Комп'ютерна схемотехніка та архітектура комп'ютерів (КН). Ч2

Лекція 1

Системи числення

Професор кафедри КСМ та КіБ, д.т.н.

КОВАЛЕНКО Олексій Єпифанович

Основні поняття 2-3-8-10-16 систем числення

> *Одне і те ж число можна подати у різних системах числення. Подання числа при цьому різне, а значення залишається незмінним.*

Коли пишуть ціле число, наприклад, `153`, то використовують *десяткову* (за основою `10`) систему числення.

> *Цифрами у **десятковій системі** є* `0`, `1`, `2`, `3`, `4`, `5`, `6`, `7`, `8`, `9`.

«Всередині себе» комп'ютер використовує *двійкову* (за основою `2`) систему числення.

> ***Двійкова система** числення містить тільки дві цифри, а саме* `0` *і* `1`.

Двійкові числа, як правило, значно довше їх десяткових еквівалентів.

Тому дві інші системи числення - *вісімкова* (за основою `8`) і *шістнадцяткова* (за основою `16`) - є дуже популярними, оскільки роблять зручним запис двійкових чисел.

> *У **вісімковій системі** використовуються цифри з діапазону від* `0` *до* `7`.

Таблиця "Алфавіти деяких позиційних систем числення"

Основа	**Назва**	**Алфавіт**
n = 2	Двійкова	0 1
n = 3	Трійкова	0 1 2
n = 8	Вісімкова	0 1 2 3 4 5 6 7
n = 16	Шістнадцяткова	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Якщо необхідно вказати основу системи числення, в якій записане число, то вона прописується нижнім індексом для числа. Наприклад:

10111_2
212_3
27_8
17_{16}

Наприклад, `125` - трирозрядне число, `01110011` - восьмирозрядне число. Розряди нумеруються **справа наліво** і рахунок починається з `0`.

Наприклад, в десятковому числі `1981`:

- остання цифра `1` знаходиться в нульовому розряді (одиниці, 10^0);
- цифра `8` знаходиться в першому розряді (десятки, 10^1);
- цифра `9` - у другому розряді (сотні, 10^2);
- перша цифра `1` - у третьому розряді (тисячі, 10^3).

Наведемо кілька прикладів, в яких використовуються вищезгадані форми запису чисел.

Отримаємо розгорнуту форму для десяткових чисел `23145` і `23,145`:

$$23145_{10} = 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$
$$23{,}145_{10} = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

Запишемо розгорнуту форму для чисел в різних системах числення: 110011_2, 121_3, $15FC_{16}$, $110{,}01_2$:

$$110011_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$121_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$
$$15FC_{16} = 1 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + F \cdot 16^1 + C \cdot 16^0$$
$$110{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

Усі числа із попереднього прикладу переведемо в **десяткову** систему за допомогою розгорнутої форми запису:

$$110011_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 51_{10}$$
$$121_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 1 = 16_{10}$$
$$15AF_{16} = 1 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + A\ (10) \cdot 16^1 + F\ (15) \cdot 16^0 = 4096 + 1280 + 160 + 15 = 5551_{10}$$
$$110{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 2 + 0 + 0 + 0.25 = 6{,}25_{10}$$

Таблиця 1. Таблиця відповідності чисел в різних системах числення

Основа	10-кова	2-кова	8-кова	16-кова
Числа	0	0	0	0
	1	1	1	1
	2	10	2	2
	3	11	3	3
	4	100	4	4
	5	101	5	5
	6	110	6	6
	7	111	7	7
	8	1000	10	8
	9	1001	11	9
	10	1010	12	A
	11	1011	13	B
	12	1100	14	C
	13	1101	15	D
	14	1110	16	E
	15	1111	17	F
	16	10000	20	10
	17	10001	21	11

Таблиця 2. Таблиця відповідності 16- та 8-кових цифр і двійкових комбінацій

16-кова цифра	**2-кова комбінація**	**16-кова цифра**	**2-кова комбінація**		**8-кова цифра**	**2-кова комбінація**
0	0000	8	1000		0	000
1	0001	9	1001		1	001
2	0010	A	1010		2	010
3	0011	B	1011		3	011
4	0100	C	1100		4	100
5	0101	D	1101		5	101
6	0110	E	1110		6	110
7	0111	F	1111		7	111

Вісімкова система числення

Вісімкова система числення використовується в `Linux` -системах (та інших `Unix` -подібних операційних системах) для позначання прав доступу до файлів для команди chmod.

Режим доступу кодується трьома бітами, які дозволяють:

