УКРАЇНА

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Кафедра комп’ютерних наук

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

З ДИСЦИПЛІНИ

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

для студентів спеціалності

121 — “Комп'ютерні науки”

(денна форма навчання)

Київ — 2025

УДК 378.022.51

Викладено методичні вказівки до проведення практичних занять з дисципліни “Чисельні методи”.

Постановка і проведення лабораторних робіт передбачає використання програмного продукту MathCad.

Рекомендовано методичною радою факультету комп’ютерних наук і економічної кібернетики Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Укладачі: доц. **Б.Л. Голуб,** ст.викладач **В.О. Панкратьєв**

Рецензенти**:** канд. техн. наук **В.М. Штепа,**
канд. техн. наук, доц. **І.Л. Бородкіна**

Навчальне видання

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методичні вказівки до проведення практичних занять

для студентів спеціальності 121 — “Комп'ютерні науки”

(денна форма навчання)

Укладачі: ГОЛУБ Белла Львівна
ПАНКРАТЬЄВ Віктор Олександрович

Зав. видавничим центром НУБіП України А.П. Колесніков
Редактор І.В. Сикотюк
Підписано до друку Формат 60×84 1/16.
Ум. друк. арк. 4,7 Обл.–вид. арк. 4,9. Наклад 50 пр. Зам. № 3938

Видавничий центр НУБіП України.
03041, Київ, вул. Героїв Оборони, 15.

ЗМІСТ

Вступ 4

Заняття № 1 5
Чисельні методи розв’язування нелінійних рівнянь. Графічні та аналітичні методи відокремлення коренів. Уточнення коренів. Табличний метод та метод діхотомії

Заняття № 2 11
Методи уточнення коренів. Метод хорд, метод дотичних

Заняття № 3 20
Методи уточнення коренів. Метод ітерацій

Заняття № 4 34
Ітераційні методи розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Заняття № 5 41
Апроксимація. Методи інтерполяції.

Заняття № 6 41
Регресія. Метод найменших квадратів

Заняття № 7 56
Чисельне інтегрування

Заняття № 8 72
Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із застосуванням методу Ейлера

Заняття № 9 77
Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із застосуванням методу Рунге–Кутта

Список літератури 81

Вступ

Методичні вказівки містять завдання до лабораторних робіт, які виконуються студентами під час вивчання курсу. Метою проведення робіт є ознайомлення студентів з чисельними методами розв’язування задач.

Теоретичний матеріал подається стисло і розрахований на студентів, які вперше вивчають цю дисципліну. Наведено приклади розв’язування типових задач.

Перша, друга і третя роботи знайомлять студентів з чисельними методами розв’язування нелінійних рівнянь.

Четверта робота присвячена ітераційним методам розв’язування системи лінійних рівнянь.

У п’ятій та шостій роботах студенти знайомляться з методами апроксимації функції та регресії.

У сьомій роботі розглянуто чисельні методи обчислення визначених інтегралів.

Восьма та дев’ята робота присвячені чисельним методам розв’язування диференціальних рівнянь.

У ході виконаня робіт студенти повинні засвоїти основи роботи в математичному пакеті MathCad.

Після виконання лабораторної роботі студенти здають звіт, який містить:

1) титульний лист;
2) мету роботи;
3) умови завдання;
4) розрахунки;
5) висновки.

При захисті роботи студенти відповідають на контрольні запитання, наведені в кінці кожної роботи.

Заняття № 1

Чисельні методи розв'язування рівнянь.
Графічні та аналітичні методи відокремлення коренів. Уточнення коренів. Табличний метод та метод діхотомії

Мета роботи: ознайомлення з прямими та ітераційними методами розв'язування рівнянь. Вивчити способи відокремлення коренів та методи уточнення коренів.

Теоретичні відомості

Задача знаходження коренів нелінійних рівнянь виду $f(x) = 0$ досить часто зустрічається в наукових дослідженнях.

Нелінійні рівняння можна поділити на два класи – алгебраїчні та трансцендентні.

Алгебраїчними називаються рівняння, які містять тільки алгебраїчні функції, тобто рівняння виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Для алгебраїчних рівнянь до четвертого ступеня включно відомі прямі методи розв'язування.

До **трансцендентних** рівнянь належать ті, які містять у собі показникові (a^x), логарифмічні $(log_a x)$, тригонометричні $(sin\ x, cos\ x, tg\ x\ldots)$ функції, тобто не є алгебраїчними.

Методи розв'язування нелінійних рівнянь поділяють на прямі та ітераційні. Прямі методи дають змогу записати корені у вигляді деякого кінцевого співвідношення.

Але більшу кількість рівнянь неможливо розв'язати прямими (аналітичними) методами. Для їх розв'язування використовують так звані ітераційні методи, тобто методи послідовних наближень. Алгоритм цього методу включає два етапи: відокремлення коренів (локалізацію) та їх уточнення.

Відокремлення кореня

Відокремлення (локалізація) кореня - це визначення відрізка $[a, b]$ на осі Ox, на якому крива функції $y = f(x)$ перетинає вісь, змінюючи знак. Точка перетину є коренем рівняння.

Існують три основних методи відокремлення коренів функції $y = f(x)$:

1) графічний метод, при якому будується крива функції $y = f(x)$ та знаходиться точка перетину з віссю Ox;

2) метод заміни функції $f(x) = 0$ функціями $\varphi(x) = \psi(x)$**.** Точка перетину кривих на графіку дає приблизне знаходження кореня рівняння. Наприклад, $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ можна записати як $x^3 + 1 = 3x - x^2$. Таким чином, $\varphi(x) = x^3 + 1$, $\psi(x) = 3x - x^2$.

Побудувавши графіки, знайдемо точку перетину кривих, абсциса якої буде значенням кореня;

3) табличний метод, або метод прямої підстановки, при якому відрізок $[a, b]$ розбивається на кілька менших відрізків і визначается відрізок, на якому функція змінює знак. Далі цей відрізок знову розбивається на кілька менших відрізків і так далі до необхідної точності. Додамо, що цей метод дозволяє визначати корені з необхідною точністю вже на першому етапі розв'язування та обійтись без другого етапу – уточнення кореня.

Слід зазначити, якщо рівняння просте (наприклад, квадратне або лінійне) або має стандартне рішення, то використовувати чисельні методи немає потреби. Але якщо рівняння, наприклад, таке:

$$f(x)= x^7 - 16x^3 + 4x + e^x = 0,$$

то знайти аналітичний метод рішення навряд чи вдасться. В такому випадку використаємо чисельний метод, наприклад метод половинного поділення, яки розглянемо нижче.

