

Розділ 4. Булеві функції

4.1. Булеві змінні і функції

- *двійкові інтерпретації*
- *істинні та фіктивні змінні*

Розглянемо двохелементну множину B , елементи якої будемо позначати через 0 і 1: $B = \{0, 1\}$.

- Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини B , називаються *логічними* або *булевими змінними*. Самі значення 0 і 1 булевих змінних називаються *булевими константами*.

В мовах програмування для роботи з такими змінними, як правило, вводиться спеціальний логічний (булевський) тип (наприклад, у мовах Pascal і Java — `boolean`, у C+ — `bool`). Змінна цього типу приймає два значення: `true` і `false`.

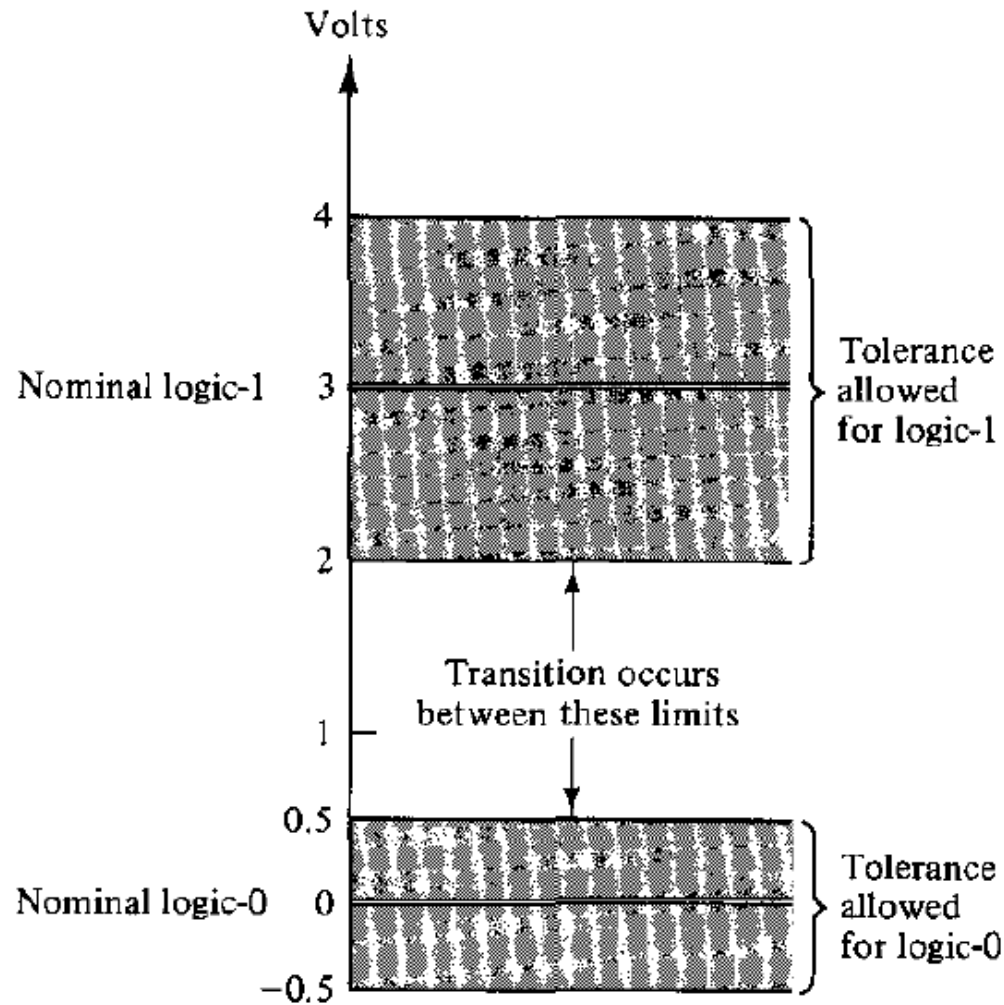
- Функція виду $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументи x_i і значення y якої належать множині B , називається ***n*-місною булевою функцією**. Такі функції також називають ***логічними*** або ***перемикальними*** функціями.
- Кортеж $(x_1; x_2, \dots, x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається ***двійковим словом (n-словом)*** або ***булевим набором*** довжини n .
- Для булевої функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретне значення булевого набору (x_1, x_2, \dots, x_n) називається також ***інтерпретацією булевої функції f***.
- Множина всіх двійкових слів, що позначається через B^n , називається ***n*-вимірним булевим кубом** і містить 2^n елементів-слів: $|B^n| = 2^n$.

Функції кількох незалежних змінних можна розглядати як функції від більшої кількості змінних. При цьому значення функції не змінюється при зміні значення цих «додаткових» змінних.

- Змінна x_i у функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ називається *неістотною* (або *фіктивною*), якщо $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ при будь-яких значеннях решти змінних, тобто якщо зміна значення x_i у будь-якому наборі значень x_1, \dots, x_n не змінює значення функції.

