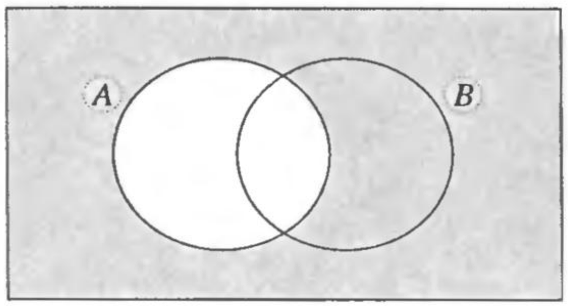


Рис. 2.9

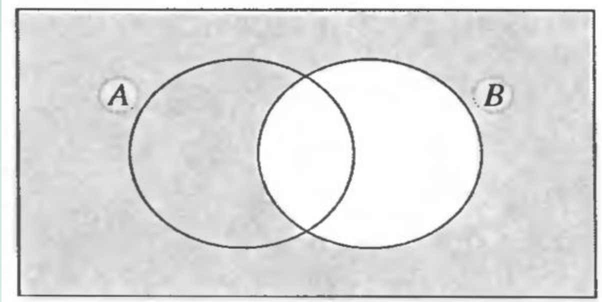


Рис. 2.10

Множині $A' \cap B'$ відповідають частини, зафарбовані на обох попередніх діаграмах, тому на рис. 2.11 вона зображена більш темною областю.

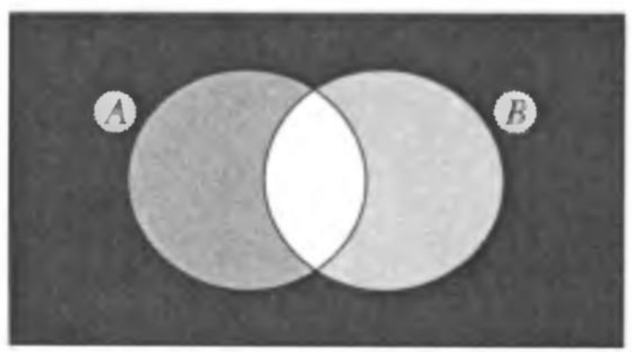


Рис. 2.11

Оскільки і $(A \cup B)'$, і $A' \cap B'$ однаково зображуються на діаграмі Венна, тому $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

ПРИКЛАД 2.17. Покажіть, що $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Множина A представлена зафарбованою областю на рис. 2.12. Множині $B \cup C$ відповідає зафарбована область на рис. 2.13.

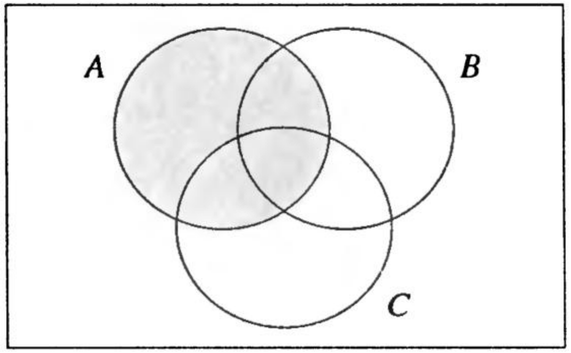


Рис. 2.12

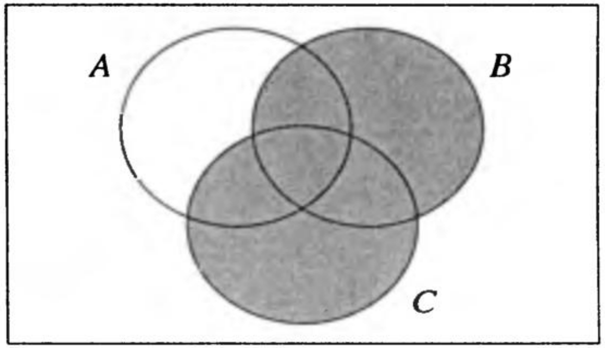


Рис. 2.13

Множину $A \cap (B \cup C)$ зображує область, зафарбована на обох попередніх діаграмах, тому вона представлена на рис. 2.14 більш темною областю. Множину $A \cap B$ представлено на рис. 2.15 зафарбованою областю.