Уточнення коренів

Метод половинного поділення або діхотомії (бісекції) при знаходженні кореня рівняння $f(x)=0$ полягає в поділенні навпіл відрізка $[a, b]$, на якому знаходиться корінь. Потім аналізується зміна знака функції на половинних відрізках і одна з границь відрізка $[a, b]$ переноситься в його середину. Переноситься та границя, зі сторони якої функція на половині відрізка знака не змінює. Якщо виконується умова $f(a) \cdot f(c) < 0$, то праву границю інтервалу переносять у середню точку c $(b = c)$. Якщо ця умова не виконується, тобто $f(a) \cdot f(c) > 0$, то в середню точку переносять ліву границю $(a = c)$. Далі дії повторюються. Коли виконується умова $|a - b| \le 2\varepsilon$, ітерації припиняються. За значення кореня з точністю ε приймають середину відрізка $[a, b]$, на якому виконується умова.

Метод простий для машинної реалізації і використовується в багатьох стандартних програмних засобах, хоча існують інші, більш ефективні за затратами часу методи.

Приклад. Методом діхотомії знайти корінь рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ з точністю до $0{,}001$ на інтервалі [$0, 1$].

Розв'язання. За рівнянням складаємо функцію:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Знайдемо значення функції на кінцях відрізка:

$$f(a) = f(0) = 1 > 0,$$

$$f(b) = f(1) = (1)^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 < 0.$$

Перевіримо виконання нерівності:

$$f(a) \cdot f(b) = f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot -1 = -1 < 0.$$

Умова виконується, тобто можна застосувати метод половинного поділення.

Складаємо таблицю.

Результати обчислень

N	a_n	b_n	$x_n=(a_n+b_n)/2$	$f(x_n)$
0	0	1	0.5	–0,375
1	0	0,5	0,25	0,2656
2	0,25	0,5	0,375	–0,0723
3	0,25	0,375	0,3125	0,0930
4	0,3125	0,375	0,3438	0,0092
5	0,3438	0,375	0,3594	–0,0318
6	0,3438	0,3594	0,3516	–0,0113
7	0,3438	0,3516	0,3477	–0,0011
8	0,3438	0,3477	0,3458	0,0040
9	0,3458	0,3477	0,3468	0,0013
10	0,3468	0,3477	**0,3473**	

Як видно з таблиці корінь дорівнює приблизно $0{,}3473$. Кількість ітерацій 10. Точність обчислення $a - b = 0{,}0009 < 0{,}001.$

Індивідуальні завдання за темою
“ Прямі та ітераційні методи розв’язування рівнянь. Графічні та аналітичні методи відокремлення коренів. Уточнення коренів. Табличний метод та метод діхотомії. ”

1. *a)* $x - \sin x = 0,25;$ b) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0;$

2. *a)* $tg(0,85x + 0,1) = x^2;$ b) $x^3 - 6x - 8 = 0;$

3. *a)* $\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0;$ b) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0;$

4. *a)* $tg(0,4x + 0,4) = x^2;$ b) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0;$

5. *a)* $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0;$ b) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0;$

6. *a)* $tg(0,5x + 0,2) = x^2;$ b) $x^2 + x - 5 = 0;$

7. *a)* $3x - \cos x - 1 = 0;$ b) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0;$

8. *a)* $x + lg\, x = 0,5;$ b) $x^3 + 3x + 1 = 0;$

9. *a)* $tg(0,5x + 0,2) = x^2;$ b) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0;$

10. *a)* $x^2 + 4\sin x = 0;$ b) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0;$

11. *a)* $ctg\, 1,05x - x^2 = 0;$ b) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 12 = 0;$

12. *a)* $tg(0,45x + 0,3) = x^2;$ b) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0;$

13. *a)* $x\, lg\, x - 1,2 = 0;$ b) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0;$

14. *a)* $1,8x^2 - \sin 10x = 0;$ b) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0;$

15. *a)* $ctg\, x - x/4 = 0;$ b) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0;$

16. *a)* $tg(0,3x + 0,4) = x^2;$ b) $x^3 + 4x - 6 = 0;$

17. *a)* $x^2 - 24\sin x = 0;$ b) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 1 = 0;$

18. $a)\ ctg\ x - x/3 = 0;$ b) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0;$

19. $a)\ tg\ (0{,}47x + 0{,}2) = x^2;$ b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x + 1{,}2 = 0;$

20. $a)\ x^2 + 4sin\ x = 0;$ b) $x^3 - 2x + 4 = 0;$

21. $a)\ ctg\ x - x/2 = 0;$ b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0;$

22. $a)\ 2x - lg\ x - 7 = 0;$ b) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0;$

23. $a)\ tg\ (0{,}5x + 0{,}2) = x^2;$ b) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2 = 0;$

24. $a)\ 3x - cos\ x - 1 = 0;$ b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0;$

25. $a)\ ctg\ x - x/10 = 0;$ b) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3{,}2 = 0;$

26. $a)\ x^2 + 4sin\ x = 0;$ b) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 2 = 0;$

27. $a)\ tg\ (0{,}36x + 0{,}4) = x^2;$ b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 2{,}4 = 0;$

28. $a)\ x + lg\ x - 0{,}5 = 0;$ b) $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0;$

29. $a)\ ctg\ x - x/5 = 0;$ b) $x^3 + x - 3 = 0;$

30. $a)\ 2\ lg\ x - x/2 + 1 = 0;$ b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}4 = 0;$

Необхідно:

1) відокремити корені трансцендентного рівняння (*a*) графічно (двома способами) та уточнити один з них табличним методом з точністю до 0,001. Для виконання завдання можна використовувати математичний пакет MathCad.

2) запрограмувати метод діхотомії на алгоритмічній мові та розв’язати рівняння (*b*), використавши власну програму.

Контрольні запитання

1 Що називається відокремленням (локалізацією) коренів?
2 Які існують методи відокремлення коренів?
3. Які класи рівнянь існують?
4. Коли слід використовувати чисельні методи?
5. У чому полягає табличний метод?
6. У чому полягає метод діхотомії?

Заняття № 2

Методи уточнення коренів. Метод хорд, метод дотичних

Мета роботи: ознайомлення з прямими та ітераційними методами розв'язування рівнянь. Вивчити методи уточнення коренів.