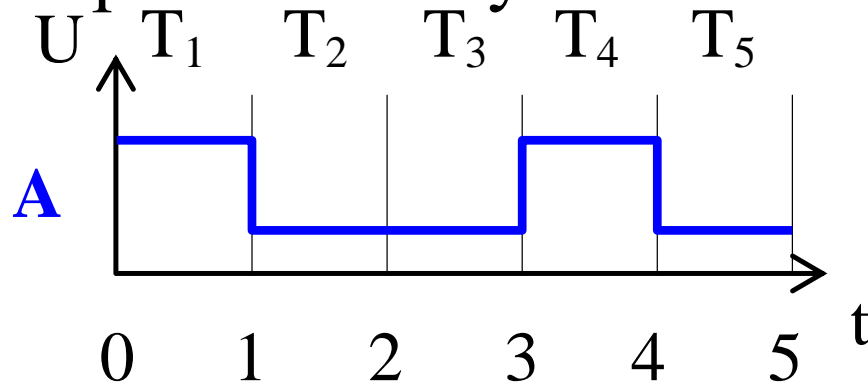
В цьому випадку функція $f(x_1, \dots, x_n)$ фактично залежить від $n-1$ змінної, тобто зображує функцію $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Двійкові сигнали



Двійкові сигнали

У цифрових пристроях змінні і відповідні їм сигнали змінюються не безперервно, а лише в дискретні моменти часу, що позначаються цілими невід'ємними числами: $0, 1, 2, \dots, i, \dots$. Часовий інтервал між сусідніми моментами дискретного часу називається тактом. У багатьох випадках цифрові пристрої містять спеціальний блок, що виробляє синхронізуючі сигнали (синхроімпульсів), які відзначають моменти дискретного часу.



Інтегральні технології

- ▶ RTL (Resistor-transistor logic) - РТЛ (Резисторно-транзисторна логіка).
- ▶ DTL (Diode-transistor logic) - ДТЛ (Диодно-транзисторна логіка).
- ▶ TTL (Transistor-transistor logic) - ТТЛ (Транзисторно-транзисторна логіка).
- ▶ ECL (Emitter-coupled logic) - ЕПЛ (емітерно-пов'язана логіка).
- ▶ MOS (Metal-oxide semiconductor) - МОН (Логіка типу метал-оксид-напівпровідник).
- ▶ CMOS (Complementary metal-oxide semiconductor) - КМОП (Комплементарна МОН логіка).

Комбінаційна логіка

- В теорії цифрових пристроїв комбінаційною логікою (комбінаційною схемою) називають логіку функціонування пристроїв комбінаційного типу. У комбінаційних пристроїв стан виходу однозначно визначається набором вхідних сигналів.
- Цифровий автомат - це приклад пристрою (схема), реакція якого (якої) залежить не лише від значень входів, але й від стану в попередній момент часу.

Основи синтезу комбінаційних схем

- Логічні функції І (AND), АБО (OR), НІ (NOT) складають функціонально повний базис. Апаратні засоби, що реалізують ці функції називаються логічними, вентильними або елементами перемикачів (схемами). Функціональна повнота базису означає можливість опису за допомогою нього будь-якої логічної функції. А логічні елементи, що реалізують цей базис, дозволяють апаратно реалізовувати будь-яку логічну функцію.

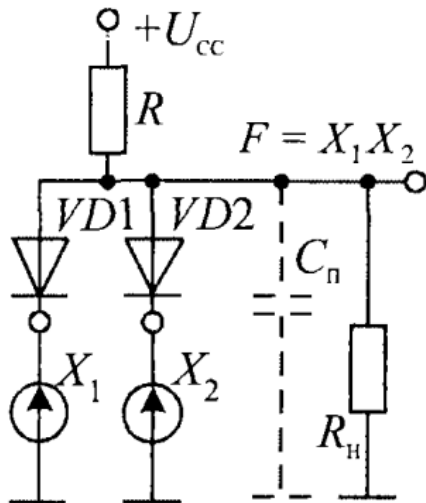
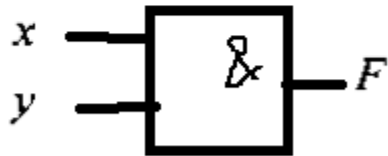
- Елемент І представлений на рисунку. Він реалізує операцію кон'юнкції або логічного множення.

AND

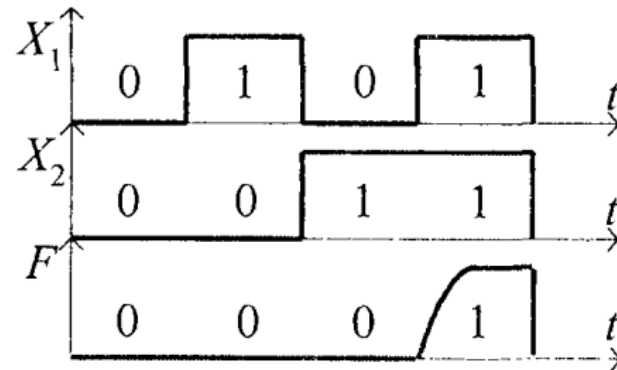
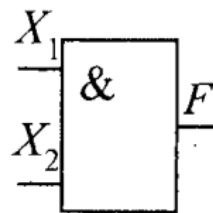


