ВІДНОШЕННЯ

Серед розглянутих операцій над множинами був декартовий добуток множин A і B, що позначається через $A \times B$. Він являє собою множину $\{(a, b) : a \in A$ і $b \in B\}$. Таким чином, множина $A \times B$ складається з усіх впорядкованих пар, що мають як перший компонент елемент з множини A, а в якості другого компонента - елемент із B.

ОЗНАЧЕННЯ 2.25. ***Відношенням*** R з множини A в множину B називається довільна підмножина $A \times B$. Якщо $(a, b) \in R$, це записують як aRb; при цьому говорять, що a і b перебувають у відношенні R, або a ***відноситься до*** b. Якщо $A = B$, то відношення є підмножиною $A \times A$; таке відношення називають ***бінарним відношенням*** на A.

Надалі на множині будемо звичайно розглядати бінарні відношення, тому замість терміну “бінарне відношення” будемо вживати термін “відношення”.

Якщо $A = \{1,2,3\}$, $B = \{r, s\}$ і $A \times B = \{(1,r), (1,s), (2,r), (2,s), (3,r), (3,s)\}$, то $R = \{(1,r), (1,s), (3,s)\}$ є відношенням множин A і B. Можна записати, наприклад, пару $(3,s) \in R$ у вигляді $3Rs$. Множина $A \times B$ містить шість елементів, тому існує $2^6 = 64$ підмножин множини $A \times B$. Отже, існують 64 різні відношення на $A \times B$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.26. ***Область визначення*** відношення R з A в B - це множина всіх $x \in A$ таких, що для деяких $y \in B$ маємо $(x, y) \in R$. Інакше кажучи, область визначення R є множина всіх перших координат упорядкованих пар з R.

Множина значень відношення R з A в B - це множина всіх $y \in B$ таких, що для деякого $x \in A$ маємо $(x, y) \in R$. Інакше кажучи, множина значень R є множина всіх других координат упорядкованих пар з R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.27. Нехай $R \subseteq A \times B$ є відношення на $A \times B$. Тоді відношення R^{-1} на $B \times A$ визначається в такий спосіб:

$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$.

Інакше кажучи, $(b,a) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a,b) \in R$ або, що рівносильно, $b\ R^{-1}\ a$ тоді і тільки тоді, коли aRb.

Відношення R^{-1} називається ***оберненим відношенням*** до даного відношення R.

Нехай $R = \{(1, r), (1, s), (3, s)\}$, тоді $R^{-1} = \{(r, 1), (s, 1), (s, 3)\}$.

Нехай R - відношення $\{(x, y) : y$ є чоловіком $x\}$, тоді R^{-1} відношення $\{(x, y) : y$ - дружина $x\}$.

Нехай R - відношення $\{(x, y) : y$ є родичем $x\}$ або R відношення $\{(x, y) : x^2+y^2 = 4\}$, тоді $R^{-1}= R$.

З двох заданих відношень можна утворити нові відношення зазначеним нижче способом.

ОЗНАЧЕННЯ 2.28. Нехай $R_1 \subseteq A \times C$ - відношення на $A \times C$, а $R_2 \subseteq C \times B$ - відношення на $C \times B$.

Композицією відношень R_2 і R_1 називається відношення $R \subseteq A \times B$, задане в такий спосіб: $R = \{(a, b)$: існує такий елемент c з C, що $(a,c) \in R_1$ і $(c,b) \in R_2\}$.

Ця множина позначається $R = R_2 \circ R_1$.

ПРИКЛАД Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x, y\}$, а $C = \{\square, \blacktriangle, \circ, \blacklozenge\}$, і нехай відношення R на $A \times B$ і S на $B \times C$ задані у вигляді:

$$R = \{(1,x), (1,y), (3,x)\};$$

$$S = \{(x, \square), (x, \blacktriangle), (y, \circ), (y, \blacklozenge)\}.$$

Тоді $S \circ R = \{(1, \square), (1, \blacktriangle), (1, \circ), (1, \blacklozenge), (3, \square), (3, \blacktriangle)\}$,

оскільки з $(1,x) \in R$ і $(x, \square) \in S \Rightarrow (1, \square) \in S \circ R$;

з $(1,x) \in R$ і $(x, \blacktriangle) \in S \Rightarrow (1, \blacktriangle) \in S \circ R$;

з $(1,y) \in R$ і $(y, \circ) \in S \Rightarrow (1, \circ) \in S \circ R$;

.