Метод хорд

Нехай задане рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – неперервна функція, яка має в інтервалі $[a, b]$ похідні першого та другого порядків.

Корінь відокремлений, знаходиться на відрізку $[a, b]$, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ідея методу полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a, b]$ дуга кривої $y = f(x)$ замінюється стягуючою її хордою. Як наближене значення кореня приймається точка перетину хорди з віссю Ox.

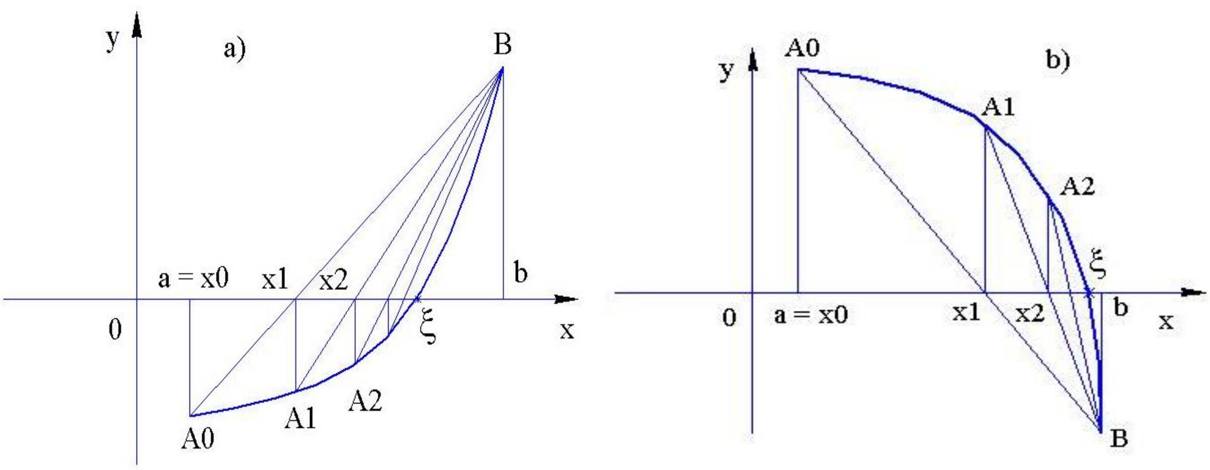


Рис. 2.1. Геометрична інтерпретація методу хорд

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають однакові знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Нехай $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$. Графік функції $f(x) = 0$ проходить через точки $A_0(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$. Корінь рівняння $f(x) = 0$ є абсцисою точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox. Ця точка поки невідома. Якщо ми замінимо дугу A_0B хордою A_0B, то точка перетину хорди з віссю Ox x_1 буде приблизно дорівнювати значенню кореня.

Рівняння хорди, яка проходить через точки A_0 та B, має вигляд:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$. Воно дорівнює:

$$x_1 = a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Ця формула називається формулою хорд.

Тепер корінь рівняння знаходиться в середині відрізка $[x_1, b]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє, його можна уточнити, застосовуючи метод хорд для відрізка $[x_1, b]$.

З'єднаємо точки $A_1(x_1, f(x_1))$ з точкою $B(b, f(b))$ і знайдемо точку перетину хорди A_1B з віссю Ox.

$$x_2 = x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}.$$

Продовжуючи процес, знаходимо

$$x_3 = x_2-\frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)},$$

взагалі

$$x_{n+1} = x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}.$$

Процес продовжуємо поки не визначимо корінь із заданою точністю, тобто $|x_{n-1}-x_{n-1}| \le \varepsilon$, де ε – задана точність.

За вище наведеними формулами обчислюються корені для випадку, коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ та $f''(x) < 0$.

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

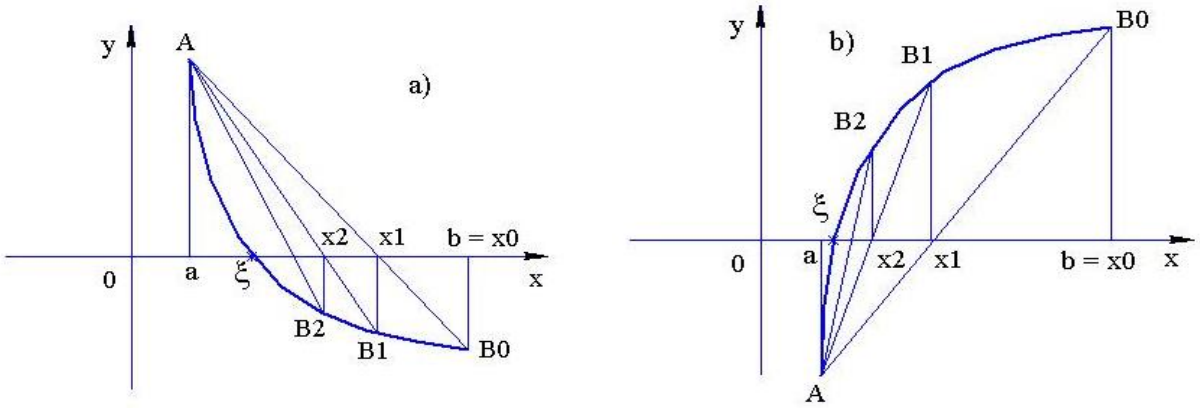


Рис. 2.2. Геометрична інтерпретація методу хорд

Нехай, наприклад, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ та $f''(x) > 0$. З'єднаємо точки $A(a, f(a))$ та $B_0(b, f(b))$ і запишемо рівняння хорди, що проходить через A та B_0:

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}.$$

Далі, діючи як і в попередньому випадку, отримаємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}.$$

За такими саме формулами знаходимо наближене значення кореня і для випадку, коли $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) < 0$.

Вибір формул для уточнення кореня за методом хорд виконують за таким правилом.

Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ на відрізку $[a, b]$, то нерухомим кінцем буде "b", і всі наближення до кореня ξ знаходяться з боку кінця "a".

Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то нерухомий кінець "a", і всі наближення до кореня ξ знаходяться з боку кінця "b".

Можна записати:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)},$$

де c – нерухома точка.

Приклад 1. Методом хорд знайти корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0.01 на інтервалі [$1; 1.7$].

Розв'язання. Корінь рівняння знаходиться на інтервалі [$1; 1.7$], поскільки

$f(1) = -5 < 0$, а $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$.

