

Розділ Булеві функції

Мінімізація булевих функцій

- *метод карт Карно*
- *метод діаграм Вейча (мінімізація на множині КНФ)*
- *мінімізація частково визначених функцій*
- *метод Нельсона*
- *метод Квайна*
- *метод Мак-Класкі*
- *метод Порецького — Блейка*

Задача мінімізації складається з пошуку найпростішої, згідно з обраним критерієм, формули.

- **Канонічною задачею мінімізації** називається задача мінімізації на множині ДНФ і КНФ кількості символів змінних та операцій, що містяться у формулі. Мінімальні форми, що одержані в результаті її розв'язку, називаються мінімальними ДНФ і КНФ.
- **Імплікантою** деякої функції f називається функція g , така, що на всіх інтерпретаціях, на яких g дорівнює одиниці, f теж дорівнює одиниці.

Конституенти одиниці функції є її імплікантами; елементарні кон'юнкції, що входять до складу ДНФ функції, також є її імплікантами.

- Множина S , що складається з імплікант функції f , називається **покриттям** (або **повною системою імплікант**) функції f , якщо кожне одиничне значення функції f покривається одиницею хоча б одної імпліканти з множини S .

Набір імплікант, складових ДНФ функції, є її покриттям. Набір всіх конститuent одиниці функції, що входять до її ДДНФ, є покриттям даної функції.

- Будь-яку елементарну кон'юнкцію A , що входить до складу елементарної кон'юнкції B і містить менше змінних, ніж кон'юнкція B , називають **власною частиною кон'юнкції B** , і вважають, що кон'юнкція A **покриває** кон'юнкцію B .

➤ **Простою імплікантою** функції f називається така кон'юнкція-імпліканта, що ніяка її власна частина не є імплікантою даної функції.

Мінтерми функції є її імплікантами, елементарні кон'юнкції, що входять до складу ДНФ функції, також є її імплікантами.

➤ Множина всіх простих імплікант функції становить **покриття** даної функції.

➤ Диз'юнкція всіх простих імплікант функції називається її **скороченою ДНФ**.

- **Диз'юнктивним ядром булевої функції f** називається така множина її простих імплікант, яка створює покриття f , але після видалення будь-якої імпліканти втрачає цю властивість, тобто перестає бути повною системою імплікант.
- **Тупиковою ДНФ** називається ДНФ даної булевої функції, що складається тільки з простих імплікант.

Кожна булева функція має єдину скорочену ДНФ і може мати декілька тупикових ДНФ. У кожну з тупикових ДНФ входять всі імпліканти диз'юнктивного ядра даної функції.

- **Мінімальною ДНФ (МДНФ)** даної булевої функції називається одна з її тупикових ДНФ, якій відповідає найменше значення критерію мінімізації ДНФ.

Для знаходження множини простих імплікант функції, що задана СДНФ, використовуються такі перетворення формул булевої алгебри:

операція неповного диз'юнктивного склеювання:

$$A x \vee A \bar{x} = A \vee A x \vee A \bar{x}.$$

операція диз'юнктивного поглинання:

$$A \vee A x = A.$$

Виконання обох операцій послідовно - це

операція повного диз'юнктивного склеювання:

$$A x \vee A \bar{x} = A.$$

Тут A — деяка елементарна кон'юнкція змінних,
 x — булева змінна.

Приклад. Нехай є функція f , що задана ДДНФ:

$$f(x, y, z) = x y z \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}.$$

Виконаємо операції повного склеювання :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x y z \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} = \\ &= (x y z \vee \bar{x} y z) \vee (\bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z) \vee (\bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}) = \\ &= y z \vee \bar{x} z \vee \bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

Виконаємо операції склеювання іншим способом:

$$f(x, y, z) = (x y z \vee \bar{x} y z) \vee (\bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}) = y z \vee \bar{x} \bar{y}.$$

В обох випадках одержані тупикові ДНФ функції $f(x, y, z)$. Друга тупикова ДНФ простіша за першу, оскільки містить меншу кількість символів змінних і знаків операцій.

Таблиця істинності функції $f(x,y,z)$ та її трьох імплікант, що входять до складу ДНФ

x	y	z	$f(x,y,z)$	yz	$\bar{x}z$	$\bar{x}\bar{y}$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0

- Для аналізу різних зображень булевої функції через КНФ і одержання мінімальних КНФ трансформуємо викладені вище поняття за принципом двоїстості: *імпліцента, проста імпліцента, повна система імпліцент, скорочена КНФ, тупикова КНФ, мінімальна КНФ.*

Використовувані для мінімізації КНФ операції склеювання мають такий вигляд:

Операція неповного кон'юнктивного склеювання:

$$(A \vee x)(A \vee \bar{x}) = A(A \vee x)(A \vee \bar{x}).$$

Операція кон'юнктивного поглинання:

$$A(A \vee x) = A.$$

Операція повного кон'юнктивного склеювання:

$$(A \vee x)(A \vee \bar{x}) = A.$$

Мінімізація булевих функцій методом карт Карно

Ціллю мінімізації є знаходження мінімальної з тупикових ДНФ (КНФ), тобто знаходження мінімального покриття даної функції.