.

.

з $(3,x) \in R$ і $(x, \blacktriangle) \in S \Rightarrow (3, \blacktriangle) \in S \circ R$.

ТЕОРЕМА 2.31. Композиція відношень асоціативна;
Тобто, якщо A, B і C - множини і якщо $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ і $T \subseteq C \times D$, тоді $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

ДОВЕДЕННЯ. Покажемо спочатку, що $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$. Нехай $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$, тоді існує таке $c \in C$, що $(a, c) \in S \circ R$ і $(c, d) \in T$.
Оскільки $(a, c) \in S \circ R$, існує таке $b \in B$, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in S$. Оскільки $(b, c) \in S$ і $(c, d) \in T$, то $(b, d) \in T \circ S$.
Оскільки $(b, d) \in T \circ S$ і $(a, b) \in R$, то $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$.

Таким чином, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.32.

Відношення R на $A \times A$ ***рефлексивне***, якщо (a, a) належить R для всіх a з A.

Відношення R називається ***антирефлексивне,*** якщо з $(a, b) \in R \Rightarrow a \neq b$ для всіх $a, b \in A$.

Відношення R ***симетричне,*** якщо для всіх a і b, що належать A, з $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

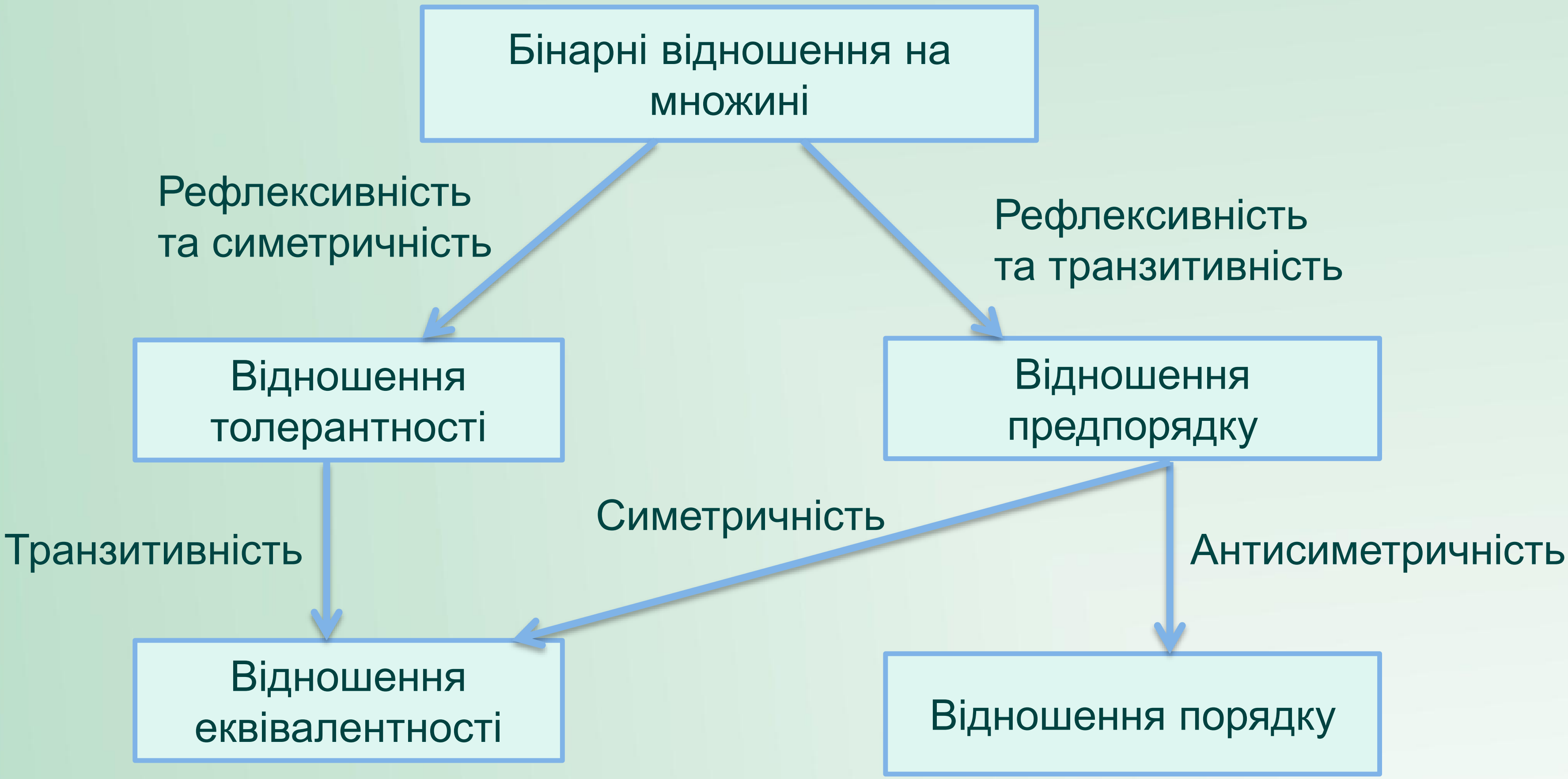
Відношення R ***транзитивне***, якщо для всіх a, b і $c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Відношення R називається ***антисиметричним***, якщо для всіх a і b з A, з приналежності (a, b) і (b, a) відношенню $R \Rightarrow$ $a = b$.