$$F = xy$$

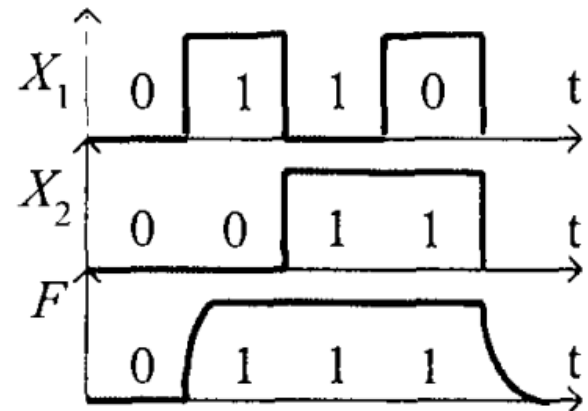
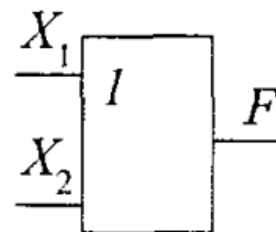
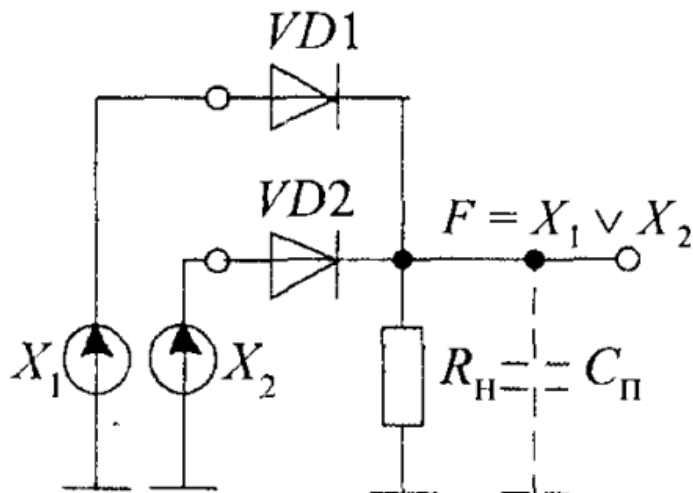
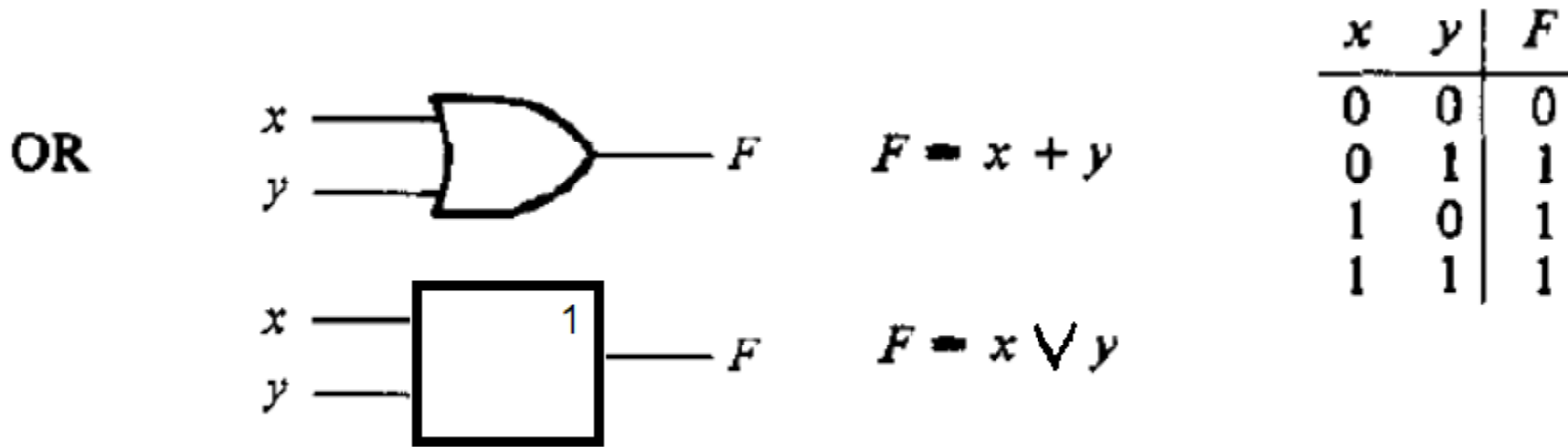
x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$$F = X_1 X_2$$

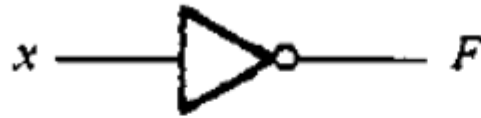


- Елемент АБО представлений на рисунку. Він реалізує операцію диз'юнкції або логічного додавання.