Розрахунок виконують за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

тому що перша і друга похідні на інтервалі [$1; 1.7$] додатні.

Знаходимо перше наближення при $x_0 = a$.

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} = 1 - \frac{f(1)(1{,}7-1)}{f(1{,}7)-f(1)} = 1{,}588;$$

$$f(1{,}588) = -0{,}817 < 0.$$

Так само знаходимо друге наближення.

$$x_2 = 1{,}588 - \frac{f(1.588)(1{,}7-1{,}588)}{f(1{,}7)-f(1{,}588)} = 1{,}639;$$

$$f(1.639) = -0{,}051 < 0.$$

Знаходимо третє наближення.

$$x_2 = 1{,}639 - \frac{f(1{,}639)(1{,}7-1{,}639)}{f(1{,}7)-f(1{,}639)} = 1{,}642;$$

$$f(1{,}642) = -0{,}016 < 0.$$

Знаходимо четверте наближення.

$$x_3 = 1{,}642 - \frac{f(1{,}642)(1{,}7-1{,}642)}{f(1{,}7)-f(1{,}642)} = 1{,}643;$$

$$f(1{,}643) = 0{,}004 > 0.$$

Тобто обчислення можна припинити і прийняти приблизне значення кореня $x = 1{,}64$ з точністю до $0{,}01$.

Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай задане рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – безперервна функція, яка має в інтервалі $[a, b]$ похідні першого та другого порядків і вони зберігають знаки на цьому відрізку**.**

Корінь відділений, знаходиться на відрізку $[a, b]$, тобто $f(a)\cdot f(b) < 0$. Геометричний сенс ***методу Ньютона*** полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a, b]$ дуга кривої $y = f(x)$ замінюється дотичною до цієї кривої. Як наближене значення кореня приймається точка перетину дотичної з віссю Ox.

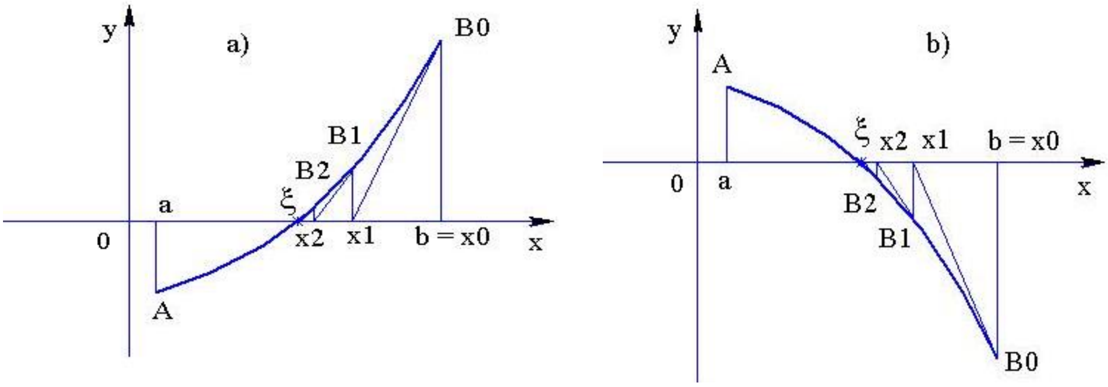


Рис.2.3. Геометрична інтерпретація методу дотичних

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають однакові знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Нехай $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$. Графік функції $f(x) = 0$ проходить через точки $A(a, f(a))$ та $B_0(b, f(b))$. Корінь рівняння $f(x) = 0$ є абсцисою точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox. Ця точка поки невідома. Якщо провести дотичну до кривої в точці A, то вона перетне вісь Ox у точці, що не належить відрізку $[a, b]$. Тоді проведемо дотичну у точці B_0.

Рівняння дотичної в точці $B_0(b; f(b))$ має вигляд:

$$y - f(b) = f'(b) \cdot (x - b).$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Ця формула називається формулою дотичних.

Тепер корінь рівняння знаходиться в середині відрізка $[a, x_1]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє, його можна уточнити, застосовуючи метод дотичних для відрізка $[a, x_1]$.

Проведемо дотичну в точці $B_1(x_1, f(x_1))$ і знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продовжимо процес і знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

взагалі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Процес продовжуємо поки не визначимо корінь із заданою точністю, тобто $| x_{n-1} - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність.

За вище наведеними формулами обчислюються корені для випадку, коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ та $f''(x) < 0$.

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

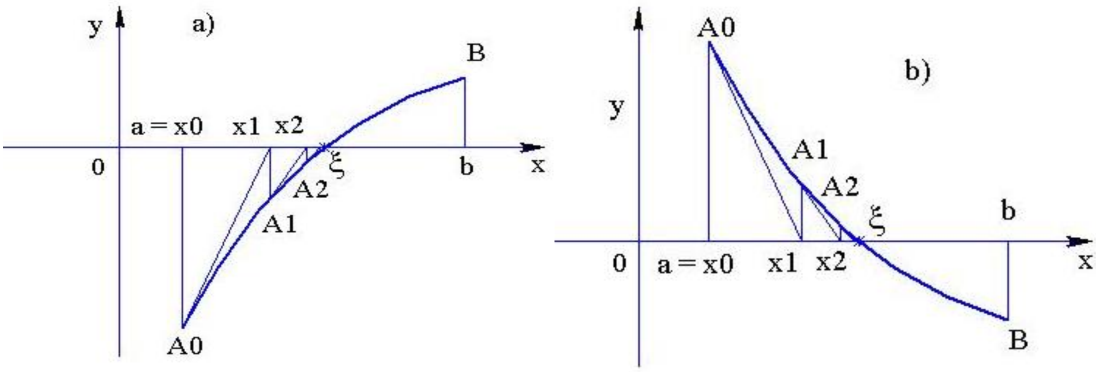


Рис.2.4. Геометрична інтерпретація методу дотичних

Нехай, наприклад, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) < 0$ або $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ та $f''(x) > 0$. Якщо провести дотичну до кривої в точці B, то вона перетинатиме вісь Ox у точці, що не належить відрізку $[a, b]$. Тоді проведемо дотичну в точці A_0. Рівняння дотичної в точці A_0 $(a; f(a))$ має вигляд:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Продовжуючи цей процес, одержимо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Таким чином, ми отримуємо послідовність наближених значень $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Розрахунки закінчуємо тоді, коли $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, де ε – задана точність.