Властивості відношень

Відношення R називається:

- Рефлексивним – $\forall a \in A \; aRa$
- Антирефлексивним – $\forall a \in A \; \sim aRa$
- Симетричним – $\forall a, b \in A \; aRb \rightarrow bRa$
- Антисиметричним – $\forall a, b \in A \; aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$
- Транзитивним – $\forall a, b, c \in A \; aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$
- Повним - $\forall a, b \in A \; a = b \vee aRb \vee bRa$


Бінарні відношення на множині
Рефлексивність та симетричність
Рефлексивність та транзитивність
Відношення толерантності
Відношення предпорядку
Транзитивність
Симетричність
Антисиметричність
Відношення еквівалентності
Відношення порядку

ПРИКЛАД 2.33. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і нехай відношення $R_1 \subseteq A \times A$ є множина $R_1 = \{(1,1), (2,2,), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)\}$.

Відношення R_1 рефлексивне, тому що для кожного $a \in A$, $(a, a) \in R_1$.

Розглянувши всі можливі випадки й показавши, що в кожному з них з $(a, b) \in R_1 \Rightarrow \Rightarrow (b, a) \in R_1$, можна показати, що відношення R_1 є симетричним.

Випадок	$(a, b) \in R_1$	(b, a)	$(b, a) \in R_1$**?**
1	(1,2)	(2,1)	Так
2	(1,4)	(4,1)	Так
3	(2,1)	(1,2)	Так
. . .	. . .	. . .	. . .

Також можемо показати, що R_1 транзитивне, використовуючи метод прямого перебору, як показано на прикладі наступної таблиці.

Випадок	**$(a, b) \in R_1$**	**$(b, c) \in R_1$**	**(a, c)**	**$(a, c) \in R_1$?**
1	(1,2)	(2,1)	(1,1)	Так
2	(1,2)	(2,2)	(1,2)	Так
3	(1,2)	(2,4)	(1,4)	Так
4	(1,4)	(4,1)	(1,1)	Так
5	(1,4)	(4,2)	(1,2)	Так
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Проаналізувавши кожен можливий випадок, коли $(a, b) \in R_1$ і $(b, c) \in R_1$, одержуємо, що $(a, c) \in R_1$.

R_1 не є антисиметричним, оскільки $(1,2) \in R_1$ і $(2,1) \in R_1$, але $1 \neq 2$.