Для цього необхідно побудувати всі можливі тупикові ДНФ (КНФ), використовуючи операції склеювання та поглинання для даної функції. Методика Карно і Вейча дозволяє виконати ці операції графічно.

Карта Карно для ДНФ (діаграма Вейча — для КНФ) є аналогом таблиці істинності, зображеній у спеціальній формі.

x		0	1
y			
0	$\bar{x} \bar{y}$	$x \bar{y}$	
1	$\bar{x} y$	$x y$	

Структура карти Карно для двох змінних

Структура карти Карно для трьох змінних

xy		00	01	11	10
z					
0	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	$\bar{x} y \bar{z}$	$x y \bar{z}$	$x \bar{y} \bar{z}$	
1	$\bar{x} \bar{y} z$	$\bar{x} y z$	$x y z$	$x \bar{y} z$	

До конститuent одиниці, що відповідають будь-яким двом сусіднім кліткам, можна застосувати операцію склеювання, оскільки вони відрізняються тільки однією змінною. На карті Карно для функції трьох змінних кожна клітка має три сусідні клітки, на карті Карно для функції чотирьох змінних — чотири, для функції п'яти змінних — п'ять тощо.

xy	00	01	11	10
z				
0				
1		A		

xy	00	01	11	10
z				
0				
1				B

Приклад. Побудувати карту Карно для функції

$$f(x, y, z) = x y z \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}.$$

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Правило склеювання кліток і запису МДНФ

1. Побудувати карту Карно, що відповідає даній функції.
2. Клітки об'єднуються у групи, що позначають операції склеювання. В об'єднанні беруть участь тільки сусідні клітки, в яких знаходяться **одиниці**.
3. В групу можна об'єднати кількість кліток, що дорівнює 2^n , $n = 1, 2, 3, \dots$. При цьому група може мати тільки **прямокутну або квадратну форму**.
4. Задача склеювання полягає у знаходженні набору **максимальних груп** кліток. Кількість груп у наборі повинна бути мінімальною, оскільки така група відповідає мінімальній тупиковій ДНФ. Кожна одиниця карти Карно повинна входити хоча б до однієї групи, що забезпечує покриття функції одержаним набором імплікант.

5. Кожна група кліток, що одержана після склеювання, відповідає тій імпліканті функції, реальні змінні якої мають однакове значення для всіх кліток групи. Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідають одиничні значення, і із запереченням — в іншому випадку.
6. Диз'юнкція всіх одержаних простих імплікант є мінімальною ДНФ.

Приклад. Побудувати карту Карно для функції

$$f(x, y, z) = x y z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x y \bar{z}.$$

xy	00	01	11	10
z	0	1	1	0
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

A B

Імпліканта $A = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} = \bar{x} \bar{y} (z \vee \bar{z}) = \bar{x} \bar{y}.$

Імпліканта $B = x y z \vee \bar{x} y z = (x \vee \bar{x}) y z = y z.$

МДНФ: $f(x, y, z) = A \vee B = \bar{x} \bar{y} \vee y z.$

Приклад. Знайти МДНФ для функції

$$f(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee x y z.$$

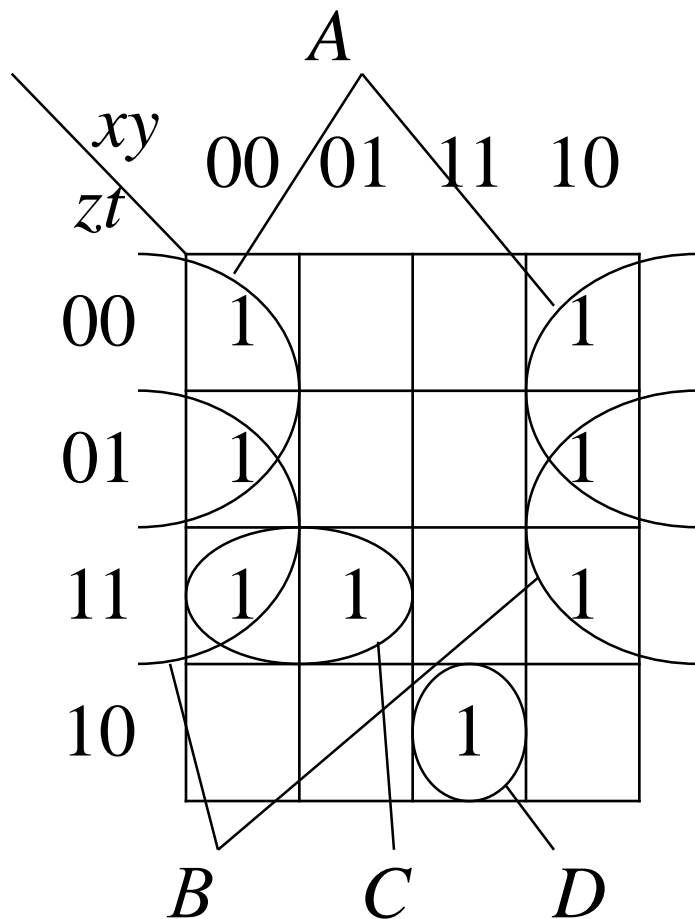
$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

A
 B
 C

$$\text{МДНФ } f(x, y, z) = A \vee B \vee C = \bar{x} \bar{y} z \vee y \bar{z} \vee x y.$$