У першому і другому випадках формули відрізняються тільки початковим наближенням: в першому випадку за x_0 приймаємо кінець відрізка b, у другому – початок a.

Вибір формул для уточнення кореня за методом дотичних виконують за таким правилом.

Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ на відрізку $[a, b]$, то нерухомим кінцем буде "a", і всі наближення до кореня ξ знаходяться з боку кінця "b".

Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то нерухомий кінець "b" і всі наближення до кореня ξ знаходяться з боку кінця "a".

Для оцінки похибки можна скористатися загальною формулою

$$|\xi - x_n| \le |f(x_n)| / m$$

$$\text{äĺ} \quad m = \min_{|a,b|} |f'(x_n)|$$

(цю формулу можна застосовувати і для методу хорд).

Приклад 2. Методом дотичних знайти корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0.01 на інтервалі $[1; 1.7]$.

Розв'язання. В цьому рівнянні

$f(x) = x^4 - 2x - 4;$

$f'(x) = 4x^3 - 2;$

$f''(x) = 12x^2.$

Перша і друга похідні мають один знак на інтервалі. Тому нерухомим кінцем буде "a". Тоді $x_0 = b = 1{,}7$. Розрахунок будемо вести за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Знаходимо перше наближення.

$f(1,7) = 1,7^4 – 2 \cdot 1,7 – 4 = 0,952;$
$f'(1,7) = 4 \cdot 1,7^3 – 2 = 17,652.$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,7 - \frac{f(1,7)}{f'(1,7)} = 1,7 - \frac{0,952}{17,652} = 1,646.$$

Так само знаходимо друге наближення.

$f(1,646) = 1,646^4 – 2 \cdot 1,646 – 4 = 0,048;$
$f'(1,646) = 4 \cdot 1,646^3 – 2 = 15,838.$

$$x_2 = 1,646 - \frac{0,048}{15,838} = 1,643.$$

Знаходимо третє наближення.

$f(1,643) = 1,643^4 – 2 \cdot 1,643 – 4 = 0,004;$
$f'(1,643) = 4 \cdot 1,643^3 – 2 = 15,740.$

$$x_3 = 1,643 - \frac{0,004}{15,740} = 1,6427.$$

Тобто, можна прийняти приблизне значення кореня $x = 1,64$ з точністю до $0,01$.

Метод однієї дотичної

Існує спрощений метод розв’язання рівнянь, який базується на методі Ньютона. Це так званий метод однієї дотичної. Суть методу полягає в тому, що похідна $f'(x)$ обраховується тільки один раз (у точці *“a”* або *“b”* інтервалу [a, b]) і це значення використовують при подальших обчисленнях. Тобто, всі прямі лінії, які проводяться в наступних ітераціях, паралельні першій дотичній, і самі вже не є дотичними до кривої $f(x)$.

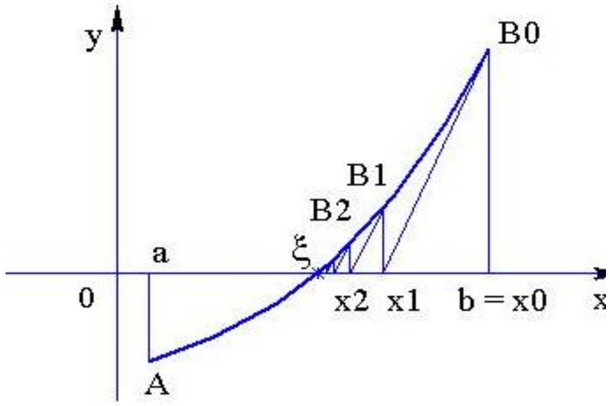


Рис.2.5. Геометрична інтерпретація методу однієї дотичної

Обчислення ведеться за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Метод простіший, але “повільніший” за метод Ньютона, поскільку для досягнення необхідної точності потрібно зробити більшу кількість ітерацій.

Комбінованій метод (хорд – дотичних)

Один з найчастіше використовуваних методів уточненкя коренів – метод одночасного використання методу хорд і методу дотичних. Це так званий комбінованний метод. Його зручно використовувати, коли на відрізку $[a, b]$, де існує тільки один корінь, друга похідна $f''(x)$ не змінює знака. Постійність знаку $f''(x)$ означає: крива або опукла $(f''(x) < 0)$, або вігнута $(f''(x) > 0)$.

У цьому випадку наближення до кореня здійснюється з двох сторін – дотична перетинає вісь Ox зі сторони опуклості, а хорда – зі сторони увігнутості графіка функції $y = f(x)$. Інтервал як би ”стискається з обох сторін”.

Як і в методі хорд та методі дотичних, розглянемо два випадки.

Нехай задане рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – неперервна функція, яка має в інтервалі $[a, b]$ похідні першого та другого порядків.

Розглянемо випадок, коли перша та друга похідні мають однакові знаки, тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Нехай $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$. Графік функції $f(x) = 0$ проходить через точки $A_0(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$. Тоді, користуючись методом хорд і методом дотичних, можна записати:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b - a_n)}{f(b) - f(a_n)};$$

$$b_{n+1} = x_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Якщо перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x)\cdot f''(x) < 0$, тоді можна записати:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a)}{f(b_n) - f(a)};$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Додамо, що при розрахунках можна використовувати інші комбіновані методи. Наприклад, замість методу Ньютона використати спрощений метод. Можна також прискорити обчислення, якщо, наприклад, у випадку $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ в перше рівняння при кожній наступній ітерації підставляти не ”b”, яке в методі хорд є нерухомим, а “b_n”, яке знайдене в попередній ітерації із другого рівняння, тобто:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)};$$

$$b_{n+1} = x_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Якщо задана допустима похибка ε, то обчислення припиняється, як тільки $|a_n - b_n| \le \varepsilon$. За значення кореня слід прийняти $x = (a_n + b_n)/2$.

Необхідно:

1) Розв’язати рівняння (a) з попереднього завдання методом хорд і Ньютона або комбінованим методом з точністю до 0,01.

2) Порівняти результати з результатами, отриманними в попередній роботі.

3) Перевірити розрахунки за допомогою пакету MathCad, Exel або іншим.

Контрольні запитання

1 Які існують методи уточнення коренів?
2. В чому полягає метод хорд?
3. В чому полягає метод дотичних?
4. Яка умова сходимості ітераційного процесу?
5. Які ще методи уточнення коренів ви знаєте?