ПРИКЛАД 2.34. Нехай $A = \{\square, \blacktriangle, \circ, \blacklozenge\}$ і нехай $R_2 \subseteq A \times A$ визначено у вигляді $R_2 = \{(\square,\square), (\square,\blacktriangle), (\square,\blacklozenge), (\blacktriangle,\square), (\blacklozenge,\square), (\blacklozenge,\blacklozenge), (\circ,\blacklozenge), (\circ,\circ)\}$.$R_2$ не є рефлексивним, оскільки $\blacktriangle \in A$, але $(\blacktriangle,\blacktriangle) \notin R_2$. R_2 не є симетричним, оскільки $(\circ,\blacklozenge) \in R_2$, але $(\blacklozenge,\circ) \notin R_2$. R_2 не є антисиметричним, оскільки $(\blacktriangle,\square) \in R_2$ і $(\square,\blacktriangle) \in R_2$, але $\blacktriangle \neq \square$. R_2 не є транзитивним, так як $(\blacktriangle,\square) \in R_2$ і $(\square,\blacklozenge) \in R_2$, але $(\blacktriangle,\blacklozenge) \notin R_2$.

ПРИКЛАД 2.35. Нехай A - множина додатних цілих чисел. Визначимо відношення R, задаючи $(x, y) \in R$ умовою: y кратне x. R рефлексивне, оскільки для кожного додатного цілого числа n, $n = 1 \cdot n$ і $(n, n) \in R$. R не є симетричним, так як $(2,4) \in R$, але $(4,2) \notin R$; однак, R антисиметричне, так як, якщо $(m, n) \in R$ і $(n, m) \in R$, тоді n кратне m і m кратне n, так що $m = n$. R транзитивне, тому що якщо $(m, n) \in R$ і $(n, p) \in R$, тоді n кратне m і p кратне n, так що p кратне m і $(m, p) \in R$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.36. Нехай R - бінарне відношення на множині A.***Рефлексивне замикання*** R є найменше Рефлексивне відношення на A, що містить R як підмножину.

Симетричне замикання R є найменше симетричне відношення на A, що містить R як підмножину.

Транзитивне замикання R є найменше транзитивне відношення на A, що містить R як підмножину.

ТЕОРЕМА 2.37. Нехай R - відношення на множині A і $I = \{x: x = (a, a)$ для будь-якого $a \in A\}$. Тоді

а) $R \cup I$ є рефлексивне замикання R;

б) $R \cup R^{-1}$ є симетричне замикання R;

в) якщо A - скінченна множина з n елементів, то відношення $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ є транзитивне замикання R.

Частково впорядковані множини

ОЗНАЧЕННЯ 2.44. Відношення *R* на *A* називають відношенням ***часткового порядку,*** якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Якщо відношення *R* на *A* є відношенням часткового порядку, то (*A*,*R*) називають ***частково впорядкованою множиною***, або ***ЧУ-множиною*** з порядком *R*. Якщо відношення порядку *R* передбачається за замовчуванням, то (*A*,*R*) можна позначати просто через *A*.

ОЗНАЧЕННЯ 2.47. Два елементи *a* і *b* частково впорядкованої множини $(S, \leq)$ ***порівнянні,*** якщо $a \leq b$ або $b \leq a$. Якщо кожні два елементи частково впорядкованої множини $(S, \leq)$ порівнянні, то $(S, \leq)$ називається ***цілком упорядкованою множиною,*** або ***ланцюгом.***

Приклади

ПРИКЛАД 2.45. Нехай $C = \{1,2,3\}$, а X - множина всіх підмножин множини C: $X = P(C) = \{\varnothing,\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Визначимо відношення R на X за допомогою $(T, V) \in R$ якщо $T \subseteq V$. Так, $(\{2\}, \{1,2\}) \in R$, оскільки $\{2\} \subseteq \{1,2\}$ і $(\{2,3\}, \{3\}) \notin R$, оскільки $\{2,3\} \not\subset \{3\}$. Можна легко перевірити, що R - відношення часткового порядку, а (A,R) –ЧУ-множина.

ПРИКЛАД 2.46. Нехай S - множина дійсних чисел, а R_1 – відношення, визначене умовою (x, y) R_1, якщо x y. Легко показати, що R_1 - відношення часткового порядку, а (S, R_1) – ЧУ-множина.Часткове впорядкування прийнято позначати через $\leq$, а частково впорядковану множину - через $(S, \leq)$, де $\leq$ частковий порядок на множині S. Якщо $(a, b) \in \leq$, то, відповідно $a \leq b$.