Приклад. Побудувати МДНФ для функції

$$f(x, y, z, t) = x y z \bar{t} \vee x \bar{y} z t \vee \bar{x} y z t \vee \bar{x} \bar{y} z t \vee \\ \vee x \bar{y} \bar{z} t \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} t \vee x \bar{y} \bar{z} \bar{t} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{t}.$$



МДНФ:

$$f(x, y, z, t) = A \vee B \vee C \vee D = \\ = \bar{y} \bar{z} \vee \bar{y} t \vee \bar{x} z t \vee x y z \bar{t}.$$

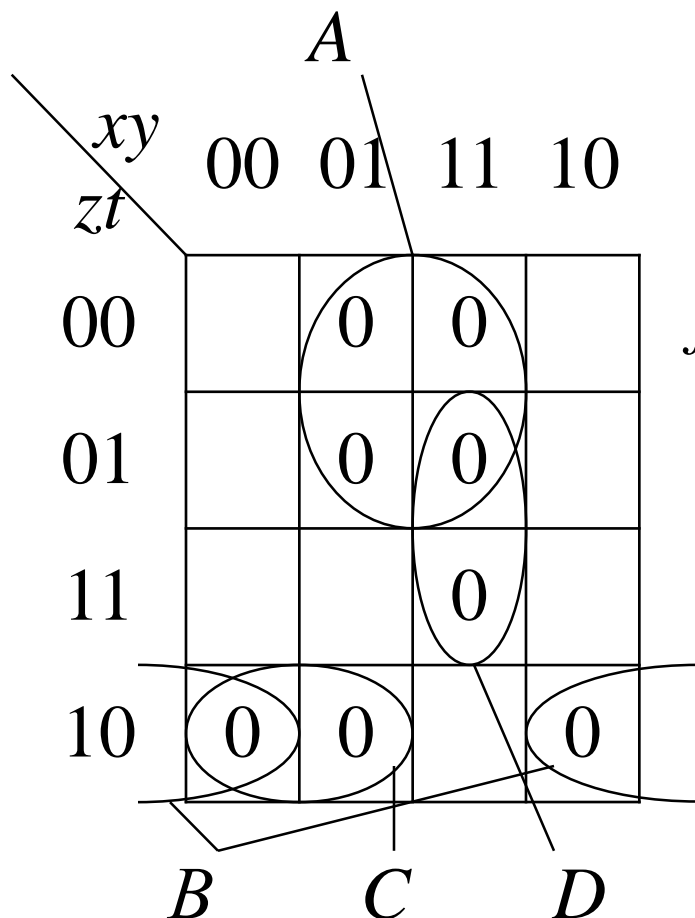
Мінімізація булевих функцій методом діаграм Вейча

Для мінімізації булевої функції на множині КНФ використовуються діаграми Вейча. Їх побудова аналогічна картам Карно. На карті позначаються клітки, що відповідають інтерпретаціям, на яких функція дорівнює нулю. Після цього проводиться склеювання кліток, що містять нулі і формування мінімальної КНФ. **Склеювання кліток здійснюється за тими ж правилами, що й при диз'юнктивній мінімізації.** Кожна група кліток, що одержана в результаті склеювання, відповідає диз'юнкції тільки тих змінних, які мають однакове значення для всіх кліток групи. **Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідає нульове значення, і із запереченням — в іншому випадку.** Кон'юнкція одержаних елементарних диз'юнкцій є результатом мінімізації формули

Приклад. Побудувати МКНФ для функції

$$f(x, y, z, t) = x y z \bar{t} \vee x \bar{y} z t \vee \bar{x} y z t \vee \bar{x} \bar{y} z t \vee$$

$$\vee x \bar{y} \bar{z} t \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} t \vee x \bar{y} \bar{z} \bar{t} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{t}.$$



МКНФ:

$$f(x, y, z, t) = A \wedge B \wedge C \wedge D =$$

$$= (\bar{y} \vee z) \wedge (y \vee \bar{z} \vee t) \wedge$$

$$\wedge (x \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t}).$$

Мінімізація частково визначених функцій

Якщо для розв'язку задачі використовуються не всі набори вхідних даних, то припустиме будь-яке значення функції на інтерпретаціях, що не використовуються, і така функція називається *частково визначеною*. Іншими словами, функція не визначена на вказаних інтерпретаціях. При мінімізації такі функції довизначаються так, щоб одержати найбільш економічну мінімальну ДНФ (КНФ).

Приклад. Функція $f(x, y, z, t)$ дорівнює одиниці на наборах $(0,0,1,0)$, $(0,1,1,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,0)$ і не визначена, якщо $xy = 1$. Необхідно побудувати МДНФ та МКНФ.

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00			x	1
01			x	
11			x	
10	1	1	x	1

A
 B

МДНФ:

$$f(x, y, z, t) = A \vee B = z \bar{t} \vee x \bar{t}.$$

Приклад. Функція $f(x, y, z, t)$ дорівнює одиниці на наборах $(0,0,1,0)$, $(0,1,1,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,0)$ і не визначена, якщо $xy = 1$. Необхідно побудувати МДНФ та МКНФ.