Заняття № 3

Методи уточнення коренів. Метод ітерацій

Метод ітерацій (метод послідовних наближень)

Якщо яким–небудь способом одержано наближене значення x_0 кореня рівняння $f(x) = 0$, то уточнення кореня можна виконати методом послідовних наближень або методом ітерацій. Для цього рівняння $f(x) = 0$ записують у вигляді $x = \varphi(x)$. Функція $x = \varphi(x)$ називається ітераційною функцією.

Виберемо будь–яке значення x_0 із відрізка $[a, b]$ і підставимо його в праву частину рівняння $x = \varphi(x)$. Отримаємо значення $x_1 = \varphi(x_0)$. Потім значення x_1 підставимо знову у рівняння та одержимо x_2. Повторюючи цей процес, отримаємо послідовність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обчислювальний процес закінчимо тоді, коли $| x_{i+1} - x_i | \le \mu$ (μ – задана точність обчислень).

При обчисленнях можливі два випадки:

а) послідовність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n\ldots$ **збігається**, тобто є межа і ця межа буде коренем рівняння $f(x) = 0$;

б) послідовність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n\ldots$ **розбігається**, тобто немає межі.

Метод ітерацій використовується тоді, коли виконується умова:

$|\varphi'(x)| < 1$. При цьому чим менше $\varphi'(x)$, тим краще збіжність ітераційного процесу.

Записати рівняння можна різними способами. Наприклад, рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ можна замінити такими:

$$x = x^4 - x - 4; \qquad (\varphi(x = x^4 - x - 4);$$

$$x = (x^4 - 4)/2; \qquad (\varphi(x = (x^4 - 4)/2);$$

$$x = \sqrt[4]{2x+4}; \qquad (\varphi(x = \sqrt[4]{2x+4}).$$

Ітераційний процес збігається, якщо на відрізку $[a, b]$ виконується умова:

$$\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| \le q < 1.$$

Як перше наближення можна довільно прийняти значення з інтервалу, в якому знаходиться корінь рівняння.

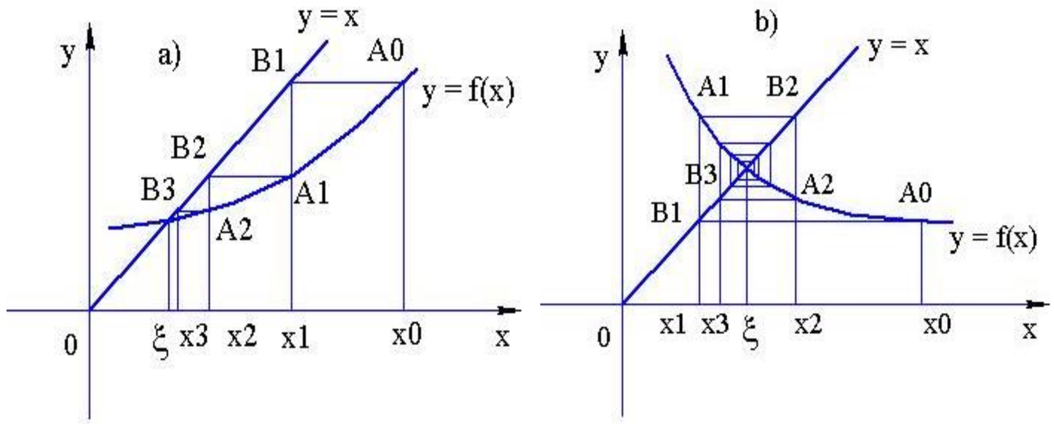


Рис. 2.6. Геометрична інтерпретація методу ітерацій

Приклад 3. Методом ітерацій розв’язати рівняння $5x^3 - 20x + 3 = 0$ на відрізку $[0, 1]$.

Розв’язання. Це рівняння можна привести до вигляду $x = \varphi(x)$ двома способами:

$x = x + 5x^3 - 20\,x + 3$; тоді $\varphi_1(x) = 5x^3 - 19\,x + 3;$

$x = (5x^3 + 3)/2;$ тоді $\varphi_2(x) = (5x^3 + 3)/20.$

Визначимо, яку з функцій слід використовувати в методі ітерацій.

Обчислимо та оцінимо значення похідних обох функцій на заданому інтервалі.

$$\varphi'(x) = 15x^2 - 19 > 1 \quad \text{íŕ} \quad [0,1];$$

$$\varphi'(x) = 15x^2 / 20 < 1 \quad \text{íŕ} \quad [0,1].$$

Очевидно, що слід скористатися другою формулою для уточнення кореня рівняння $5x^3 - 20x + 3 = 0$ на відрізку $[0, 1]$.

Для оцінки похибки методу ітерацій використовується формула:

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

А якщо $q \le 0.5$ похибка визначається за формулою:

$$|\xi - x_n| \le |\, x_n - x_{n-1} \,|$$

У цій формулі ξ – корінь рівняння з інтервалу.

Приклад 4. Методом ітерацій знайти корінь рівняння $x^3 - 5x + 1 = 0$ з точністю до $0,0001$ на інтервалі $[0;\ 0,5]$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$x = \frac{x^3+1}{5}, \quad \text{де} \quad \frac{x^3+1}{5} = \varphi(x).$$

Похідна від $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{3x^2}{5}.$$

Оскільки

$$\max_{0 \le x \le 0.5} |\varphi'(x)| = \frac{3}{20} < \frac{1}{2},$$

процес ітерацій збігається.

Приймемо $x_0 = 0,25$ (середина інтервалу) і почнемо обчислювання за формулою:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3+1}{5}.$$

Результати обчислень запишемо в таблицю.

Результати обчислень

N	x_n	$x_{n+1} = \frac{x_n^3+1}{5}$	$\lvert x_n - x_{n+1}\rvert$
0	0,25	0,020313	0,04687
1	0,20313	0,020168	0,00145
2	0,20168	0,020164	0,00004

Як бачимо, корінь рівняння $x = 0,020164$, обчислений з точністю $|\xi - x_n| = |\xi - 0,020164| \le |x_2 - x_1| = |0,020164 - 0,20168| = = 0,00004 < \varepsilon = 0,0001.$

Необхідно:

1) Розв’язати рівняння (b) з попереднього завдання методом ітерацій з точністю до 0,01.

2) Порівняти результати з результатами, отриманними в попередній роботі.

3) Перевірити розрахунки за допомогою пакету MathCad.

