

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

ЛЕКЦІЯ 7



ПИТАННЯ ДЛЯ РОЗГЛЯДУ

- 1. Некооперативні ігри. Гра у нормальній формі.
- 2. Класифікація ігор
- 3. Рівновага за Нешем
- 4. Кооперативні ігри

1. НЕКООПЕРАТИВНІ ІГРИ. ГРА У НОРМАЛЬНІЙ ФОРМІ.

Нехай $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множина гравців (агентів, осіб, що приймають рішення), n – їхня кількість, $n \geq 2$.

Кожен гравець $i \in N$ має можливість вибрати свою стратегію (рішення, дію), яку ми будемо позначати x_i . Усі стратегії гравця $i \in N$ утворюють множину X_i .

Коли всі гравці вибрали свої стратегії x_i , $i \in N$, утворюється так звана ситуація гри, яка описується вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$. Множину всіх ситуацій будемо позначати X . Очевидно, що $X = \prod_{i \in N} X_i$.

В теорії ігор ситуацію гри позначають різними способами:

$x = (x_1, \dots, x_n) = (x_i)_{i \in N}$ – для скорочення запису;

$x = (x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_{N \setminus i})$ – коли хочуть виділити стратегію деякого гравця $i \in N$, у цьому записі використовується позначення $x_{N \setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$;

$x = (x_1, \dots, x_n) = (x_T, x_{N \setminus T})$ – коли хочуть виділити набір стратегій деякої коаліції (підмножини) $T \subset N$ гравців $i \in T$, у цьому записі використовуються позначення $x_T = (x_j)_{j \in T}$, $x_{N \setminus T} = (x_j)_{j \in N \setminus T}$.

На множині ситуацій гри X для кожного гравця $i \in N$ визначена його функція виграшу (корисності) $u_i : X \rightarrow R^1$, яка за замовченням максимізується. Таким чином, виникає наступна задача: «Яку стратегію треба вибрати кожному гравцю, щоб утворилася ситуація, яка максимізувала б його функцію виграшу»?

Якщо задана: N – множина гравців, X_i – множина стратегій гравця $i \in N$, $u_i(x)$ – функція виграшу гравця $i \in N$, то сукупність $(X_i, u_i; i \in N)$ називають грою у нормальній формі. Відомі й інші форми гри: розгорнута і характеристична.

Якщо множини стратегій гравців скінчені, то можна вважати, що множиною стратегій гравця $i \in N$ є $X_i = \{1, \dots, m_i\}$. За означенням гри для кожної ситуації гри $(j_1, \dots, j_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$ визначене число $u_i(j_1, \dots, j_n)$ – виграш гравця $i \in N$. Тому якщо гравців двоє ($n = 2$), то можна визначити матриці виграшів гравців $U^i = \{u_{j_1 j_2}^i\}_{j_1 \in X_1, j_2 \in X_2}$, $i = 1, 2$. У цьому випадку гра називається біматричною.

Якщо в грі двох осіб сума функцій виграшу гравців дорівнює нулю, то гра називається антагоністичною. В цьому випадку її нормальна форма задається сукупністю $G = (X_1, X_2, u)$, де $u(x)$ є функцією виграшу першого гравця. Якщо ж множини стратегій гравців є скінченими, то ця гра називається матричною антагоністичною грою.

2. КЛАСИФІКАЦІЯ ІГОР

За характером поведінки

1. Кооперативні ігри досліджують прийняття рішень у випадках, коли існує той чи інший механізм покарання або заохочення гравців, який забезпечує виконання спільно обраної ситуації гри. Основна задача теорії кооперативних ігор полягає у виборі такої ситуації гри, для якої можна побудувати сценарій взаємодії гравців, який забезпечить стабільність цієї ситуації для будь-якої коаліції гравців (зокрема для кожного гравця окремо та всієї спільноти гравців). Суттєвим обмеженням таких відомих принципів оптимальності кооперативних ігор, як α, β, γ -ядра, є вимога достатньо великої кількості реалізацій гри. Ядро, N -ядро гри та вектор Шеплі обґрунтовані лише у тих іграх, де гравці можуть обмінюватися своїми виграшами (так звані, трансферабельні виграші).