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	0	0	x	
01	0	0	x	0
11	0	0	x	0
10			x	

C
 D

МДНФ:

$$f(x, y, z, t) = A \vee B = z \bar{t} \vee x \bar{t}.$$

МКНФ:

$$f(x, y, z, t) = C \wedge D = \bar{t} \wedge (x \vee z).$$

Характеристика методів Карно та Вейча

- Методи не є формальними і складні для програмної реалізації.
- Методи не зручні у застосуванні до функцій з кількістю змінних більше шести.
- Перевагою методів є простота сприйняття та вивчення для людини.

Мінімізація булевих функцій методом Нельсона

Метод мінімізації Нельсона реалізує перехід від КНФ до скороченої ДНФ.

1. Записати КНФ заданої функції.
2. Розкрити дужки за дистрибутивним законом, спростити і звести подібні (закони ідемпотентності й протиріччя).
3. Виконати всі можливі операції диз'юнктивного поглинання. Результуюча формула є СДНФ функції.

Приклад. Знайти методом Нельсона СДНФ функції

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}).$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) = \\ &= (x \bar{x} \vee \bar{y} \bar{x} \vee x z \vee \bar{y} z)(x \vee y \vee \bar{z}) = \\ &= x \bar{x} x \vee \bar{y} \bar{x} x \vee x z x \vee \bar{y} z x \vee x \bar{x} y \vee \bar{y} \bar{x} y \vee \\ &\vee x z y \vee \bar{y} z y \vee x \bar{x} z \vee \bar{y} \bar{x} z \vee x z \bar{z} \vee \bar{y} z \bar{z} = \\ &= x z \vee x \bar{y} z \vee x y z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} \end{aligned}$$

Характеристика методу Нельсона

- Метод є формальним, але складний для програмної реалізації.
- Метод зручний, тільки якщо функція задана у вигляді КНФ.
- Результатом є скорочена, а не мінімальна форма. Для отримання мінімальної форми треба скористатися ще якимось методом.

Мінімізація булевих функцій методом Квайна

Метод мінімізації Квайна також реалізує перехід від ДДНФ до мінімальної ДНФ з використанням операцій склеювання та поглинання.

1. Записати ДДНФ заданої функції.
2. Виконати всі можливі операції неповного диз'юнктивного склеювання. Результуюча формула є диз'юнкцією всіх можливих імплікант даної функції.
3. Виконати всі можливі операції диз'юнктивного поглинання. Результуюча формула є СДНФ функції.

4. Скласти імплікантну таблицю і знайти диз'юнктивне ядро.
5. Спростити імплікантну таблицю за допомогою видалення рядків, що відповідають імплікантам диз'юнктивного ядра, і стовпців, що відповідають тим конститuentам одиниці, які покриваються імплікантами ядра. Якщо при мінімізації деякої функції виходить, що спрощена імплікантна таблиця порожня, то тупикова ДНФ цієї функції складається тільки з імплікант диз'юнктивного ядра.
6. Знайти всі тупикові ДНФ даної функції.
7. Знайти мінімальну ДНФ.

Приклад. Знайти методом Квайна МДНФ функції

$$f(x, y, z) = x y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}.$$

Розв'язок. Виконаємо всі можливі операції диз'юнктивного склеювання і поглинання:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \underline{x y z} \vee \underline{x \bar{y} \bar{z}} \vee \underline{\bar{x} y z} \vee \underline{\bar{x} \bar{y} z} \vee \underline{\bar{x} \bar{y} \bar{z}} \vee \\ &\vee y z \quad \vee \bar{y} \bar{z} \quad \vee \bar{x} z \quad \vee \bar{x} \bar{y} = \\ &= y z \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} z \vee \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

Імплікантна таблиця функції

$$f(x, y, z) = x y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}.$$

	$x y z$	$x \bar{y} \bar{z}$	$\bar{x} y z$	$\bar{x} \bar{y} z$	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$
$y z$	*		*		
$\bar{y} \bar{z}$		*			*
$\bar{x} z$			*	*	
$\bar{x} \bar{y}$				*	*

Виділення диз'юнктивного ядра та спрощення імплікантної таблиці

	$x y z$	$x \bar{y} \bar{z}$	$\bar{x} y z$	$\bar{x} \bar{y} z$	$\bar{x} y \bar{z}$
$y z$	*		*		
$\bar{y} \bar{z}$		*			*
$\bar{x} z$			*	*	
$\bar{x} \bar{y}$				*	*

Ядро
 $y z \vee \bar{y} \bar{z}$

За спрощеною імплікантною таблицею
знаходимо тупикові ДНФ

	$\bar{x} \bar{y} z$
$\bar{x} z$	*
$\bar{x} \bar{y}$	*

ДНФ1: $f(x, y, z) = y z \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} z = \text{МДНФ}$

ДНФ2: $f(x, y, z) = y z \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y}$

Характеристика методу Квайна

- Метод є формальним, але складний для програмної реалізації.
- Вихідними даними для методу є ДДНФ, а функція може бути задана в іншому вигляді, отже ДДНФ треба знайти окремо.
- Для функції великого числа змінних перелічення варіантів склеювання і множини тупикових ДНФ є значною складністю.