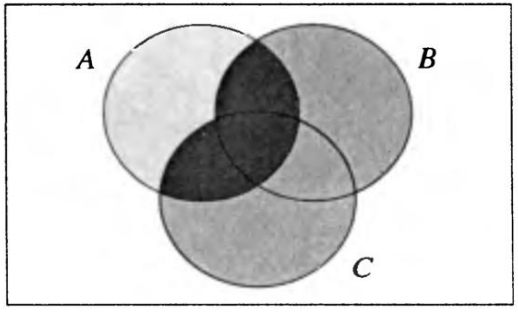


Рис. 2.14

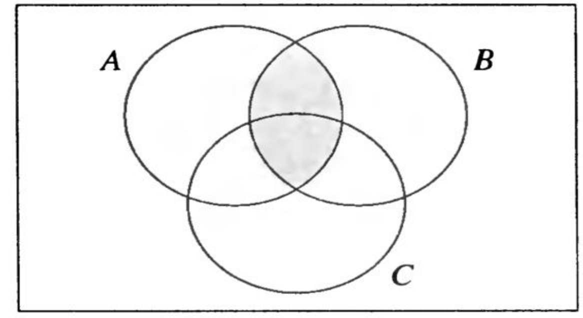


Рис. 2.15

Множину $A \cap B$ зображено на рис. 2.16 більше темною областю, а множину $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ зображено зафарбованою областю на рис. 2.17.

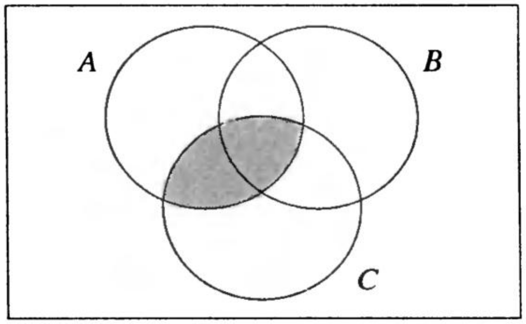


Рис. 2.16

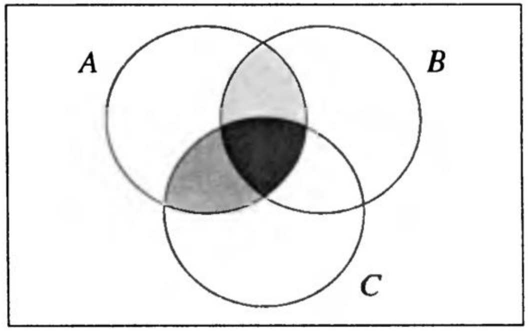


Рис. 2.17

Отже, $A \cap (B \cup C)$ і $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ зображуються однаково на діаграмах Венна, тому

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Властивості множин, сформульовані в наведених нижче теоремах, можуть бути перевірені шляхом формального доведення або на діаграмах Венна. Зверніть увагу, що вони дублюють відповідні властивості у численні висловлень.

ТЕОРЕМА 2.18. Нехай A, B і C - підмножини універсальної множини U**.** Тоді справедливі

а)*Закони ідемпотентності*

$$A \cap A = A; A \cup A = A.$$

б) *Подвійне доповнення*

$$(A')' = A.$$

в) *Закони де Моргана*

$$(A \cup B)' = A' \cap B';$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

г) *Властивості комутативності*

$$A \cap B = B \cap A;$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

д) ***Властивості асоціативності***

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

е) ***Властивості дистрибутивності***

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ж) ***Властивості тотожності***

$$A \cup \varnothing = A;$$

$$A \cap U = A.$$

з) ***Властивості доповнення***

$$A \cup A' = U;$$

$$A \cap A' = \varnothing.$$

Порівняння основних властивостей множин і логіки висловлень показало, що ці властивості мають багато загальних рис. Дана обставина знайшла своє втілення в загальній теорії, відомій як ***булева алгебра***. Свою назву теорія одержала на честь Дж. Буля, основоположника математичної логіки.

ОЗНАЧЕННЯ 2.19. Операція, задана на деякій множині, називається ***бінарною***, якщо вона діє на два елементи цієї множини і її результатом є елемент цієї ж множини.

ОЗНАЧЕННЯ 2.20. Операція, задана на множині, називається ***унарною***, якщо вона діє на один елемент множини і її результатом є елемент цієї ж множини.