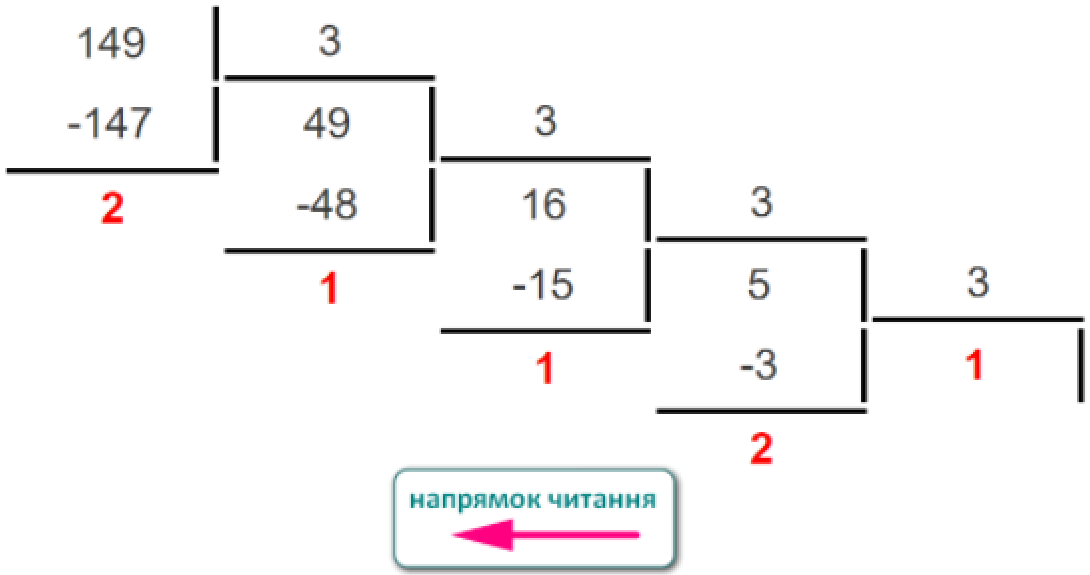
- читання (`r` , `read`);
- запис (`w` , `write`);
- виконання (`x` , `execute`).

Наприклад, код $7 = 111_2$ (`rwx`) означає, що наданий повний доступ (усі біти увімкнені) і користувач може читати, записувати та запускати на виконання файл, а код $4 = 100_2$ (`r--`) означає, що користувач має право читати файл, а от записувати у нього і запускати на виконання - ні.

У шістнадцятковій системі виникає проблема запису чисел, оскільки тут потрібно шістнадцять цифр - найменша з яких `0` і найбільша зі значенням, еквівалентним десятковому числу `15` (на одиницю менше основи `16`).

*Для представлення **шістнадцяткових чисел** із значеннями від `10` до `15` (в десятковому еквіваленті) домовилися використовувати літери від `A` до `F` .*

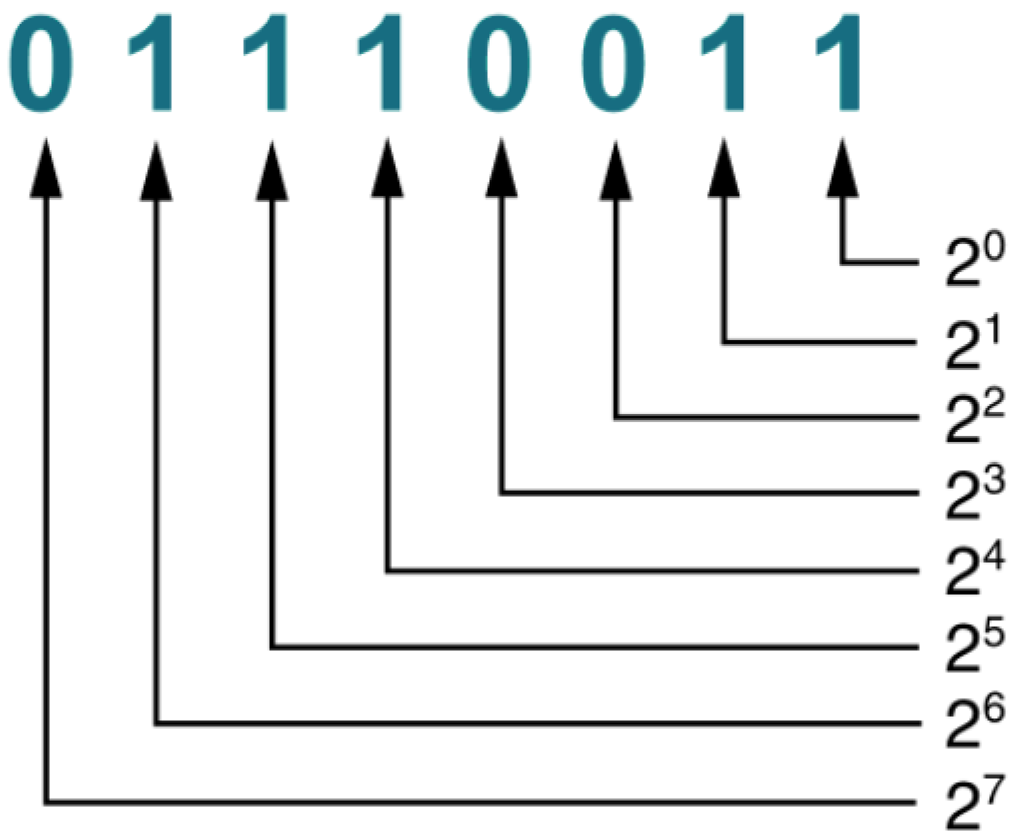
Переведемо число `149` у трійкове діленням числа націло на основу трійкової системи (`3`):