ПРИКЛАД 2.48. Нехай T - множина додатних дільників числа 30 і $\leq_1$ є відношення $m \leq_1 n$, якщо m ділить n без остачі. Цілі числа 5 і 15 порівнянні, оскільки 5 ділить 15 без остачі, а 5 і 6 - ні.

ПРИКЛАД 2.49. Нехай A - множина цілих чисел і $R = \leq_2$ – відношення $x \leq_2 y$, якщо x менше або дорівнює y. Упорядкована множина $(A, \leq_2)$ є ланцюгом.

ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Відношення R на A ***рефлексивне,*** якщо (a, a) належить R для всіх a з A. Відношення R ***симетричне***, якщо для всіх a і b з A з того, що (a, b) належить R, випливає, що (b, a) належить R. Відношення R ***транзитивне,*** якщо для всіх a, b і c із A таких, що (a, b) і (b, c) належать R, (a, c) також належить R. Ці властивості об'єднані в наведеному нижче означенні.

ОЗНАЧЕННЯ 2.51. Відношення R на A є ***відношення еквівалентності,*** якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Приклади

ПРИКЛАД 2.52. Нехай A - множина цілих чисел. Визначимо відношення $R_3 \subseteq A \times A$ за допомогою $R_3 = \{(a,b) : a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа $k\}$. Наприклад,$(7, 2) \in R_3$, оскільки $7 - 2 = 5 = 5 \cdot 1$, і $(-11,4) \in R_3$, тому що $(-11)-4=-15 = 5 \cdot (-3)$.

Відношення R_3 рефлексивне. Якщо a - ціле число (тобто $a \in A$), то $a - a = 0 = 5 \cdot 0 = 5 \cdot k$ для $k = 0$, так що $(a, a) \in R_3$.

Відношення R_3 симетричне. Припустимо, $(a, b) \in R_3$. Тоді існує таке ціле число m, що $a - b = 5 \cdot m$ і

$b - a = - (a - b) = - (5 \cdot m) = 5 \cdot (- m)$ для цілого числа $– m$.

Таким чином, $(b, a) \in R_3$. Відношення R_3 транзитивне.

Припустимо, що a, b і c - цілі числа, $(a, b) \in R_3$ і $(b, c) \in R_3$.

За означенням, якщо $(a, b) \in R_3$, тоді $a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа k, і якщо $(b, c) \in R_3$, тоді $b - c = 5 \cdot m$ для деякого цілого числа m.

Додавання лівих і правих частин цих двох рівностей дає

$$(a - b) + (b - c) = 5 \cdot k + 5 \cdot m \qquad \text{або} \qquad a - c = 5 \cdot (k + m)$$

для цілого числа $k + m$. За означенням R_3, $(a, c) \in R_3$, тому R_3 транзитивне. Оскільки R_3 рефлексивне, симетричне і транзитивне, воно є відношенням еквівалентності.

Відношення еквівалентності R на множині A розбиває її на підмножини, елементи яких еквівалентні один одному і не еквівалентні елементам інших підмножин. У контексті відношень еквівалентності ці підмножини називають ***класами еквівалентності*** по відношенню R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.53. Нехай $a \in A$, і R – відношення еквівалентності на $A \times A$. Нехай $[a]$ позначає множину $\{x : xRa\} = \{x: (x, a) \in R\}$, названу ***класом еквівалентності,*** що містить a. Символ $[A]_R$ позначає множину всіх класів еквівалентності множини A по відношенню R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.56. Нехай A і I - множини і нехай $\langle A \rangle = \{A_i : i \in I\}$, де $I \neq \varnothing$, є множина непустих підмножин множини A. Множина $\langle A \rangle$ називається ***розбиттям*** A, якщо виконуються дві умови :

а) $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всіх $i \neq j$;

б) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, тому що a належить A тоді і тільки тоді, коли $a \in A_i$ для деякого $i \in I$.