2. Некооперативні (бескоаліційні) ігри досліджують прийняття рішень в умовах конфлікту у припущенні, що гравці діють незалежно один від іншого. Угоди між гравцями хоча в принципі можливі, але мають обмежений і необов'язковий характер. Кожен може порушити угоду без покарання.

За видом інформованості

Застосування того чи іншого принципу оптимальності в некооперативних іграх суттєво залежить від інформованості гравців.

1. В умовах повної неінформованості гравців (кожен гравець знає лише свою функцію виграшу, гра відбувається лише один раз) відомі: недоміновані та домінуючі стратегії; обережні стратегії.

2. В умовах “несиметричної” інформованості гравців (деякі гравці повністю інформовані, а інші неінформовані) використовують принцип рівноваги за Штакельбергом та його узагальнення.

3. Для випадку повної інформованості гравців (кожен гравець знає не лише свою функцію виграшу, а й функції виграшу інших гравців, гра може відбуватися будь-яку кількість разів) відомі основні принципи оптимальності: рівновага у домінуючих стратегіях, складна рівновага; рівновага за Нешем; коаліційна рівновага; рівновага за Бержем..

Обережна поведінка гравців. Обережна поведінка гравців обґрунтована в умовах їхньої ізолюваності та повної неінформованості. В цих умовах кожен з них вибирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, кожен гравець знає лише свою функцію виграшу, гравцям невідома передісторія гри.

Нехай задана гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$.

Означення. Стратегія $\hat{x}_i$ гравця $i \in N$ називається обережною, якщо

$$\hat{x}_i = \arg \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(x_i, x_{N \setminus i}).$$

Позначимо $O_i = \operatorname{Argmax}_{x_i \in X_i} \min_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(x_i, x_{N \setminus i})$ множину обережних стратегій i -го гравця. Величина $\alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(x_i, x_{N \setminus i})$ називається максимальним гарантованим виграшом гравця $i \in N$.

Вибираючи обережну стратегію, гравець $i \in N$ вважає, що інші гравці діють найгіршим для нього чином і його «раціональність» в умовах ізолюваності та повної неінформованості полягає у виборі на множині своїх стратегій такої, яка максимізує його гарантований виграш.

Для скінченної гри існування обережних стратегій гравців очевидне. У випадку нескінченної гри справедлива така теорема.

Теорема. Нехай множини стратегій гравців X_i компактні, а функції виграшу u_i неперервні на множині ситуацій гри, $i \in N$. Тоді множини обережних стратегій O_i гравців $i \in N$ не порожні і компактні.

Означення. Гра називається несуттєвою, якщо не існує такої ситуації $y \in X$, для якої виконуються наступні умови:

$$\begin{cases} \forall i \in N \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(x_i, x_{N \setminus i}) = \alpha_i \leq u_i(y), \\ \exists j \in N \alpha_j < u_j(y). \end{cases}$$

Обережні стратегії в несуттєвій грі є оптимальними в подальшому сенсі.

Теорема. Припустимо, що гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ несуттєва. Нехай $\hat{x}_i$ – обережна стратегія гравця $i \in N$, а $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \in N}$ є відповідною ситуацією гри. Тоді:

1) $u_i(\hat{x}) = \alpha_i \leq u_i(\hat{x}_i, x_{N \setminus i})$ для $\forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$, $\forall i \in N$ (якщо деякі гравці $j \neq i$ відмовляться від обережних стратегій, то це буде вигідно лише гравцю i , який має гарантований виграш);

2) для будь-якої коаліції гравців $S \subseteq N$ і будь-якого набору стратегій $x_S \in X_S$ наступна система умов є несумісною:

$$\begin{cases} \forall i \in S \quad u_i(\hat{x}) \leq u_i(x_S, \hat{x}_{N \setminus S}), \\ \exists j \in S \quad u_j(\hat{x}) < u_j(x_S, \hat{x}_{N \setminus S}) \end{cases}$$

(жоден окремий гравець і жодна коаліція гравців, включаючи всю спільноту гравців, не мають причин для одностороннього відходу від обережних стратегій).