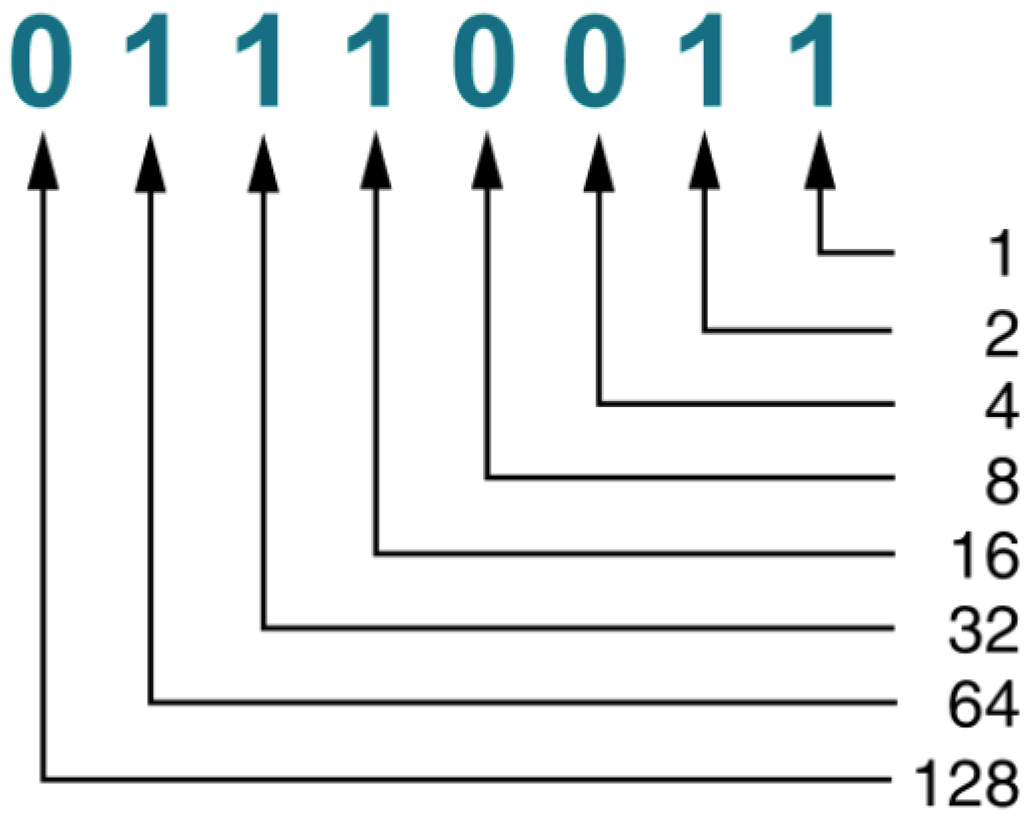
Переведення десяткового числа 149_{10} *у трійкове*