Мінімізація булевих функцій методом Мак-Класкі

Метод мінімізації Мак-Класкі є переробкою методу Квайна. Удосконалення, що введене Мак-Класкі, спрощує запис мінімізаційної формули - операції склеювання і поглинання проводяться не з самими імплікантами, а з їх двійковими кодами, що робить алгоритм простим у програмній реалізації.

- Конституенти одиниці записуються у вигляді двійкового коду — номеру конституенти. Імпліканти, що одержані в результаті застосування операцій неповного склеювання, також записуються у вигляді двійкових кодів - у позиціях коду, що відповідають реальним змінним імпліканти, поміщається набір значень змінних, який обертає імплікату на одиницю, в позиціях фіктивних змінних імпліканти ставиться прочерк.
- Множина кодів імплікант ділиться на групи за кількістю одиниць, що в них утримуються. Оскільки операції неповного склеювання застосовні до імплікант, коди яких відрізняються значенням тільки в одній позиції, в склеюванні можуть брати участь тільки імпліканти, що належать до сусідніх груп, номери яких відрізняються на одиницю.

- Виконання операцій склеювання здійснюється покроково. На першому кроці здійснюються всі можливі склеювання конститuent одиниці, на другому кроці здійснюється склеювання на множині імплікант, що одержані на першому кроці, тощо. Ділення на групи та кроки дозволяє істотно скоротити кількість перевірок пар імплікант на можливість здійснення склеювання і робить алгоритм більш ефективним.
- При виконанні операцій поглинання з формули видаляються всі імпліканти, що не є простими, тобто брали участь хоча б в одному склеюванні. Результуюча формула зображує диз'юнкцію простих імплікант функції — її скорочену ДНФ.

1. Згрупувати двійкові коди імплікант з однаковою кількістю одиниць. Число одиниць m - індекс групи. Упорядкувати групи за зростанням m .
2. Починаючи з $m = 0$, порівняти кожний двійковий код в групі з індексом m з кожним кодом з групи з індексом $m + 1$. Якщо вони різні тільки в одному розряді, то у наступний стовпчик таблиці записати відповідний їм двійковий код з порожньою позначкою «-» на місці зазначеного розряду. Імпліканти, що брали участь у заміні, не є простими, позначити їх знаком «V». Решту кодів позначити «X» (це прості імпліканти).
3. Якщо серед знов одержаних імплікант є однакові, то з них для подальшого використання залишити тільки одну.
4. Повторювати кроки 1-3 доти, доки існує можливість одержувати нові коди імплікант.

Приклад. Знайти за допомогою метода Мак-Класкі мінімальну ДНФ функції:

$$f(x, y, z, t) = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \overline{t} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} t \vee \overline{x} \overline{y} z \overline{t} \vee \overline{x} \overline{y} z t \vee$$

$$\vee \overline{x} y \overline{z} t \vee \overline{x} y z t \vee x \overline{y} \overline{z} \overline{t} \vee x \overline{y} z \overline{t} \vee x y \overline{z} \overline{t} \vee$$

$$\vee x \overline{y} z t \vee x y \overline{z} t.$$

Розв'язок. Запишемо конституенти одиниці даної функції у вигляді двійкових кодів

Двійкові коди конститuent одиниці функції

номер	код	конституента
0	0000	$\bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{t}$
1	0001	$\bar{x} \bar{y} \bar{z} t$
2	0010	$\bar{x} \bar{y} z \bar{t}$
3	0011	$\bar{x} \bar{y} z t$
5	0101	$\bar{x} y \bar{z} t$
7	0111	$\bar{x} y z t$
8	1000	$x \bar{y} \bar{z} \bar{t}$
10	1010	$x \bar{y} z \bar{t}$
11	1011	$x y \bar{z} \bar{t}$
12	1100	$x \bar{y} z t$
13	1101	$x y \bar{z} t$

Одержання простих імплікант методом Мак-Класкі

ЦИКЛ 0				ЦИКЛ 1				ЦИКЛ 2			
<i>m</i>	Код імпл.	№ імпл.	Вид імпл.	<i>m</i>	Код	№	Вид	<i>m</i>	Код	№	Вид
0	0000	0	V	0	000-	0, 1	V	0	00--	(0, 1), (2, 3)	X
1	0001	1	V		00-0	0, 2	V		00--	(0, 2), (1, 3)	X
	0010	2	V		-000	0, 8	V		-0-0	(0, 2), (8, 10)	
	1000	8	V	00-1	1, 3	V	-0-0		(0, 8), (2, 10)		
2	0011	3	V	1	0-01	1, 5	V	1	0--1	(1, 3), (5, 7)	
	0101	5	V		001-	2, 3	V		0--1	(1, 5), (3, 7)	
	1010	10	V		-010	2, 10	V		-01-	(2, 3), (10, 11)	X
	1100	12	V		10-0	8, 10	V		-01-	(2, 10), (3, 11)	
	1100	12	V		1-00	8, 12	X				
3	0111	7	V	2	0-11	3, 7	V				
	1011	11	V		-011	3, 11	V				
	1101	13	V		01-1	5, 7	V				
					-101	5, 13	X				
					101-	10, 11	V				
					110-	12, 13	X				