Гра двох осіб з нульовою сумою. Розглянемо антагоністичну гру G (гра двох осіб з нульовою сумою функцій виграшу гравців) в нормальній формі (X_1, X_2, u) , де X_1, X_2 – множини стратегій відповідно першого і другого гравця, $u(x)$ – функція виграшу першого гравця, яку він максимізує. Оскільки гра є антагоністичною, то другий гравець максимізує функцію $-u(x)$. Якщо вважати $u(x)$ функцією програшу другого гравця, то він буде її мінімізувати.

Обережні стратегії $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ кожного гравця визначаються співвідношеннями:

$$\hat{x}_1 = \arg \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2), \quad \hat{x}_2 = \arg \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2).$$

Позначимо $O_1 = \text{Arg} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2)$ та $O_2 = \text{Arg} \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2)$

множину обережних стратегій відповідно першого та другого гравця. Величина $\alpha_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2)$ називається максимальним гарантованим виграшом першого гравця, а величина $\alpha_2 = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2)$ – мінімальним гарантованим програшом другого гравця.

Теорема. В антагоністичній грі максимальний гарантований виграш першого гравця не перебільшує мінімального гарантованого програшу другого гравця, тобто $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Означення. Величина α називається ціною антагоністичної гри, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то відповідна гра не має ціни.

Означення. Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ називається сідловою точкою антагоністичної гри, якщо

$$u(x_1, \hat{x}_2) \leq u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \leq u(\hat{x}_1, x_2), \text{ для } \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2. \quad (1)$$

Будемо позначати множину сідлових точок $\hat{X}$.

Нерівності (3.1) іноді зручно записувати у вигляді системи двох взаємозв'язаних задач оптимізації:

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, \hat{x}_2), \quad u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \min_{x_2 \in X_2} u(\hat{x}_1, x_2). \quad (2)$$

З означення випливає, що коли стратегії гравців утворюють сідлову точку антагоністичної гри, то кожному з них окремо не вигідно їх змінювати на будь-які інші.

Теорема. 1) Для того щоб антагоністична гра мала сідлову точку, необхідно й достатньо, щоб вона мала ціну.

2) Нехай антагоністична гра має ціну. Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ тоді й лише тоді буде сідловою точкою, коли $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ будуть обережними стратегіями відповідно першого та другого гравця.

Таким чином, обережні стратегії в антагоністичній грі, яка має ціну, є оптимальними в наступному сенсі. По-перше, для кожного гравця є виключеним ризик (оскільки стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ є обережними). По-друге, кожному гравцю окремо не вигідно змінювати стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ на будь-які інші (оскільки ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ є сідловою точкою). По-третє, обом гравцям разом не вигідно змінювати стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ на будь-які інші. Це пояснюється тим, що в антагоністичній грі виграш першого гравця дорівнює програшу другого.

Теорема. Нехай X_1, X_2 є опуклими компактами відповідних евклідових просторів, а функція $u(x_1, x_2)$ неперервна на $X_1 \times X_2$. Припустимо, що $u(x_1, x_2)$ є опуклою вгору за x_1 при довільному $x_2 \in X_2$ та опуклою вниз за x_2 при довільному $x_1 \in X_1$. Тоді антагоністична гра G в нормальній формі (X_1, X_2, u) має хоча б одну сідлову точку.

3. РІВНОВАГА ЗА НЕШЕМ

Розглянемо випадок повної інформованості гравців, коли кожен з них знає функції виграшу – свою і суперників. Гра може повторюватись будь-яку кількість разів.

Рівновага за Нешем. Ідея стабільної угоди приводить до наступного визначення.

Означення. Для гри G в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ ситуація x^* називається рівновагою за Нешем, якщо

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*) \quad \forall x_i \in X_i \quad \forall i \in N. \quad (1)$$

Іншими словами, в рівновазі за Нешем x^* гравець $i \in N$ розглядає стратегії інших гравців x_{-i}^* заданими і максимізує на множині своїх стратегій $x_i \in X_i$ власну функцію виграшу u_i .

Будемо позначати $NE(G)$ множину рівноваг за Нешем гри G .