Замінивши цифри

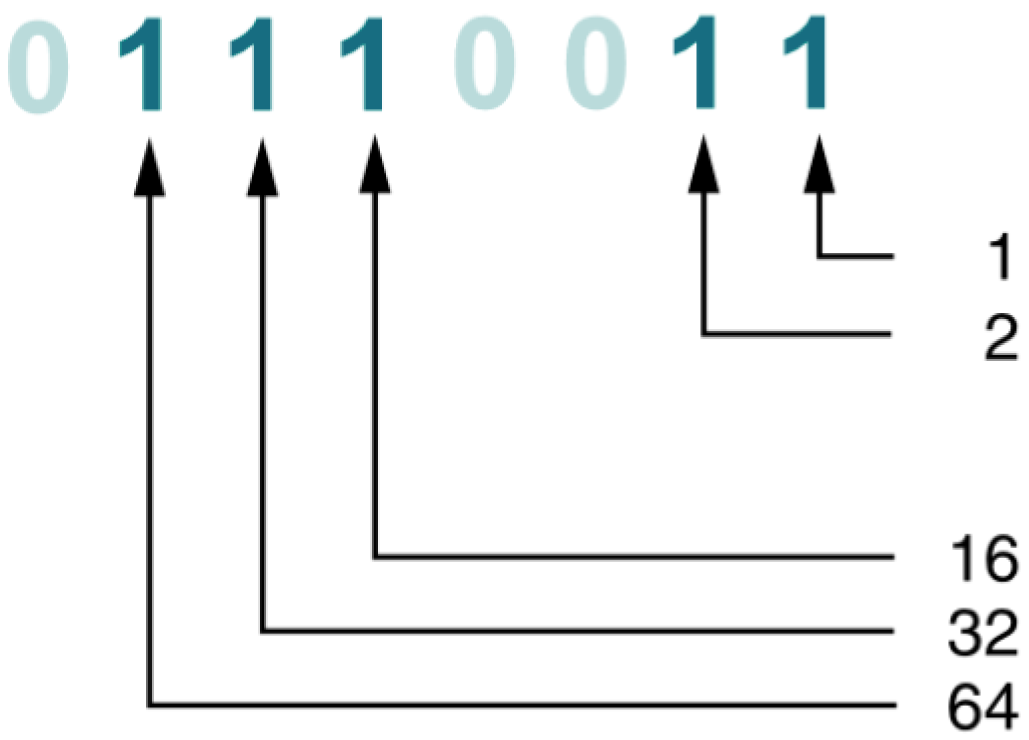
$149_{10} = 12112_3$



*Запис значень позицій двійкового числа **01110011***



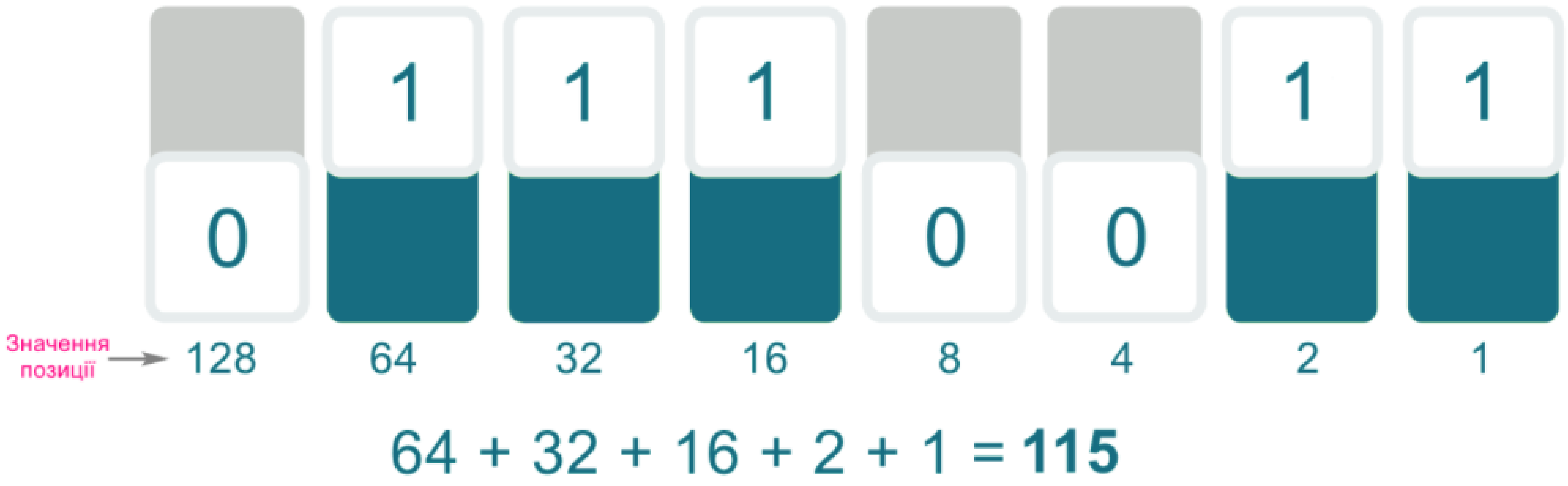
*Значення позицій двійкового числа **01110011***



1 + 2 + 16 + 32 + 64 = **115**

*Сумування значень позицій двійкового числа **01110011***

Число `115`, що зберігається в байті пам’яті, можна зобразити таким чином



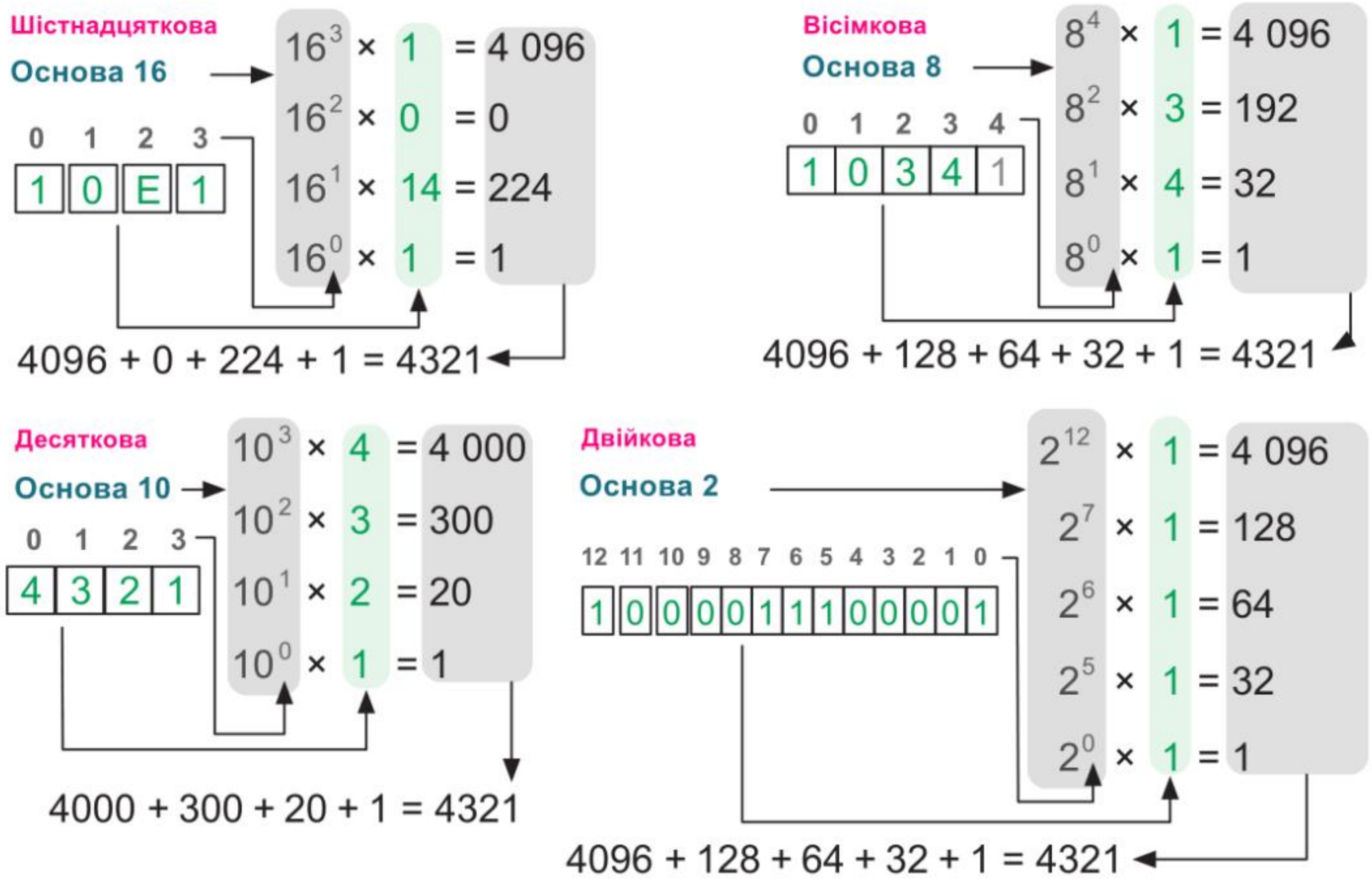
*Значення позицій двійкового числа **01110011** і біти-перемикачі*

Коли всі біти в байті встановлені в `0` (вимкнено), то значення байту дорівнює `0`. Якщо всі біти байту встановлені на `1` (увімкнено), то байт зберігає найбільше значення, яке можна зберегти в ньому.