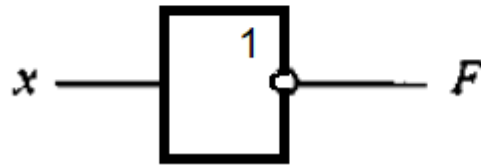
- Елемент ІІ представлений на рисунку. Він реалізує операцію заперечення.

Inverter

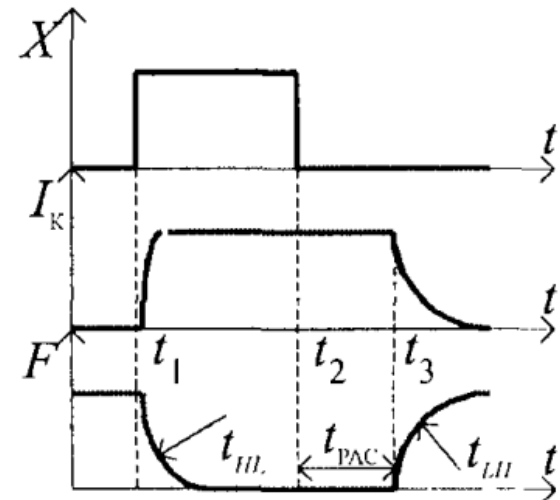
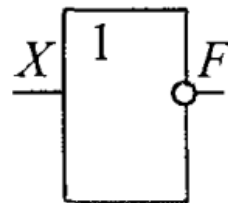
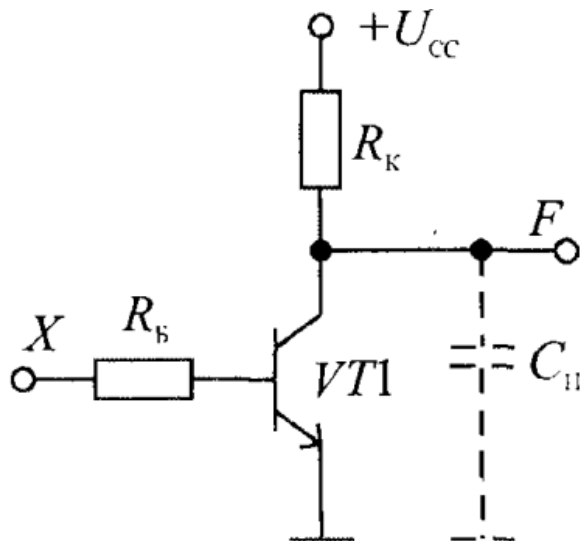


$$F = x'$$

x	F
0	1
1	0



$$F = \bar{x}$$



4.2. Способи задання булевих функцій

- *таблиця істинності*
- *булева алгебра*
- *пріоритет операцій*

Булеві функції можуть бути задані такими способами:

1. За допомогою таблиці істинності (значеннями на кожній з інтерпретацій).
2. Аналітично (у вигляді формули).

➤ Таблиці, в яких кожній інтерпретації (тобто набору аргументів) функції поставлено у відповідність її значення, називаються ***таблицями істинності булевої функції***.

В таблиці істинності кожній змінній та значенню самої функції відповідає по одному стовпчику, а кожній інтерпретації — по одному рядку. Кількість рядків у таблиці відповідає кількості різних інтерпретацій функції.

Булеві функції однієї змінної

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$\varphi_0 = 0$ — константа 0,

$\varphi_1 = x$ — повторення аргументу,

$\varphi_2 = \bar{x}$ — інверсія або заперечення аргументу,

$\varphi_3 = 1$ — константа 1.

Позначення булевих функцій двох змінних

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_0(x, y)$	0	константа 0	константа 0
$f_1(x, y)$	$x \wedge y = xy$	кон'юнкція (логічне «і»)	x і y
$f_2(x, y)$	$x \leftarrow y$	заперечення імплікації	x і не y
$f_3(x, y)$	x	повторення першого аргументу	як x
$f_4(x, y)$	$y \leftarrow x$	заперечення оберненої імплікації	не x і y
$f_5(x, y)$	y	повторення другого аргументу	як y
$f_6(x, y)$	$x \oplus y$	що виключає «або» (сума за модулем 2)	x не як y
$f_7(x, y)$	$x \vee y$	диз'юнкція (логічне «або»)	x або y

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_8(x, y)$	$x \downarrow y$	заперечення диз'юнкції (стрілка Пірса)	не x і не y
$f_9(x, y)$	$x \sim y$	еквівалентність	x як y
$f_{10}(x, y)$	\bar{y}	заперечення другого аргументу	не y
$f_{11}(x, y)$	$y \rightarrow x$	обернена імплікація	x , якщо y (x або не y)
$f_{12}(x, y)$	\bar{x}	заперечення першого аргументу	не x
$f_{13}(x, y)$	$x \rightarrow y$	імплікація	якщо x , то y (не x або y)
$f_{14}(x, y)$	$x y$	заперечення кон'юнкції (штрих Шеффера)	не x або не y
$f_{15}(x, y)$	1	константа 1	константа 1

Булева алгебра

- **Булева алгебра** (загальна) — це алгебраїчна структура $(A, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1)$ з бінарними операціями $\wedge, \vee: A^2 \rightarrow A$, унарною операцією « $\bar{}$ »: $A \rightarrow A$ і виділеними елементами $0, 1$ в носії A , які задовольняють властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності.
- Якщо носій алгебраїчної структури $B = \{0, 1\}$ складається з двох елементів, то така структура $(B, \wedge, \vee, \bar{})$ називається **двохелементною булевою алгеброю**.
- **Алгеброю логіки** називається двухелементна булева алгебра $(B, \wedge, \vee, \bar{}, \rightarrow, \sim)$, $B = \{0, 1\}$, в якій множині операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією та еквівалентністю.