Нерівності (1) іноді зручно записувати у вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації:

$$u_i(\hat{x}) = \max_{x_i \in X_i} u(x_i, \hat{x}_{-i}), \quad i \in N. \quad (2)$$

Концепція рівноваги за Нешем мотивується таким сценарієм гри: гравці разом обговорюють, яку ситуацію вибрати основою для необов'язкової угоди; потім гравці розходяться, обмін інформацією між ними припиняється і кожен приймає рішення самостійно (при цьому угоду можна порушити). Тоді і тільки тоді, коли обрана ситуація є рівновагою Неша, вона є стабільною угодою.

Приклад.

X_2	a_2	b_2	c_2
X_1			
a_1	2,2	2,1	1,5
b_1	2,3	3,3	2,2
c_1	5,1	2,2	3,2

Властивості NE –рівноваг.

1. Ситуація x називається індивідуально-раціональною, якщо виграш кожного гравця у ній не менший за гарантований, тобто

$$u_i(x) \geq \max_{y_i \in X_i} \min_{y_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(y_i, y_{N \setminus i}) = \alpha_i$$

Теорема. Нешівські рівноваги індивідуально раціональні.

Доведення. Нехай $x^* \in NE$, тоді $u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*)$, для $\forall i \in N$, $\forall x_i \in X_i$. Оскільки $x_{N \setminus i}^*$ – фіксоване, то $u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq \inf_{x_{N \setminus i}} u_i(x_i, x_{N \setminus i})$ для $\forall x_i \in X_i$.

Взявши супремум по x_i в останній нерівності, отримаємо необхідне.

Приклад.

X_2 X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2	2,1	1,5
b_1	2,3	3,3	2,2
c_1	5,1	2,2	3,2

2. *NE*– ситуації можуть бути паретівськими. Співіснування декількох різних паретівських ситуацій порушує боротьбу за лідерство, що “вбиває” будь-яку надію знайти “оптимальні” стратегії. Ця обставина ілюструється наступним прикладом.

Приклад “Перехрестя”.

X_2 X_1	3	P
3	1,1	$1-\varepsilon, 2$
P	$2, 1-\varepsilon$	0,0

3. Нешівська рівновага може не бути Паретівською.

Приклад (Дилема бандитів).

	3	$H3$
3	-7 -7	0 -10
$H3$	-10 0	-1 -1

Розглянемо питання існування *NE* та їх пошуку.

Теорема (Неш [1951]). Нехай множини стратегій гравців X_i , $i \in N$, є опуклими та компактними підмножинами відповідних топологічних векторних просторів. Нехай для кожного гравця $i \in N$ його функція виграшу u_i є неперервною на множині ситуацій X і опуклою вгору за його стратегіями x_i на X_i для кожного набору стратегій всіх інших гравців $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$. Тоді множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною.

Знаходження рівноваг Неша. Теорема Неша стверджує, що в умовах теореми множина NE не порожня. Для того щоб його обчислити, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$u_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{N \setminus i}^*), \quad i \in N.$$

Позначимо $BR_i = \{(x_i^*, x_{N \setminus i}) : u_i(x_i^*, x_{N \setminus i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{N \setminus i}), x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}\}$ -

множину найкращих відповідей гравця $i \in N$ на набір фіксованих стратегій інших гравців. Тоді

$$NE = \bigcap_{i \in N} BR_i.$$

Оскільки u_i опуклою вгору за x_i , то наведена вище задача глобальної оптимізації може бути еквівалентна локальній задачі. Наприклад, якщо x_i – внутрішня точка множини X_i і функція u_i диференційована за x_i , то умови рівноваги

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|_{x^*} = 0, \quad i \in N.$$

Приклад (“Дуополія Курно з призначенням випусків”). Два гравця поставляють на ринок один і той же товар в кількості x_i , $i=1,2$, по ціні $p(x_1 + x_2) = 1 - (x_1 + x_2)$. Максимальні виробничі можливості кожного гравця дорівнюють $\frac{1}{2}$.

Розглядаються 2 варіанти відносно передумов про функцію витрат:

а) постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x$ на виробництво x одиниць продукції).