Найбільше значення, яке можна зберегти в байті, дорівнює `255`

```
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255
```

Цей ліміт існує тому, що **в байті є лише вісім біт**.



Шістнадцяткова
Основа 16
0 1 2 3
1 0 E 1
16^3 × 1 = 4 096
16^2 × 0 = 0
16^1 × 14 = 224
16^0 × 1 = 1
4096 + 0 + 224 + 1 = 4321
Вісімкова
Основа 8
0 1 2 3 4
1 0 3 4 1
8^4 × 1 = 4 096
8^2 × 3 = 192
8^1 × 4 = 32
8^0 × 1 = 1
4096 + 128 + 64 + 32 + 1 = 4321
Десяткова
Основа 10
0 1 2 3
4 3 2 1
10^3 × 4 = 4 000
10^2 × 3 = 300
10^1 × 2 = 20
10^0 × 1 = 1
4000 + 300 + 20 + 1 = 4321
Двійкова
Основа 2
12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1
2^12 × 1 = 4 096
2^7 × 1 = 128
2^6 × 1 = 64
2^5 × 1 = 32
2^0 × 1 = 1
4096 + 128 + 64 + 32 + 1 = 4321

Двійкове число

у 3-й системі числення

Розглянемо дванадцятизначне двійкове число і його трійковий еквівалент

```
Двійкове число    Трійковий еквівалент
101111010101       11011012
```

Спочатку переведемо двійкове число у його десятковий еквівалент ось так

$$101111010101_2 = 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2048 + 0 + 512 + 256 + 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 3029_{10}$$

Отримали десяткове число: 3029_{10}.

Переведемо число 3029_{10} у трійкове діленням числа націло на основу трійкової системи (3)

Переведення десяткового числа 3029_{10} *у трійкове*

Отримали трійкове число: $3029_{10} = 11011012_3$.

Остаточний результат: $101111010101_2 = 11011012_3$.

Двійкове число

у 8-й системі числення

Розглянемо наступне дванадцятизначне двійкове число і його вісімковий еквівалент

```
Двійкове число    Вісімковий еквівалент
100111010001       4721
```

Спочатку переведемо двійкове число у його десятковий еквівалент ось так

$$100111010001_2 = 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2048 + 0 + 0 + 256 + 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2513_{10}$$

Отримали десяткове число: 2513_{10}.

Переведемо число 2513_{10} у вісімкове діленням числа націло на основу вісімкової системи (8)

Переведення десяткового числа 2513_{10} *у вісімкове*

Отримали вісімкове число: $2513_{10} = 4721_8$.

Остаточний результат: $100111010001_2 = 4721_8$.

Двійкове число легко перетворити у вісімкове, розділивши двійкове число на групи *по три біта* в кожній і потім записати під цими групами відповідні цифри вісімкового еквівалента у такий спосіб

```shell
100     111     010     001
4       7       2       1
```

Двійкове число

у 10-й системі числення

Для перетворення числа з будь-якої системи в десяткову необхідно помножити кожну цифру числа на десятковий еквівалент її позиційного значення і всі результати підсумувати.

Для прикладу, поглянемо, як двійкове число 1101011_2 перетворюється у десяткове 107_{10}.

Таблиця "Перетворення двійкового числа в десяткове"

Позиційне значення	64	32	16	8	4	2	1
Символьне значення	1	1	0	1	0	1	1
Множення	1 * 64 = 64	1 * 32 = 32	0 * 16 = 0	1 * 8 = 8	0 * 4 = 0	1 * 2 = 2	1 * 1 = 1
Сума	$= 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 = 107_{10}$						

$$1101011_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 = 107_{10}$$

Двійкове число

у 16-й системі числення

Розглянемо наступне дванадцятизначне двійкове число і його шістнадцятковий еквівалент

```
Двійкове число    Шістнадцятковий еквівалент
100111010001       9D1
```

Спочатку переведемо двійкове число у його десятковий еквівалент ось так

$$100111010001_2 = 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2048 + 0 + 0 + 256 + 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2513_{10}$$

Отримали десяткове число: 2513_{10}.

Переведемо число 2513_{10} у шістнадцяткове діленням числа націло на основу шістнадцяткової системи (16)

Переведення десяткового числа 2513_{10} *у шістнадцяткове*

Отримали шістнадцяткове число: $2513_{10} = 9D1_{16}$.

Остаточний результат: $100111010001_2 = 9D1_{16}$.