ПРИКЛАД 2.55. Розглянемо відношення еквівалентності R_3 із приклада 2.52. Для множини A всіх цілих чисел $R_3 \subseteq A \times A$ було визначено за допомогою $R_3 = \{(a, b) : a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа $k\}$. Оскільки $[a] = \{x : (x, a) \in R_3\} =$
$= \{x : xR_3a\} = \{x : x - a = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа $k\} =$
$=\{x : x = a + 5 \cdot k$ для деякого цілого $k\}$,одержуємо, що класи

$[0] = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...\} = … = [-5] = [0] = [5] = [10] = …,$

$[1] = \{..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, ...\} = … = [-9] = [-4] = [1] = [6] = …,$

$[2] = \{..., -13, -8, -3, 2 , 7 , 12, ...\} = … = [-3] = [-2] = [7] = [12] = …,$

$[3] = \{..., -12, -7, -2, 3, 8, 13,...\} = … = [-2] = [3] = [8] = [13] = …,$

$[4] = \{..., -11, -6, -1, 4 , 9, 14, ...\} = … =[-6] = [-1] = [4] = [9] = …$

являють собою різні класи еквівалентності по відношенню R_3. Таким чином, $[A]_{R3} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$.

ТЕОРЕМА 2.57. Непуста множина підмножин $\langle A\rangle$ множини A є розбиттям A тоді і тільки тоді, коли $\langle A\rangle = [A]_R$ по деякому відношенню еквівалентності R.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\langle A\rangle = \{A_1 : i \in I\}$ є розбиттям A. Визначимо відношення R на $A \times A$ в такий спосіб: xRb тоді і тільки тоді, коли a і b належать тій самій підмножині A_i для деякого i. Безсумнівно, що для всіх a з A маємо aRa, тому R рефлексивне. Якщо a і b належать одній підмножині A_i, тоді b і a також належать цій підмножині A_i, тому R симетричне. Якщо елементи a і b належать одній підмножині і елементи b і c належать одній підмножині, то a і c теж перебувають в одній підмножині, в силу умови $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Отже, R транзитивне і являє собою відношення еквівалентності.

Тепер припустимо, що R - відношення еквівалентності. Необхідно показати, що $[A]_R = \{[a] : a \in A\}$ є розбиттям A. Очевидно, $[a]$ непусте для всіх a, тому що $a \in [a]$. Очевидно також, що A є об'єднанням $[a]$, так що $a \in A$. Припустимо, що перетин $[a] \cap [b]$ непустий і $x \in [a] \cap [b]$. Тоді xRa і xRb, і, у силу симетричності відношення, aRx. Але оскільки aRx і aRb, то, у силу транзитивності відношення, aRb. Тому, $a \in [b]$. Якщо $y \in [a]$, то yRa, а оскільки aRb, то yRb, у силу транзитивності відношення. Тому $[a] \subseteq [b]$.

Аналогічно можна показати, що $[b] \subseteq [a]$, тому $[a] = [b]$ і $[A]_R$ являє собою розбиття A.

ПРИКЛАД 2.58. Нехай $A = \{\square, \blacktriangle, \circ, \blacklozenge\}$. Розглянемо розбиття

$$A_1 = \{\square\},\ A_2 = \{\blacktriangle, \circ, \blacklozenge\}.$$

Відповідно до доведення попередньої теореми, необхідно визначити R у такий спосіб: $R = \{(a,b) : a \in A_i$ і $b \in A_i$ для деякого $i\}$. Отже,

$$R = \{(\square,\square), (\blacklozenge,\blacktriangle), (\blacklozenge,\circ), (\blacklozenge,\blacklozenge), (\circ,\blacktriangle), (\circ,\circ), (\circ,\blacklozenge), (\blacktriangle,\blacktriangle), (\blacktriangle,\circ), (\blacktriangle,\blacklozenge)\}$$

є відношення, що відповідає заданому розбиттю.

Функції

Відношення f на A x B називається **функцією** з A в B і позначається через $f : A \to B$, якщо для кожного $a \in A$ існує єдиний елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in f$. Якщо $f : A \to B$, та $(a, b) \in f$, то $b = f(a)$.

Множина A називається **областю визначення** функції, а множина B називається **областю потенційних значень** функції.

Якщо $E \subseteq A$, то множина $f(E) = \{b: f(a) = b$ для деякого a з $E\}$ називається образом множини E. Образ всієї множини A називається областю значень функції.