Маємо

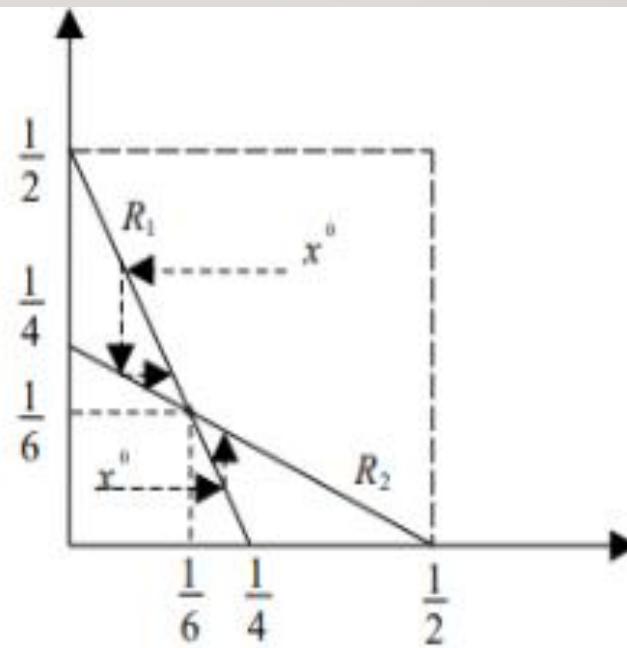
гру:

$$X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 - x_1x_2 - x_1^2, \quad u_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2 - x_1x_2 - x_2^2$$

Оскільки множини стратегій компактні, функції виграшу диференційовані та опуклі вгору отримуємо оптимальні відповіді i -го гравця на фіксовані j -го ($j \neq i$) з системи: $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, $i=1,2$. Маємо:

$$BR_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\},$$

$$BR_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\}$$



Єдина NE - ситуація знаходиться як перетин множини R_i :

$$NE = R_1 \cap R_2 = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

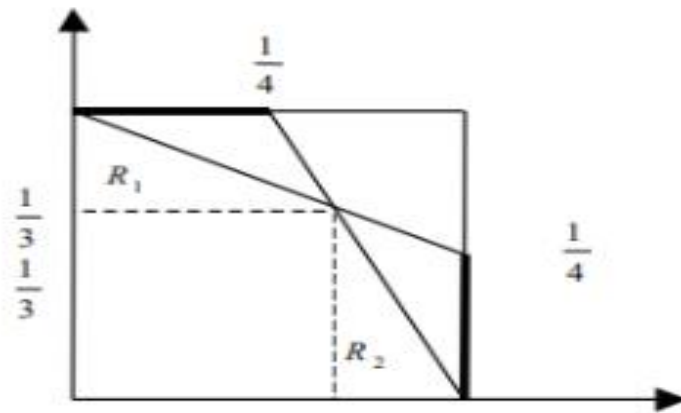
б) спадаючі витрати (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2$). Маємо гру:

$$X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 - x_1x_2 - \frac{1}{4}x_1^2, u_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2 - x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2^2$$

При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, врахувавши оптимуми на границях, матимемо

$$BR_1 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) : 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4} \right\} \cup \left\{ (1 - 2x_2, x_2), \frac{1}{4} \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$BR_2 = \left\{ \left(x_1, \frac{1}{2} \right) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{4} \right\} \cup \left\{ (x_1, 1 - 2x_1), \frac{1}{4} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$



В результаті - три NE -ситуації: $NE = R_1 \cap R_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}.$

4. КООПЕРАТИВНІ ІГРИ

Сильна рівновага Неша. Розглянемо приклад:

X_2	a_2	b_2
X_1		
a_1	1,1	1,0
b_1	0,1	2,2

Маємо дві нешівські рівноваги – (a_1, a_2) і (b_1, b_2) . Але, якщо від ситуації (a_1, a_2) не вигідно відхилятися будь-якому (але одному! – стратегія другого є фіксованою), то від (b_1, b_2) не вигідно відхилятися обом одночасно (якщо від ситуації (a_1, a_2) одночасно відхиляться обоє, то вони перейдуть в ситуацію (b_1, b_2) , вигіднішу для обох).