Прослідковується закономірність перетворення числа з двійкової системи в шістнадцяткову. А саме, необхідно розділити двійкове число на групи *по чотири біта* в кожній і потім записати під цими групами відповідні цифри шістнадцяткового еквівалента, як це зроблено нижче

```
1001    1101    0001
9       D       1
```

Трійкове число

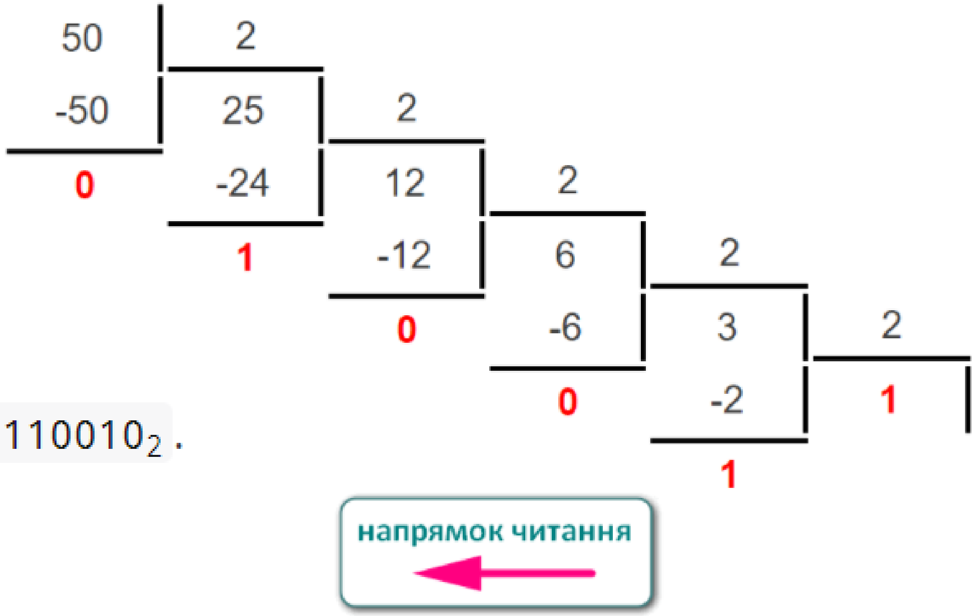
у 2-й системі числення

Переведемо трійкове число 1212_3 у його десятковий еквівалент ось так

$$1212_3 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 18 + 3 + 2 = 50_{10}$$

Отримали десяткове число: 50_{10}.

Переведемо число 50_{10} у двійкове діленням числа націло на основу двійкової системи (2)



Остаточний результат: $1212_3 = 110010_2$.

Переведення десяткового числа 50_{10} у двійкове

Отримали двійкове число: $50_{10} = 110010_2$.

у 8-й системі числення

Трійкове число

Переведемо трійкове число 121212_3 у його десятковий еквівалент ось так

$$121212_3 = 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 243 + 162 + 27 + 18 + 3 + 2 = 455_{10}$$

Отримали десяткове число: 455_{10}.

Переведемо число 455_{10} у вісімкове діленням числа націло на основу вісімкової системи (8)

Переведення десяткового числа 455_{10} у вісімкове

Отримали вісімкове число: $455_{10} = 707_8$.

Остаточний результат: $121212_3 = 707_8$.

Трійкове число
у 10-й системі числення

Для перетворення числа з будь-якої системи в десяткову необхідно помножити кожну цифру числа на десятковий еквівалент її позиційного значення і всі результати підсумувати.

Для прикладу, поглянемо, як трійкове число 120_3 перетворюється у десяткове 15_{10}.

Таблиця "Перетворення трійкового числа в десяткове"

Позиційне значення	9	3	1
Символьне значення	1	2	0
Множення	1 * 9 = 9	2 * 3 = 6	0 * 1 = 0
Сума	$= 9 + 6 + 0 = 15_{10}$		

$$120_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 0 = 15_{10}$$

Остаточний результат: $120_3 = 15_{10}$.

Трійкове число

у 16-й системі числення

Переведемо трійкове число 2021_3 у шістнадцяткову систему числення. Спочатку перетворимо число у його десятковий еквівалент ось так

$$2021_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 54 + 0 + 6 + 1 = 61_{10}$$

Отримали десяткове число: 61_{10}.

Переведемо число 61_{10} у шістнадцяткове діленням числа націло на основу шістнадцяткової системи (16)

Переведення десяткового числа 61_{10} *у шістнадцяткове*

Отримали шістнадцяткове число: $61_{10} = 3D_{16}$.

Остаточний результат: $2021_3 = 3D_{16}$.

Вісімкове число

Вісімкове число

у 2-й системі числення

Наприклад, є число 725_8 у вісімковій системі числення і необхідно перевести його у двійкову. Переведемо число спочатку в десяткову ось так

$$725_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 448 + 16 + 5 = 469_{10}$$

Отримали десяткове число: 469_{10}.

Переведемо число 469_{10} у двійкову систему числення діленням числа націло на основу двійкової системи (2)

Переведення десяткового числа 469_{10} у двійкове

Отримали двійкове число: $469_{10} = 111010101_2$.

Остаточний результат: $725_8 = 111010101_2$.