Якщо $F \subseteq B$, то множина $f^{-1}(F) = \{a: f(a) \in F\}$ називається прообразом множини F. Функція $f: A \to B$ називається відображенням, при цьому говорять, що f відображає A в B.

Нехай $f : A \to B$. Тоді функція f називається:

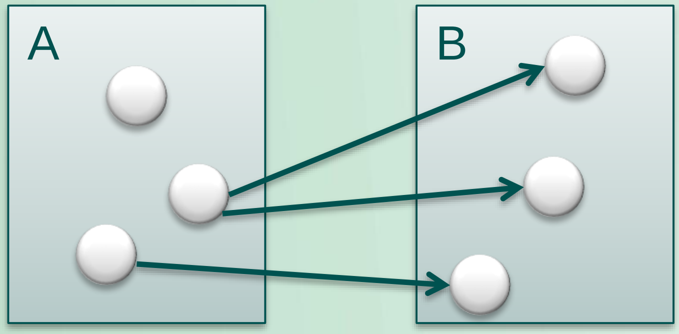
ін'єктивною, або ін'єкцією, якщо $b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \to a_1 = a_2$

сюр'єктивною, або сюр'єкцією, якщо $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A\ b = f(a)$

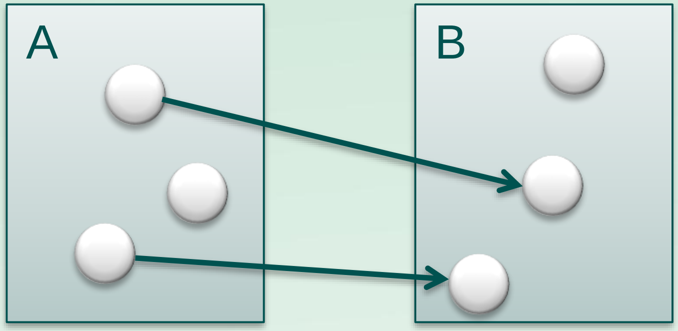
бієктивною, або бієкцією, якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна

A	**B**
Функціональність $\forall\, a \in A\ (a, b) \in \boldsymbol{f} \wedge (a, c) \in \boldsymbol{f} \to b{=}c$	Ін'єктивність $\forall\, b \in B\ (a, b) \in f \wedge (c, d) \in f \to a = c$
Тотальність $\forall\, a \in A\ \exists\, b \in B\ (a, b) \in \boldsymbol{f}$	Сюр'єктивність $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A\ (a, b) \in f$

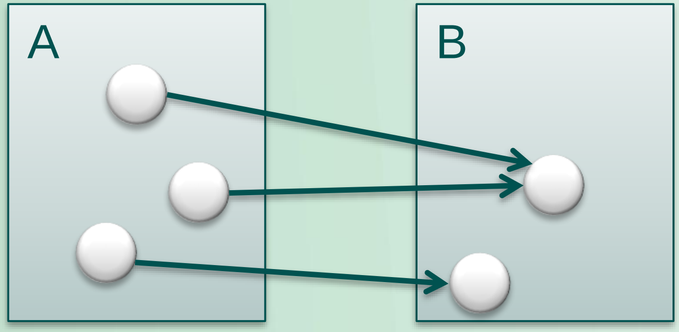
Різні види функцій



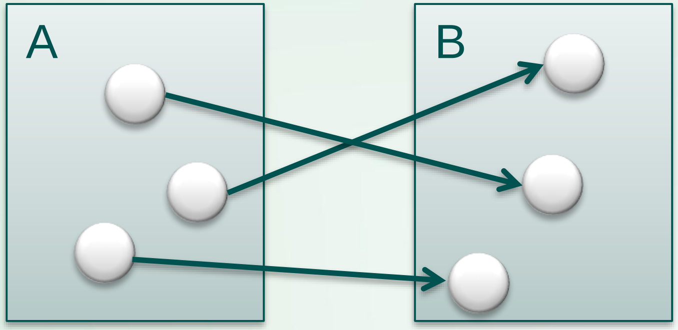
Відношення, але не функція



Ін’єкція, але не сюр’єкція



Сюр’єкція, але не ін’єкція



Бієкція

Оберненим відношенням $f^{-1} \subseteq B \times A$ є

$f^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in f\}$.