Для знаходження тупикових ДНФ будуюмо
імплікантну таблицю

	0000	0001	0010	0011	0101	0111	1000	1010	1011	1100	1101
1-00							*			*	
-101					*						*
110-										*	*
00--	*	*	*	*							
-0-0	*		*				*	*			
0--1		*		*	*	*					
-01-			*	*				*	*		

Одержання спрощеної імплікантної таблиці

	0000	0001	0010	0011	0101	0111	1000	1010	1011	1100	1101
1-00							*			*	
-101					*						*
110-										*	*
00--	*	*	*	*							
-0-0	*		*				*	*			
0--1		*		*	*	*					
-01-			*	*				*	*		

Ядро $0--1 \vee -01- = \bar{x}t \vee \bar{y}z$

Спрощена імплікантна таблиця

		0000	1000	1100	1101
<i>A</i>	1-00		*	*	
<i>B</i>	-101				*
<i>C</i>	110-			*	*
<i>D</i>	00--	*			
<i>E</i>	-0-0	*	*		

Метод Петрика
для знаходження
тупикових ДНФ і
вибору з них
мінімальної.

$$(D \vee E)(A \vee E)(A \vee C)(B \vee C) = DAB \vee EAB \vee DAC \vee EC$$

Кожна кон'юнкція буквених позначень відповідає набору імплікант у деякій тупиковій ДНФ, до якої обов'язково входить також диз'юнктивне ядро.

$$\text{МДНФ } f(x, y, z, t) = \overline{y} \overline{t} \vee x y \overline{z} \vee \overline{x} t \vee \overline{y} z.$$

Характеристика методу Мак-Класкі

- Метод є формальним, не складний для програмної реалізації.
- Недолік - необхідність записувати ДДНФ функції, яка вже при семи змінних може містити більше ста конститuent одиниці.

Мінімізація булевих функцій методом Блейка — Порецького

Метод Блейка — Порецького реалізує перехід від довільної ДНФ функції до скороченої ДНФ за допомогою операцій узагальненого склеювання і поглинання.

Операція узагальненого склеювання:

$$Ax \vee B \bar{x} = Ax \vee B \bar{x} \vee AB.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} Ax \vee B \bar{x} &= Ax(1 \vee B) \vee B \bar{x}(1 \vee A) = Ax \vee ABx \vee B \bar{x} \vee AB \bar{x} = \\ &= Ax \vee B \bar{x} \vee AB(x \vee \bar{x}) = Ax \vee B \bar{x} \vee AB. \end{aligned}$$

Операція поглинання:

$$Ax \vee A = A.$$

Приклад. Знайти скорочену ДНФ за методом Блейка — Порецького для функції

$$f(x, y, z) = xy \bar{z} \vee xz \vee \bar{x}y.$$

Розв'язок. Узагальнене склеювання:

$$xy \bar{z} \vee xz = xy \bar{z} \vee xy \bar{z} \vee xz, \quad A = xy, B = x;$$

$$xy \bar{z} \vee \bar{x}y = y \bar{z} \vee xy \bar{z} \vee \bar{x}y, \quad A = y \bar{z}, B = y;$$

$$xz \vee \bar{x}y = yz \vee xz \vee \bar{x}y, \quad A = z, B = y.$$

До одержаних імплікант може бути застосована операція повного диз'юнктивного склеювання:

$$y \bar{z} \vee yz = y, \quad xy \vee \bar{x}y = y.$$

Вихідна формула прийме такий вигляд:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (xy \vee \bar{x}y) \vee xy \bar{z} \vee xz \vee (y \bar{z} \vee yz) = \\ &= y \vee xy \bar{z} \vee xz \vee y = y(x \bar{z} \vee 1) \vee xz = y \vee xz. \end{aligned}$$

Отже, $f = y \vee xz$ є скорочена ДНФ.

Характеристика методу Блейка — Порецького

- Метод є формальним, але складний для програмної реалізації.
- Метод дозволяє здійснювати диз'юнктивну мінімізацію, використовуючи як вихідну довільну ДНФ функції.
- Результатом є скорочена, а не мінімальна форма. Для отримання мінімальної форми треба скористатися ще якимось методом.

4.8. Алгебра Жегалкіна

- *структура алгебри Жегалкіна*
- *тотожності алгебри Жегалкіна*
- *поліномом Жегалкіна*
- *лінійність булевих функцій*
- *функції, що зберігають нуль та одиницю*
- *монотонні функції*

- Алгебра $(B, \wedge, \oplus, 0, 1)$, що утворена множиною $B = \{0, 1\}$ разом з операціями \wedge (кон'юнкції), \oplus (XOR — от eXclusive OR, сума за модулем 2) і константами 0, 1, називається *алгеброю Жегалкіна*.

В алгебрі Жегалкіна операція кон'юнкції повністю ідентична множенню, а операція XOR зображує додавання за модулем для скінченних множин.

Приклад. Формула $(x \oplus y \oplus z) \wedge (x \oplus z \oplus 1) \oplus x \wedge y \oplus 1$, де x, y, z — булеві змінні, є прикладом формули алгебри Жегалкіна, тому що вона містить операції кон'юнкції і XOR.

Будь-яка логічна функція може бути зображена формулою в алгебрі Жегалкіна.