Вісімкове число

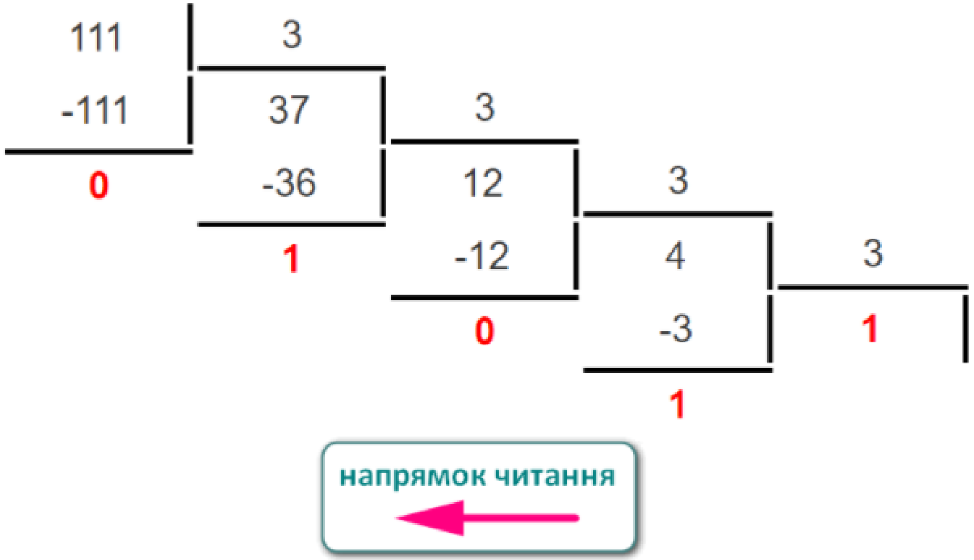
у 3-й системі числення

Наприклад, є число 157_8 у вісімковій системі числення і необхідно перевести його у трійкову. Переведемо число спочатку в десяткову ось так

$$157_8 = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 64 + 40 + 7 = 111_{10}$$

Отримали десяткове число: 111_{10}.

Переведемо число 111_{10} у трійкову систему числення діленням числа націло на снову трійкової системи (3)



Переведення десяткового числа 111_{10} у трійкове

Отримали трійкове число: $111_{10} = 11010_3$.

Вісімкове число

у 10-й системі числення

Для прикладу, перетворимо вісімкове число 7321_8 у десяткове 3793_{10}.

Таблиця "Перетворення вісімкового числа в десяткове"

Позиційне значення	512	64	8	1
Символьне значення	7	3	2	1
Множення	7 * 512 = 3584	3 * 64 = 192	2 * 8 = 16	1 * 1 = 1
Сума	= 3584 + 192 + 16 + 1 = 3793_{10}			

$$7321_8 = 7 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 3584 + 192 + 16 + 1 = 3793_{10}$$

Вісімкове число у 16-й системі числення

Наприклад, число 725_8 у вісімковій системі числення необхідно перевести у шістнадцяткову. Для цього переведемо його спочатку в десяткову ось так

$$725_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 448 + 16 + 5 = 469_{10}$$

Далі, переведемо 469_{10} в шістнадцяткову діленням числа націло на основу шістнадцяткової системи (16)

Переведення десяткового числа 469_{10} у шістнадцяткове

Остаточний результат: $725_8 = 1D5_{16}$.

Десяткове число

у 2-й системі числення

Переведемо число 45_{10} у двійкове діленням числа націло на основу двійкової системи (2)

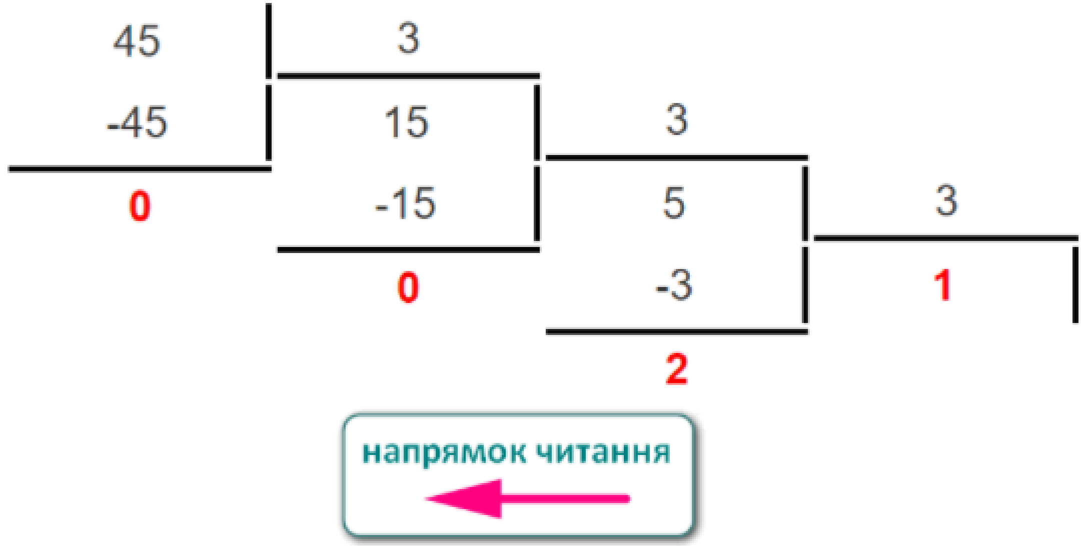
Переведення десяткового числа 45_{10} *у двійкове*

Остаточний результат: $45_{10} = 101101_2$.

Десяткове число

у 3-й системі числення

Переведемо число 45_{10} у трійкове діленням числа націло на основу трійкової системи (3)



Переведення десяткового числа 45_{10} у трійкове

Остаточний результат: $45_{10} = 1200_3$.

Десяткове число

у 8-й системі числення

Переведемо число 45_{10} у вісімкове діленням числа націло на основу вісімкової системи (8)

Переведення десяткового числа 45_{10} у вісімкове

Остаточний результат: $45_{10} = 55_8$.

у 16-й системі числення

Переведемо число 45_{10} у шістнадцякове діленням числа націло на основу шістнадцяткової системи (16)

Переведення десяткового числа 45_{10} у шістнадцяткове

Остаточний результат: $45_{10} = 2D_{16}$.