При цьому відношення f^{-1} може не бути функцією з B в A, навіть якщо f є функцією з A в B. Якщо f^{-1} - функція, то її називають ***оберненням*** функції f, або її ***оберненою функцією***.

Нехай $I : A \to A$ визначене співвідношенням $I(a) = a$ $\forall a \in A$. I називають ***тотожньою функцією*** на A.

ТЕОРЕМА 2.5. Якщо функція $f : A \to B$ є біекцією, то обернене відношення f^{-1} є біекцією з B в A. Навпаки, для $f : A \to B$, якщо f^{-1} - функція з B в A, то f є біекцією.

ТЕОРЕМА 2.6. Якщо $f : A \to B$ - бієкція, то:

а) $f\,(f^{-1}(b)) = b \;\; \forall\; b$ з B; **б)** $f^{-1}\,(f\,(a)) = a \;\; \forall\; a$ з A.

ТЕОРЕМА 2.7. Якщо $f : A \to A$ і I - тотожна функція на A, то $I \circ f = f \circ I = f$. Якщо для f існує обернена функція, то $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

ТЕОРЕМА 2.8. Нехай $g : A \to B$ і $f : B \to C$. Тоді:

а) якщо g і f - сюр'єкції A на B і B на C відповідно, то $f \circ g$ є сюр'єкція A на C, тобто композиція двох сюр'єкцій – сюр'єкція;

б) якщо g і f - ін'єкції, то $f \circ g$ - також ін'єкція; тобто композиція двох ін'єкцій - ін'єкція;

в) якщо g і f - бієкції, то $f \circ g$ - також бієкція; тобто композиція двох бієкцій - бієкція;

г) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Матриці

Для додатних цілих чисел m і n ***матрицею*** $m \times n$ (***масивом*** $m \times n$), називається функція

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow D,$$

де D - це множина елементів, що називають ***скалярами***.

Стовпець

Рядок матриці

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Компонент, або **елемент** матриці

Матриця A ***розміру*** $m \times n$ містить m рядків і n стовпців, записують скорочено $A = [A_{ij}]$ або $A = [a_{ij}]$.

Дії над матрицями

Якщо d - скаляр, а $A = [A_{ij}]$ – матриця $m \times n$, то d є матриця $D = [D_{ij}]$ розміру $m \times n$, де $D_{ij} = dA_{ij}$, тобто кожен компонент D є добуток відповідного компонента A на d. Добуток числа d і матриці A називається ***множенням матриці на скаляр***.

$$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$7 * A = 7 * \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot(-3) & 7\cdot 5 \\ 7\cdot 6 & 7\cdot 0 & 7\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 35 \\ 42 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Якщо $A = [A_{ij}]$ і $B = [B_{ij}]$ - $m \times n$ матриці, тоді $A + B$ є $m \times n$ матриця $C = [C_{ij}]$, де $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, іншими словами, матриці додаються покомпонентно.

Матриця C називається ***сумою матриць*** A і B.

Різниця матриць $A - B = A + (-1)*B$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)+3 & 3+11 \\ 2+(-5) & 7+4 \\ 4+8 & (-5)+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ -3 & 11 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

Нехай $A = [A_{ij}]$ є матриця $m \times p$, а $B = [B_{ij}]$ є матриця $p \times n$.Тоді (матричний) ***добуток*** A і B, що позначається через AB, є матриця $C = [C_{ij}]$ розміру $m \times n$, де C_{ij} – скалярний добуток i-го рядка матриці A і j-го стовпця матриці B.

$$C_{ij} = [A_{i1}\ A_{i2}\ A_{i3}\ \ldots\ A_{ip}] * \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

ТЕОРЕМА 2.9. Для будь-яких матриць A, B і C розміру $n \times n$ і дійсних чисел r і s справедливі наступні твердження:

а) властивість комутативності додавання:

$$A + B = B + A;$$

б) властивість асоціативності додавання:

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

в) властивість асоціативності множення:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

г) властивість дистрибутивності матриць:

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C);$$

д) властивість лінійності матриць:

$$A \cdot (r\,B + s\,C) = r\,(A \cdot B) + s\,(A \cdot C).$$