- **Формула** — це вираз, що містить булеві функції та їхні суперпозиції.
- **Суперпозицією** називається спосіб одержання нових функцій шляхом підстановки значень одних функцій замість значень аргументів інших функцій, при цьому деякі з функцій можуть тотожно співпадати з однією із змінних.

Якщо у формулі відсутні дужки, то

операції виконуються у такій послідовності:

заперечення $\bar{\quad}$

кон'юнкція \wedge

диз'юнкція \vee

імплікація \rightarrow

еквівалентність \sim

На відміну від табличного задання, зображення функції формулою не єдине.

- Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються *еквівалентними* або *рівносильними*.

Приклад. Функцію штрих Шеффера можна зобразити за допомогою основних операцій булевої алгебри формулами:

$$f_{14} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \quad \text{або} \quad f_{14} = \overline{x_1 x_2}$$

а функцію стрілка Пірса таким чином:

$$f_8 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad \text{або} \quad f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$$

4.3. Двоїстість

- *двоїсті та самодвоїсті булеві функції*
- *принцип двоїстості*
- *побудова двоїстої функції за таблицею*
- *побудова двоїстої функції за формулою*

- Функція $f^*(x_1, \dots, x_n)$ називається **двоїстою** до функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Для будь-якої функції двоїста їй визначається однозначно. $(f^*)^* = f$

$$\begin{aligned} (f^*(x_1, x_2, \dots, x_n))^* &= (\overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})})^* = \\ &= \overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

- Якщо функції рівні, то і двоїсті їм функції також рівні: $f_1 = f_2$, то $f_1^* = f_2^*$.
- Функція, двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називається **самодвоїстою**.

Щоб побудувати таблицю істинності функції, що двоїста даній, необхідно побудувати таблицю істинності заданої функції, кожне значення булевої функції замінити на протилежне і записати одержаний стовпчик у зворотній послідовності.

Приклад.

Знайти функцію, яка двоїста функції $f(x, y, z)$, якщо відомо, що $f(x, y, z) = 1$ тільки на інтерпретаціях (001), (011), (111).

x	y	z	f	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Нехай функція F задана як суперпозиція функцій f_0 і функцій $f_1, \dots, f_n: F = f_0(f_1, \dots, f_n)$. Функцію F^* , що двоїста F , можна одержати, замінивши в формулі F функції $f_0; f_1, \dots, f_n$ на двоїсті до них.

Вкажемо функції, що двоїсті до «елементарних» функцій логіки $\wedge, \vee, \bar{}$, константа 0, константа 1:

$$f(x, y) = \bar{x} \wedge y;$$

$$f^*(x, y) = \bar{x} \vee y;$$

$$f(x) = \bar{x};$$

$$f^*(x) = \bar{\bar{x}} = x;$$

$$f(x) = 0;$$

$$f^*(x) = \bar{0} = 1;$$

Приклад.

Знайти функцію, яка двоїста функції $f = x \vee \bar{y}z \vee 0$
 $f^* = (x \vee (\bar{y}z) \vee 0)^* = x \wedge (\bar{\bar{y}} \vee \bar{z}) \wedge 1.$

Порядок виконання операцій повинен залишитися попереднім

4.4. Закони булевої алгебри

✓ *Комутативні закони*

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

✓ *Асоціативні закони*

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

✓ *Дистрибутивні закони*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Закони булевої алгебри

✓ *Тотожності з константами*

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge 0 = 0$$

✓ *Закони ідемпотентності*

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

Закони булевої алгебри

✓ *Закон подвійного заперечення*

$$\overline{\overline{x}} = x$$

✓ *Закон протиріччя*

$$x \wedge \overline{x} = 0$$

✓ *Закон виключеного третього*

$$x \vee \overline{x} = 1$$

Закони булевої алгебри

✓ *Закони елімінації (поглинання)*

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

✓ *Закони де Моргана*

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

4.5. Диз'юнктивні та кон'юнктивні розкладання булевих функцій

- *теорема розкладання*
- *елементарні кон'юнкція і диз'юнкція*
- *конституенти нуля та одиниці*
- *нормальні форми*

Для спрощення математичних викладень
введемо двійковий параметр σ і позначення x^σ
таким чином:

$$x, \sigma \in B = \{0, 1\},$$

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0 \\ x, & \sigma = 1 \end{cases}$$

Можемо зробити висновок, що

$$x^\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma = x \\ 0, & \sigma \neq x \end{cases}$$

Теорема 1. Про диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за k змінними

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_k^{\sigma_k} \wedge f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Запис $\bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}$

означає багатократну диз'юнкцію, яка береться за всіма можливими наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ при будь-якому k ($1 \leq k \leq n$).