Контрольні запитання

1 Які існують методи уточнення коренів?
2. В чому полягає метод ітерацій?
3. Яка умова сходимості ітераційного процесу?
4. Які ще методи уточнення коренів ви знаєте?

Заняття № 4

Ітераційні методи розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета роботи: ознайомитися з ітераційними методами розв'язування систем лінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Як уже зазначалося, ітераційні методи належать до наближених методів. Вони характеризуються великою кількістю обчислювань, що однак не заважає їм бути за своїй структурою достатньо простими. За рахунок наближень ми отримуємо нові наближення і, якщо система задовольняє умові збіжності, ці наближення все менше відрізнятимуться від аналітичного рішення.

Метод ітерацій (від латинського iteration – повторення) можна назвати методом послідовних наближень. Він цікавий тим, що дозволяє знайти рішення з деякою заздалегідь заданою точністю, крім того, невеликі помилки, зроблені в процесі обчислень, потім виправляються, тобто метод є самовиправним. Метод ітерацій легко програмується, його зручно використовувати в комп'ютерных обчисленнях.

Метод прямої ітерації

Розглянемо систему трьох лінійних ріавнянь з трьома невідомимими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Запишемо цю систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{cases} \qquad (2)$$

Задамо нульові наближення:

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad x_3 = x_3^{(0)}.$$

Тоді,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}) \end{cases}$$

Закінчена перша ітерація і визначені $x_1^{(1)}, \quad x_2^{(1)}, \quad x_3^{(1)}$.

Далі підставляємо одержані значення в (2) і віконуємо наступну ітерацію. Процесс продовжується до отримання результату з необхідною точністю.

Необхідною умовою є наступне: модулі діагональних коефіцієнтів повинні бути не менше за суму модулів інших коефіцієнтів відповідних рівнянь, тобто

$$a_{ij} \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

Приклад 1. Розв’язати систему трьох рівнянь за методом ітерацій.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо цю систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}(4 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{6}(7 - 2x_1 + x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

Задамо нульові наближення:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0.$$

Тоді,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{4}(4+0-0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{6}(7-0+0) = \dfrac{7}{6} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{3}(1+0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Закінчена перша ітерація і визначені:

$$x_1^{(1)} = 1, \quad x_2^{(1)} = \frac{7}{6}, \quad x_3^{(1)} = \frac{1}{3}.$$

Підставимо одержані значення та отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}(4+\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{29}{24} \\ x_2 = \dfrac{1}{6}(7-2+\dfrac{1}{3}) = \dfrac{8}{9} \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(1+2\cdot\dfrac{7}{6}) = \dfrac{10}{9} \end{cases}$$

Закінчена друга ітерація і визначені:

$$x_1^{(1)} = \frac{29}{24}, \quad x_2^{(1)} = \frac{8}{9}, \quad x_3^{(1)} = \frac{10}{9}.$$

Знову підставляємо одержані значення в (1) і продовжуючи ітерації, нарешті отримаємо $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Метод Зейделя

Метод Зейделя нагадує метод прямої ітерації, але є деякі відмінності.

Обчислення виконують в такому порядку:

a) задаються нульові наближення, потім із першого рівняння обчислюється перше невідоме і це значення першого невідомого підставляється в друге рівняння;

b) обчислюється друге невідоме, його значення разом з першим підставляється в третє рівняння;

c) обчислюється третє невідоме.

Далі виконується наступна ітерація.

Розглянемо систему трьох лінійних ріавнянь з трьома невідомимими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{3}$$

Як і в прикладі 1 запишемо цю систему в наступному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{cases} \tag{4}$$

Задамо нульові наближення $x_2 = x_2^{(0)}, \quad x_3 = x_3^{(0)}.$

Тоді,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}) \end{cases}$$

Закінчена перша ітерація і визначені $x_1^{(1)}, \quad x_2^{(1)}, \quad x_3^{(1)}.$

Далі підставляємо одержані значення в (4) і віконуємо наступну ітерацію. Процесс продовжується до отримання результату з необхідною точністю.

Приклад 2. Розв’язати систему трьох рівнянь за методом Зейделя.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо цю систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{6}(7 - 2x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

Задамо нульові наближення $x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0.$
Тоді,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4+0-0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(7 - 2\cdot 1 + 0) = \frac{5}{6} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{3}(1 + 2\cdot\frac{5}{6}) = \frac{8}{9} \end{cases}$$

Закінчена перша ітерація і визначені

$$x_1^{(1)} = 1, \quad x_2^{(1)} = \frac{5}{6}, \quad x_3^{(1)} = \frac{8}{9}.$$

Підставимо одержані значення і отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4 + \frac{5}{6} - \frac{8}{9}) = \frac{71}{72} \\ x_2 = \frac{1}{6}(7 - 2\cdot\frac{71}{72} + \frac{8}{9}) = \frac{71}{72} \\ x_3 = \frac{1}{3}(\frac{71}{72} + 2\cdot\frac{71}{72}) = \frac{71}{72} \end{cases}$$

Закінчена друга ітерація і визначені

$$x_1^{(1)} = \frac{71}{72}, \quad x_2^{(1)} = \frac{71}{72}, \quad x_3^{(1)} = \frac{71}{72}.$$

Знову підставляємо одержані значення і, продовжуючи ітерації, нарешті отримаємо $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Індивідуальні завдання за темою “ Ітераційні методи виРозв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь ”

ВАРІАНТ 1

$10x + y + z = 12$
$2x + 10y + z = 13$
$2x + 2y + 10z = 14$

ВАРІАНТ 2

$4x + 0{,}24y – 0{,}08z = 8$
$0{,}09x + 3y + 0{,}015z = 9$
$0{,}04x – 0{,}08y + 4z = 20$

ВАРІАНТ 3

$4x – y + z = 4$
$x + 6y + 2z = 9$
$–x – 2y + 5z = 2$

ВАРІАНТ 4

$2x – y – z = –3$
$3x + 5y – z = 1$
$x – 4y + 10z = 0$

ВАРІАНТ 5

$10x + 2y + 6z = 28$
$x + 10y + 8z = 7$
$2x – 7y – 10z = –17$

ВАРІАНТ 6

$7{,}6x + 0{,}5y – 2{,}4z = 1{,}9$
$2{,}2x + 9{,}1y + 4{,}4z = 9{,}7$
$–1{,}3x + 0{,}2y + 5{,}8z = –1{,}4$