Означення. Для гри $G = (X_i, u_i, i \in N)$ ситуація x^* є сильною рівновагою Неша, якщо не існує коаліції гравців, для яких було б вигідно відхилятися від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція не реагує на відхилення: $\forall T \subset N, \forall x_T \in X_T$ не виконується

$$\begin{cases} \forall i \in T \ u_i(x_T, x_{N \setminus T}^*) \geq u_i(x^*), \\ \forall j \in T \ u_j(x_T, x_{N \setminus T}^*) > u_j(x^*) \end{cases}$$

Множину сильних рівноваг в грі G позначатимемо через $SNE(G)$. Ця множина може бути порожньою.

Покладаючи у формулах $T = \{i\}$, $i \in N$, маємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша, тобто $SNE(G) \subseteq NE(G)$. Покладаючи $T=N$, отримуємо, що сильна рівновага є Парето-оптимальною (ефективною) ситуацією. Отже, для $n=2$ сильні рівноваги Неша – це ефективні рівноваги Неша.

В прикладі дві рівноваги Неша – (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , але лише (b_1, b_2) є сильною рівновагою.

α – **ядро**. Для гри в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ α - ядром називається множина C_α таких ситуацій $\hat{x}$, що для будь-якої коаліції $T \subseteq N$ і будь-якої коаліційної стратегії $x_T \in X_T$, знайдеться така стратегія $x_{N \setminus T} \in X_{N \setminus T}$ (погроза $\xi_{N \setminus T}(x_T) = x_{N \setminus T}$) доповнючої коаліції $N \setminus T$, що не може бути сумісною наступна система нерівностей:

$$\forall i \in T \ u_i(x_T, x_{N \setminus T}) \geq u_i(\hat{x}), \ \exists j \in T \ u_j(x_T, x_{N \setminus T}) > u_j(\hat{x}).$$

Сильна рівновага міститься у α – ядрі: $SE(G) \subset C_\alpha(G)$.

Поділи. Основою домовленості вибирається ситуація з максимальним сумарним виграшом, який ділиться так, щоб кожному було не вигідно відмовитися.

Для наочності гра $G = (X_i, u_i; i \in N)$ представляється у характеристичній формі.

Означення. Будемо казати, що кооперативна гра задана у характеристичній формі (N, v) , якщо задано $N = \{1, \dots, n\}$ – множину гравців й функцію гарантованого виграшу $v(S) = \sup_{x_S \in X_S} \inf_{x_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} u_i(x_S, x_{N \setminus S})$, котра зв'язує з кожною коаліцією $S \subseteq N$ її гарантований виграш $v(S) \geq 0$.

Ядро гри. Ядром гри (N, v) називається поділ максимального сумарного виграшу $y = (y_i)_{i \in N}$, $\sum_{i \in N} y_i = v(N)$, що задовольняє умові: $\sum_{i \in S} y_i \geq v(S), \forall S \subseteq N$, тобто гарантований виграш будь-якої коаліції не повинен бути менше ніж, якщо вона захоче обслуговуватись самотійно.

Вектор Шеплі. Розглянемо вибір поділу, у якому доля кожного гравця у максимальному сумарному виграші $\sum_{i=1}^n y_i = v(N)$ залежить від його "внеску" у прибуток кожної коаліції, тобто від величини $(v(S \cup i) - v(S))$, $i \notin S$ (прибуток коаліції S з гравцем i та без нього, так званий "маргінальний прибуток").

Означення. Для гри (N, v) вектором Шеплі σ називається наступний поділ:
$$\sigma_i = \sum_{0 \leq s \leq n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{S \subseteq N \setminus i, |S|=s} (v(S \cup i) - v(S)), i = \overline{1, n}, v(\emptyset) = 0.$$

Змістовно ця формула пояснюється таким чином. Нехай гравці з N упорядковані $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i -го гравця у коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ перед гравцем i стоять в точності елементи з множини S . Ця ймовірність, очевидно, дорівнює $s!(n-s-1)!/n!$, де $s = |S|$.

ДОПОВІДЬ ЗАКІНЧЕНО!

- Дякую за увагу!