Приклад.

Записати диз'юнктивне розкладання функції
 $f(x, y, z, t) = (x \wedge y \vee z) \wedge t$ за змінними x, z .

Розв'язок. За теоремою про розкладання:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2)} x^{\sigma_1} \wedge z^{\sigma_2} \wedge f(\sigma_1, y, \sigma_2, t) = \\ &= \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge \underline{f(0, y, 0, t)} \vee \overline{x} \wedge z \wedge \underline{f(0, y, 1, t)} \vee \\ &\quad \vee x \wedge \overline{z} \wedge \underline{f(1, y, 0, t)} \vee x \wedge z \wedge \underline{f(1, y, 1, t)} \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$f(0, y, 0, t) = \overline{(0 \wedge y \vee 0)} \wedge t = t; \quad f(1, y, 0, t) = \overline{(1 \wedge y \vee 0)} \wedge t = \overline{y} \wedge t;$$

$$f(0, y, 1, t) = \overline{(0 \wedge y \vee 1)} \wedge t = 0; \quad f(1, y, 1, t) = \overline{(1 \wedge y \vee 1)} \wedge t = 0;$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge t \vee \overline{x} \wedge z \wedge 0 \vee x \wedge \overline{z} \wedge \overline{y} \wedge t \vee \\ &\quad \vee x \wedge z \wedge 0 = \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge t \vee x \wedge \overline{z} \wedge \overline{y} \wedge t = \overline{x} \overline{z} t \vee x \overline{z} \overline{y} t \end{aligned}$$

Наслідок 1. Диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за однією змінною.

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_i)} x_i^{\sigma_i} \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Приклад.

Записати диз'юнктивне розкладання функції
 $f(x, y, z, t) = (x \wedge y \vee z) \wedge t$ за змінною x .

Розв'язок.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \bigvee_{(\sigma_1)} x^{\sigma_1} \wedge f(\sigma_1, y, z, t) = \\ &= \bar{x} \wedge f(0, y, z, t) \vee x \wedge f(1, y, z, t) \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$f(0, y, z, t) = \overline{(0 \wedge y \vee z)} \wedge t = \bar{z} \wedge t;$$

$$f(1, y, z, t) = \overline{(1 \wedge y \vee z)} \wedge t = \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t;$$

Підставимо одержані значення:

$$f(x, y, z, t) = \bar{x} \wedge \bar{z} \wedge t \vee x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t = x \bar{z} t \vee x \bar{y} \bar{z} t$$

Наслідок 2. *Про диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за всіма змінними*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

Запис $\bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)=1}}$ означає, що диз'юнкція

береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$.

Отримати диз'юнктивне розкладання цієї функції за всіма змінними.

Розв'язок. Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(0, 0, 1) = 0 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f(0, 1, 0) = 0 \wedge 1 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(0, 1, 1) = 0 \wedge 1 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f(1, 0, 0) = 1 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(1, 0, 1) = 1 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f(1, 1, 0) = 1 \wedge 1 \vee \bar{0} = 1 \vee 1 = 1,$$

$$f(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1.$$

$$\begin{aligned} f(x, \underline{y}, \underline{z}) &= x^0 \underline{y}^0 \underline{z}^0 \vee x^0 \underline{y}^1 \underline{z}^0 \vee x^1 \underline{y}^0 \underline{z}^0 \vee x^1 \underline{y}^1 \underline{z}^0 \vee x^1 \underline{y}^1 \underline{z}^1 = \\ &= x \underline{y} \underline{z} \vee x \underline{y} \bar{z} \vee x \underline{y} \bar{z} \vee x \underline{y} \bar{z} \vee x \underline{y} z. \end{aligned}$$

- **Елементарною кон'юнкцією** називається кон'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною кон'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу 1.

Приклад.

Елементарними кон'юнкціями для функції від однієї змінної можуть бути \underline{y} , z ,

від двох змінних — $x \wedge \underline{y}$, $x \wedge z$,

від трьох змінних — $x \wedge \underline{y} \wedge z$, $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$, $x \wedge y \wedge z$

- **Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)** називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

➤ Елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$

називається **конституентою одиниці** функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$.

Конституента одиниці має такі властивості:

1. Конституента одиниці дорівнює одиниці тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Значення конституенти одиниці однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.
3. Кон'юнкція будь-якого числа різних конституент одиниці функції дорівнює нулю.

➤ **Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)** булевої функції називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції конституент одиниці даної функції.

Теорема 2. *Про кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за k змінними*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ = \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_k^{\sigma_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Запис $\bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}$

означає багатократну кон'юнкцію, яка береться за всіма можливими наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ при будь-якому k ($1 \leq k \leq n$).

Приклад.

Записати кон'юнктивне розкладання функції
 $f(x, y, z, t) = (x \wedge y \vee z) \wedge t$ за змінними x, z .