Тотожності алгебри Жегалкіна

Властивості кон'юнкції:

1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — асоціативність

2) $x \wedge y = y \wedge x$ — комутативність

3) $x \wedge x = x$ — ідемпотентність

4) $x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$ — дії з константами

Властивості операції XOR (додавання за модулем 2):

5) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ — асоціативність

6) $x \oplus y = y \oplus x$ — комутативність операції XOR

7) $x \oplus x = 0$ — закон зведення подібних доданків

8) $x \oplus 0 = x$ — операція з константою 0

9) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ — дистрибутивність \wedge відносно \oplus

Зображення заперечення:

$$\bar{x} = x \oplus 1$$

x	\bar{x}	$x \oplus 1$
0	1	1
1	0	0

Зображення диз'юнкції:

$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y$$

$$x \vee y = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = \overline{(x \oplus 1)(y \oplus 1)} =$$

$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus 1 =$$

$$= xy \oplus y \oplus x.$$

Поліном Жегалкіна

- *Поліномом Жегалкіна* називається скінченна сума за модулем 2 попарно різних елементарних кон'юнкцій над множиною змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) .
- Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції, називається *рангом елементарної кон'юнкції*.
- Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається *довжиною полінома*.

Зображення у вигляді поліному існує та єдине для кожної булевої функції.

- Булева функція називається *лінійною*, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

Побудова поліному Жегалкіна аналітичним способом

Для побудови поліному Жегалкіна функції, що задана деякою формулою алгебри Жегалкіна, необхідно розкрити всі дужки в даній формулі за законом дистрибутивності і виконати всі можливі спрощення з використанням законів дій з константами, ідемпотентності і зведення подібних доданків.

Приклад. Зобразити поліномами Жегалкіна логічні функції імплікацію (\rightarrow) і еквівалентність (\sim).

Розв'язок. Спочатку запишемо ДДНФ даних функцій, потім виразимо операції диз'юнкції та заперечення через операції кон'юнкції та XOR.

$$\begin{aligned}x \rightarrow y &= \bar{x} \vee y = (x \oplus 1) \vee y = (x \oplus 1) y \oplus (x \oplus 1) \oplus y = \\ &= xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus x \oplus 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \sim y &= xy \vee \bar{x} \bar{y} = xy \bar{x} \bar{y} \oplus xy \oplus \bar{x} \bar{y} = xy \oplus \bar{x} \bar{y} = \\ &= xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) = xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 = \\ &= x \oplus y \oplus 1.\end{aligned}$$

Приклад. Визначити, чи лінійні функції імплікації (\rightarrow) і еквівалентності (\sim).

Розв'язок. Проаналізуємо структуру формул, що виведені у попередньому прикладі.

$$x \rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1;$$

Імплікація (\rightarrow) є нелінійною функцією,

$$x \sim y = x \oplus y \oplus 1.$$

Еквівалентність (\sim) — функція лінійна.

Приклад. Дослідити на лінійність функцію

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow \bar{z}.$$

Розв'язок. Побудуємо поліном Жегалкіна функції $f(x, y, z)$, використовуючи такі тотожності: $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$,
 $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$, $\bar{x} = x \oplus 1$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \vee y) \rightarrow \bar{z} = = = \\ &= (xy \oplus x \oplus y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (xy \oplus x \oplus y \oplus 1) \oplus z \oplus 1 = \\ &= xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1 \wedge z \oplus xy \wedge 1 \oplus x \wedge 1 \oplus y \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus \oplus \\ &\quad xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus z \oplus 1 = \\ &= xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus \\ &\quad \oplus 1 \oplus z \oplus 1 = xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1. \end{aligned}$$

Функція $f(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow \bar{z}$ не є лінійною, оскільки її поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних.

Побудова поліному Жегалкіна методом невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів засновано на тому, що для будь-якої булевої функції існує єдиний поліном Жегалкіна.

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f_{13}(x, y)$ — імплікації, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Розв'язок. Запишемо поліном для даної функції у вигляді суми за модулем 2 всіх можливих елементарних кон'юнкцій для x, y з невизначеними коефіцієнтами:

$$f_{13}(x, y) = x \rightarrow y = a_1xy \oplus a_2x \oplus a_3y \oplus a_4,$$

де коефіцієнти a_1, a_2, a_3, a_4 приймають значення з множини $\{0, 1\}$ і визначають присутність або відсутність елементарної кон'юнкції в поліномі.

Шукаємо послідовно значення коефіцієнтів, підставляючи значення змінних і функції на різних інтерпретаціях:

$$f_{13}(0, 0) = 0 \rightarrow 0 = 1,$$

$$1 = a_1 \wedge 0 \wedge 0 \oplus a_2 \wedge 0 \oplus a_3 \wedge 0 \oplus a_4 = a_4$$

$$a_4 = 1;$$

$$f_{13}(0, 1) = 0 \rightarrow 1 = 1,$$

$$1 = a_1 \wedge 0 \wedge 1 \oplus a_2 \wedge 0 \oplus a_3 \wedge 1 \oplus 1 = a_3 \oplus 1,$$

$$a_3 = 0;$$

$$f_{13}(1, 0) = 1 \rightarrow 0 = 0,$$

$$0 = a_1 \wedge 1 \wedge 0 \oplus a_2 \wedge 1 \oplus a_3 \wedge 0 \oplus 1 = a_2 \oplus 1$$

$$a_2 = 1;$$

$$f_{13}(1, 1) = 1 \rightarrow 1 = 1,$$

$$1 = a_1 \wedge 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 0 \oplus 1 = a_1 \oplus 1 \oplus 1 = a_1,$$

$$a_1 = 1.$$

Підставивши одержані значення коефіцієнтів одержуємо поліном Жегалкіна для функції f_{13} :