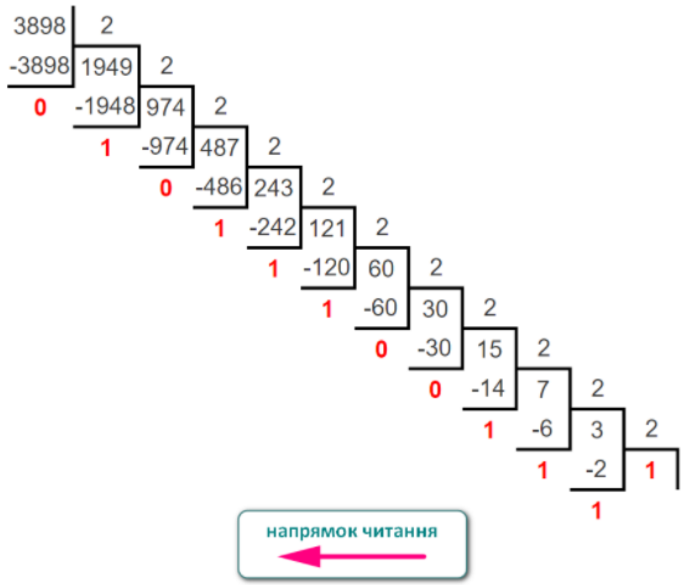
Шістнадцяткове число

у 2-й системі числення

Наприклад, число $F3A_{16}$ у шістнадцятковій системі числення необхідно перевести у двійкову. Для цього переведемо його спочатку в десяткову ось так

$$F3A_{16} = 15 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 3840 + 48 + 10 = 3898_{10}$$

Переведемо 3898_{10} у двійкову систему діленням числа націло на снову двійкової системи (2):



Переведення десяткового числа 3898_{10} *у двійкове*

Отримали двійкове число: $3898_{10} = 111100111010_2$.

Остаточний результат: $F3A_{16} = 111100111010_2$.

Шістнадцяткове число `F3A` також перетворюється в двійкове за допомогою запису `F` як `4`-значного двійкового еквівалента `1111`, числа `3` як двійкового `0011`, числа `A` як `1010`, що дає `12`-значне число `111100111010`

```shell
1111     0011     1010
F        3        A
```

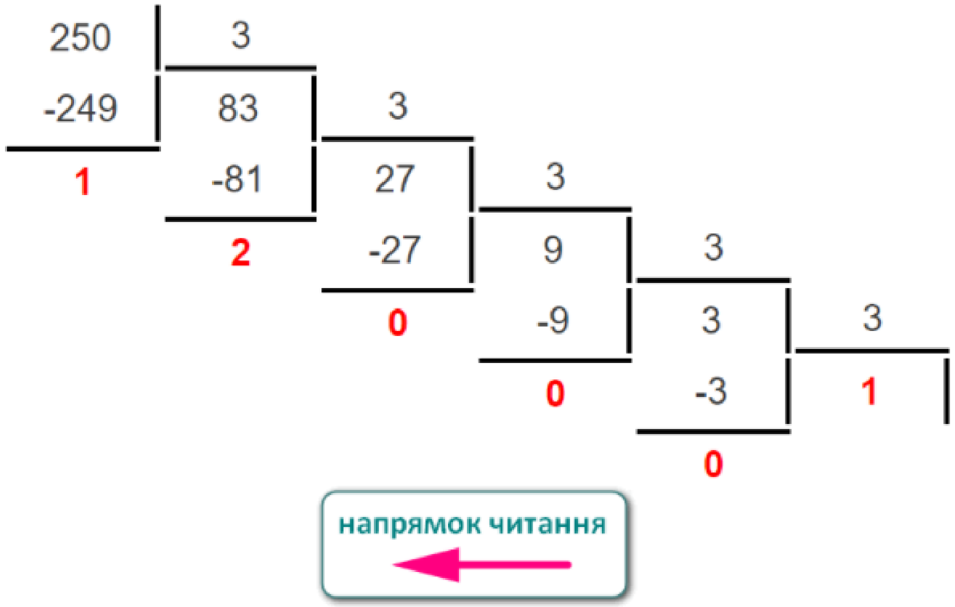
Шістнадцяткове число

у 3-й системі числення

Перетворимо число FA_{16} у шістнадцятковій системі числення у трійкову. Для цього переведемо його спочатку в десяткову ось так

$$FA_{16} = 15 \cdot 16^{1} + 10 \cdot 16^{0} = 240 + 10 = 250_{10}$$

Переведемо 250_{10} у трійкову систему діленням числа націло на снову трійкової системи (3):



Переведення десяткового числа 250_{10} *у трійкове*

Отримали трійкове число: $250_{10} = 100021_{3}$.

Шістнадцяткове число

у 8-й системі числення

Наприклад, число `F3A`$_{16}$ у шістнадцятковій системі числення необхідно перевести у вісімкову. Для цього переведемо його спочатку в десяткову ось так

$$F3A_{16} = 15 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 3840 + 48 + 10 = 3898_{10}$$

Переведемо `3898`$_{10}$ у вісімкову систему діленням числа націло на снову вісімкової системи (`8`)

Переведення десяткового числа `3898`$_{10}$ *у вісімкове*

Остаточний результат: `F3A`$_{16}$ `=` `7472`$_{8}$.

Шістнадцяткове число

у 10-й системі числення

Для прикладу, число $CD3B_{16}$ перетворюється у десяткове 52539_{10}.

Таблиця "Перетворення шістнадцяткового числа в десяткове"

Позиційне значення	4096	256	16	1
Символьне значення	C	D	3	B
Множення	C * 4096 = 49152	D * 256 = 3328	3 * 16 = 48	B * 1 = 11
Сума	= 49152 + 3328 + 48 + 11 = 52539_{10}			

$$CD3B_{16} = 12 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 49152 + 3328 + 48 + 11 = 52539_{10}$$