Розв'язок. За теоремою про розкладання:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2)} x^{\sigma_1} \vee z^{\sigma_2} \vee f(\sigma_1, y, \sigma_2, t) = \\ &= (x \vee z \vee f(0, y, 0, t)) \wedge (x \vee \bar{z} \vee f(0, y, 1, t)) \wedge \\ &\wedge (\bar{x} \vee z \vee f(1, y, 0, t)) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z} \vee f(1, y, 1, t)) \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$f(0, y, 0, t) = \overline{(0 \wedge y \vee 0)} \wedge t = t; \quad f(1, y, 0, t) = \overline{(1 \wedge y \vee 0)} \wedge t = \bar{y} \wedge t;$$

$$f(0, y, 1, t) = \overline{(0 \wedge y \vee 1)} \wedge t = 0; \quad f(1, y, 1, t) = \overline{(1 \wedge y \vee 1)} \wedge t = 0;$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= (x \vee z \vee t) \wedge (x \vee \bar{z} \vee 0) \wedge (\bar{x} \vee z \vee \bar{y} \wedge t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z} \vee 0) = \\ &= (x \vee z \vee t) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z \vee \bar{y} t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Наслідок 3. *Кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за однією змінною.*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_i)} x_i^{\sigma_i} \vee f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Приклад.

Записати кон'юнктивне розкладання функції
 $f(x, y, z, t) = (x \wedge y \vee z) \wedge t$ за змінною x .

Розв'язок.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \bigwedge_{(\sigma_1)} x^{\bar{\sigma}_1} \vee f(\sigma_1, y, z, t) = \\ &= (x \vee f(0, y, z, t)) \wedge (\bar{x} \vee f(1, y, z, t)) \end{aligned}$$

Обчислимо:

$$f(0, y, z, t) = \overline{(0 \wedge y \vee z)} \wedge t = \bar{z} \wedge t;$$

$$f(1, y, z, t) = \overline{(1 \wedge y \vee z)} \wedge t = \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t;$$

Підставимо одержані значення:

$$f(x, y, z, t) = (x \vee \bar{z} t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \bar{z} t)$$

Наслідок 2. Про кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за всіма змінними

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = 0}} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

Запис $\bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = 0}}$ означає, що кон'юнкція

береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$.

Отримати кон'юнктивне розкладання цієї функції за всіма змінними.

Розв'язок. Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(0, 0, 1) = 0 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f(0, 1, 0) = 0 \wedge 1 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(0, 1, 1) = 0 \wedge 1 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f(1, 0, 0) = 1 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(1, 0, 1) = 1 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f(1, 1, 0) = 1 \wedge 1 \vee \bar{0} = 1 \vee 1 = 1,$$

$$f(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1.$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \bar{0} \vee y \bar{0} \vee z \bar{1}) \wedge (x \bar{0} \vee y \bar{1} \vee z \bar{1}) \wedge (x \bar{1} \vee y \bar{0} \vee z \bar{1}) = \\ &= (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

➤ **Елементарною диз'юнкцією** називається диз'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною диз'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу 0.

Приклад.

Елементарними диз'юнкціями для функції від однієї змінної можуть бути \underline{y} , z ,

від двох змінних — $x \vee \underline{y}$, $x \vee z$,

від трьох змінних — $x \vee \underline{y} \vee z$, $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$, $x \vee y \vee z$

➤ **Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)** називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.

➤ Елементарна диз'юнкція $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$

називається **конституентою нуля** функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Конституента нуля має такі властивості:

1. Конституента нуля дорівнює нулю тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Значення конституенти нуля однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.
3. Диз'юнкція будь-якого числа різних конституент нуля функції дорівнює одиниці.

➤ **Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)** булевої функції називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції конституент нуля даної функції.

4.6. Нормальні форми зображення булевих функцій

- *алгоритми переходу від таблиць істинності булевих функцій до ДДНФ/ДКНФ і навпаки*
- *алгоритми переходу від довільної формули до ДКНФ і ДДНФ*

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ

1. Виділити всі інтерпретації $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких значення функції дорівнює одиниці.
2. Записати конституенти одиниці $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ що відповідають відзначеним інтерпретаціям.
3. Одержати ДДНФ функції за допомогою з'єднання операцією диз'юнкції записаних конститuent одиниці.

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДКНФ

1. Виділити всі інтерпретації $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких значення функції дорівнює нулю.
2. Записати константи нуля $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$ що відповідають виділеним інтерпретаціям.
3. Записавши кон'юнкцію конститuent нуля, одержати ДКНФ функції.

Приклад. Одержати ДДНФ та ДКНФ для функції

x	y	$f_8(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f_8(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

$$\text{ДДНФ: } f_8(x, y) = x^0 y^0 = \bar{x} \bar{y}.$$

$$\begin{aligned} \text{ДКНФ: } f_8(x, y) &= (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}}) (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}}) (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}}) = \\ &= (x \vee \bar{y}) (\bar{x} \vee y) (\bar{x} \vee \bar{y}). \end{aligned}$$

Одержання таблиці істинності функції, що задана ДДНФ або ДКНФ, зображує процедуру, обернену розглянутій вище.