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= a_1 xy \oplus a_2 x \oplus a_3 y \oplus a_4 = 1 \wedge xy \oplus 1 \wedge x \oplus 0 \wedge y \oplus 1 = \\ &= xy \oplus x \oplus 1. \end{aligned}$$

Функції, що зберігають нуль та одиницю

- Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **функцією, що зберігає 0**, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0: $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.
- Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **функцією, що зберігає 1**, якщо на одиничному наборі вона дорівнює 1: $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Функції $x \wedge y$ і $x \vee y$ зберігають 0, оскільки $0 \wedge 0 = 0$ і $0 \vee 0 = 0$. Крім того, дані функції також зберігають 1, оскільки $1 \wedge 1 = 1$ і $1 \vee 1 = 1$. Функція x не зберігає 0 і не зберігає 1, оскільки $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$.

Приклад. Визначте, чи зберігає 0 та 1 функція
 $f(x, y, z) = x \vee \bar{y} \bar{z}$.

Розв'язок. Перевіримо значення даної функції на нульовому та одиничному наборах.

$$f(0, 0, 0) = 0 \vee \bar{0} \wedge \bar{0} = 0 \vee 1 \wedge 1 = 0 \vee 1 = 1,$$
$$f(1, 1, 1) = 1 \vee \bar{1} \wedge \bar{1} = 1 \vee 0 \wedge 0 = 1 \vee 0 = 1.$$

Отже, дана функція зберігає 1 і не зберігає 0.

Монотонні функції

Розглянемо важливий клас булевих функцій — монотонні булеві функції. Для цього введемо *відношення порядку*, яке будемо позначати символом \leq , для інтерпретацій $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ таким чином:

$\alpha \leq \beta$, якщо $a_i \leq b_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Якщо хоча б для однієї пари (a_i, b_i) відношення $a_i \leq b_i$ не виконується, то відповідні їм набори α і β у відношенні порядку не беруть участі, тобто є непорівнянними, наприклад, $(0, 1)$ і $(1, 0)$.

- Булева функція f називається *монотонною*, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних (a_1, a_2, \dots, a_n) і (b_1, b_2, \dots, b_n) , для яких виконується відношення $(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq (b_1, b_2, \dots, b_n)$, правильна і нерівність $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x, y) = x \wedge y.$$

Розв'язок. Для функції $f(x, y)$ запишемо всі набори значень змінних, для яких виконується відношення порядку, визначимо значення функції на даних наборах і порівняємо їх:

$$(0, 0) \leq (0, 1), \quad f(0, 0) = 0, f(0, 1) = 0, \quad f(0, 0) \leq f(0, 1).$$

$$(0, 0) \leq (1, 0), \quad f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 0, \quad f(0, 0) \leq f(1, 0).$$

$$(0, 0) \leq (1, 1), \quad f(0, 0) = 0, f(1, 1) = 1, \quad f(0, 0) \leq f(1, 1).$$

$$(0, 1) \leq (1, 1), \quad f(0, 1) = 0, f(1, 1) = 1, \quad f(0, 1) \leq f(1, 1).$$

$$(1, 0) \leq (1, 1), \quad f(1, 0) = 0, f(1, 1) = 1, \quad f(1, 0) \leq f(1, 1).$$

Висновок: функція $f(x, y) = x \wedge y$ є монотонною.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію

$$g(x, y) = x \oplus y.$$

Розв'язок. Для функції $g(x, y)$ запишемо всі набори значень змінних, для яких виконується відношення порядку, визначимо значення функції на даних наборах і порівняємо їх:

$$(0,0) \leq (0,1), \quad g(0,0) = 0, \quad g(0,1) = 1, \quad g(0,0) \leq g(0,1).$$

$$(0,0) \leq (1,0), \quad g(0,0) = 0, \quad g(1,0) = 1, \quad g(0,0) \leq g(1,0).$$

$$(0,0) \leq (1,1), \quad g(0,0) = 0, \quad g(1,1) = 0, \quad g(0,0) \leq g(1,1).$$

$$(0,1) \leq (1,1), \quad g(0,1) = 1, \quad g(1,1) = 0, \quad \underline{g(0,1) \geq g(1,1)}.$$

Висновок: функція $g(x, y) = x \oplus y$ не є монотонною.

Теорема. Булева функція, відмінна від констант 0 і 1, є монотонною, якщо і тільки якщо вона припускає зображення формулою булевої алгебри без заперечень.

Приклад. Визначити, чи є функція $f(x, y, z, t) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow (z \vee t)$ монотонною.

Розв'язок. Виразимо $f(x, y, z, t)$ через елементарні функції булевої алгебри:

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow (z \vee t) = xy \vee z \vee t.$$

Одержана формула булевої алгебри не містить заперечень, отже функція $f(x, y, z, t)$ є монотонною.