Приклад. Для функції, що задана ДДНФ,

$$f(x, y, z) = x y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$$

побудувати її таблицю істинності.

Розв'язок. Дана функція містить три конституенти одиниці — $x y \bar{z}$, $\bar{x} y z$, $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$, яким відповідають інтерпретації $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$. На даних інтерпретаціях функція дорівнює одиниці, на решті — нулю.

Таблиця істинності $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$

x	y	z	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Приклад. Для функції, що задана ДКНФ,

$$g(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

побудувати її таблицю істинності.

Розв'язок. Конституентам нуля $x \vee y \vee \bar{z}$, $\bar{x} \vee y \vee z$, $\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ даної функції відповідають інтерпретації $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$. В наведених інтерпретаціях функція дорівнює нулю, в решті — одиниці.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДДНФ

1. Виключити константи (закони дій з константами).
2. Опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні (закони де Моргана).
3. Розкрити дужки (дистрибутивний закон), спростити і звести подібні (закони ідемпотентності й протиріччя). Одержано ДНФ.
4. Побудувати конституенти одиниці функції введенням у кожну елементарну кон'юнкцію відсутніх змінних (закон виключеного третього).
5. Розкрити дужки (дистрибутивний закон) і звести подібні (закон ідемпотентності). Одержано ДДНФ функції.

Приклад. Побудувати ДДНФ функції

$$f(x, y, z) = \overline{xy \vee (x(z \vee \bar{y}) \vee yz)}$$

Розв'язок. Опускаємо заперечення на змінні, використовуючи закони де Моргана

$$\begin{aligned} \overline{xy \vee (x(z \vee \bar{y}) \vee yz)} &= \overline{xy \vee x(z \vee \bar{y}) \wedge yz} = \\ &= \overline{xy \vee (x \vee (z \vee \bar{y}))(\bar{y} \vee \bar{z})} = \overline{xy \vee (x \vee zy)(\bar{y} \vee \bar{z})} \end{aligned}$$

Розкриваємо дужки (дистрибутивний закон)

$$= \overline{xy \vee x\bar{y} \vee xz \vee zy\bar{y} \vee zy\bar{z}} =$$

Спростуємо (закони ідемпотентності і протиріччя)

$$= \overline{xy \vee x\bar{y} \vee xz \vee 0 \vee zy} = \overline{xy \vee x\bar{y} \vee xz \vee zy}$$

Одержано ДНФ.

Дана функція залежить від трьох змінних, тому до елементарних кон'юнкцій необхідно ввести відсутні змінні (закон виключення третього)

$$xy \vee \overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{zy} =$$

$$= xy(z \vee \overline{z}) \vee \overline{xy}(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}(y \vee \overline{y})\overline{z} \vee (x \vee \overline{x})\overline{y}\overline{z} =$$

Розкриваємо дужки (дистрибутивний закон)

$$= xyz \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} =$$

Зводимо подібні (закон ідемпотентності)

$$= xyz \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz}$$

Одержано ДДНФ.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДКНФ

1. Виключити константи (закони дій з константами).
2. Опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні (закони де Моргана).
3. Звести функцію до виду кон'юнкції елементарних диз'юнкцій (дистрибутивний закон), спростити і звести подібні (закони ідемпотентності і виключеного третього). Одержано КНФ.
4. Побудувати конституенти нуля функції введенням у кожен елементарну диз'юнкцію відсутніх змінних (закон протиріччя).
5. Звести функцію до виду кон'юнкції конститuent нуля (дистрибутивний закон) і спростити (закон ідемпотентності). Одержано ДКНФ функції.

Приклад. Побудувати ДКНФ функції

$$f(x, y, z) = \overline{xy \vee (x(z \vee \bar{y}) \vee yz)}$$

Розв'язок. Опускаємо заперечення на змінні, використовуючи закони де Моргана

$$\begin{aligned} \overline{xy \vee (x(z \vee \bar{y}) \vee yz)} &= \overline{xy \vee x(z \vee \bar{y}) \wedge \bar{y}z} = \\ &= \overline{xy \vee (\bar{x} \vee \overline{(z \vee \bar{y})})} \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) = \overline{xy \vee (\bar{x} \vee \bar{z}y)} \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Будуємо КНФ

(дистрибутивний закон $a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$)

$$= xy \vee (\bar{x} \vee y \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}) =$$

$$= xy \vee (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})) \wedge \\ \wedge (y \vee (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})) =$$

$$= (x \vee \bar{x} \vee y)(x \vee \bar{x} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee y) \wedge \\ \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee y \vee \bar{z}) =$$

ідемпотентність і виключення третього

$$= 1 \wedge 1 \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge 1 =$$

$$= (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \quad \text{Одержано КНФ.}$$

Дана функція залежить від трьох змінних, тому до елементарних диз'юнкцій необхідно ввести відсутні змінні (закон протиріччя)

$$\begin{aligned} & (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \\ & = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \end{aligned}$$

Знову дистрибутивний закон

$$= (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$$

Зводимо подібні (закон ідемпотентності)

$$= (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

Одержано ДКНФ.