ВАРІАНТ 7

$20x + 2y + 6z = 38$
$x + 20y + 9z = –23$
$2x – 7y – 20z = –57$

ВАРІАНТ 8

$x – 0{,}2y – 0{,}2z = 0{,}6$
$–0{,}1x + y – 0{,}2z = 0{,}7$
$–0{,}1x – 0{,}1y + z = 0{,}8$

ВАРІАНТ 9

$5x + 0{,}5y + 0{,}5z = 6$
$x + 5y + 0{,}5z = 6{,}5$
$x + y + 5z = 7$

ВАРІАНТ 10

$7{,}6x + 0{,}5y + 2{,}4z = 1{,}9$
$2{,}2x + 9{,}1y + 4{,}4z = 9{,}7$
$–1{,}3x + 0{,}2z + 5{,}8z = –1{,}4$

ВАРІАНТ 11

$x + 0{,}1y + 0{,}1z = 1{,}2$
$0{,}2x + y + 0{,}1z = 1{,}3$
$0{,}2x + 0{,}2y + z = 1{,}4$

ВАРІАНТ 12

$2x + 0{,}12y – 0{,}04z = 4$
$0{,}03x + y – 0{,}05z = 3$
$0{,}01x + 0{,}02y + z = 5$

ВАРІАНТ 13

$2x – 0{,}5y + 0{,}5z = 2$
$0{,}5x + 3y + z = 4{,}5$
$–2x – 4y + 10z = 4$

ВАРІАНТ 14

$4x – 2y – z = 6$
$1{,}5x + 2{,}5y – 0{,}5z = 0{,}5$
$0{,}25x – y + 2{,}5z = 0$

ВАРІАНТ 15

$10x + y + z = 12$
$2x + 10y + z = 13$
$2x + 2y + 10z = 14$

ВАРІАНТ 16

$4x + 0{,}24y – 0{,}08z = 8$
$0{,}09x + 3y + 0{,}015z = 9$
$0{,}04x – 0{,}08y + 4z = 20$

ВАРІАНТ 17

$4x – y + z = 4$
$x + 6y + 2z = 9$
$–x – 2y + 5z = 2$

ВАРІАНТ 18

$2x – y – z = –3$
$3x + 5y – 3z = 1$
$x – 4y + 10z = 0$

ВАРІАНТ 19

$x – 0{,}2y – 0{,}2z = 0{,}6$
$–0{,}1x + y – 0{,}2z = 0{,}7$
$–0{,}1x – 0{,}1y + z = 0{,}8$

ВАРІАНТ 20

$5x + 0{,}5y + 0{,}5z = 6$
$x + 5y + 0{,}5z = 6{,}5$
$x + y + 5z = 7$

ВАРІАНТ 21

$7{,}6x + 0{,}5y + 2{,}4z = 1{,}9$
$2{,}2x + 9{,}1y + 4{,}4z = 9{,}7$
$–1{,}3x + 0{,}2y + 5{,}8z = –1{,}4$

ВАРІАНТ 22	ВАРІАНТ 23	ВАРІАНТ 24
$x + 0{,}1y + 0{,}1z = 1{,}2$	$x - 0{,}2y - 0{,}2z = 0{,}4$	$4x + 0{,}24y - 0{,}08z = 7$
$0{,}2x + y + 0{,}1z = 1{,}3$	$-0{,}1x + y - 0{,}2z = 0{,}8$	$0{,}1x + 3y + 0{,}02z = 9$
$0{,}2x + 0{,}2y + z = 1{,}4$	$-0{,}1x - 0{,}1y + z = 0{,}7$	$0{,}05x - 0{,}08y + 4z = 21$

Необхідно:

1) Розв’язати систему трьох лінійних рівнянь за методами ітерацій та Зейделя, зробивши три ітерації.

2) Розв’язати систему, використавши блок Given–Find системи MathCad, і порівняти результат з результатами, отриманими методами ітерацій та Зейделя.

Контрольні запитання

1 Яка система називається сумісною?

2 Як називається система, яка не має жодного рішення?

3. Які існують методи розв’язування систем лінійних рівнянь?

4. Коли слід використовувати ітераційні методи?

5. У чому полягає відмінність методів прямих ітерацій та Зейделя?

6. Яка умова можливості використання ітераційних методів?

7. Який метод, на вашу думку, забезпечує більшу швидкість досягнення потрібної точності обчислень?

Заняття № 5

Апроксимація

Мета роботи: засвоїти методи апроксимації функцій.

Теоретичні відомості

Поняття про наближення функції

Апроксимацією називають знаходження такої функції, яка найточніше описує функцію, задану у вигляді таблиці, тобто ***заміну функції f(x) функцією φ(x), близькою до першої.***

Якщо наближення виконується на заданому дискретному інтервалі множени точок $\{ x_i \}$, то таку апроксимацію називають точковою. При побудові наближення на неперервній множині точок, наприклад на відрізку $[a, b]$, апроксимація називається неперервною, або інтегральною.

Інтерполяція

Одним з основних типів точкової апроксимації є інтерполяція.

Найпростіша задача інтерполяції полягає в такому: на відрізку задані точки, які називаються вузлами інтерполяції, і значення деякої функції у цих точках.

Необхідно побудувати таку функцію (так звану інтерполяційну функцію), яка приймає у вузлах інтерполяції ті самі значення, що й функція. Тобто треба знайти криву певного типу, що проходить через задану систему точок. Знайшовши таку функцію, ми зможемо знайти її значення в кожній точці відрізку. Можно дати таке визначення інтерполяції.

Інтерполяція – це спосіб знаходження проміжних значень функції за дискретним набором відомих значень.

Приклад 1. Дана таблиця, в якій вказана температура тіла в різні моменти часу.

t	0'	10'	20'	30'
T	60^o	90^o	80^o	20^o

Необхідно знайти функцію, яка описує залежність температури від часу, тобто дозволяє знайти температуру тіла в заданий в момент часу.

Розв'язання. Для рішення задачі спробуємо знайти найпростішу функцію, яка при заданих значеннях аргумента (часу) приймала би ті самі значення функції (температури), що вказані в таблиці. Найпростішою функцією, зручною для обчислень, є поліном (ціла раціональна функція). Оскільки в таблиці вказані чотири значення функції, будемо шукати поліном третього ступеня.

$$\varphi(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \tag{1}$$

або
$$T = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

У такому виразі $t = 0, 10, 20, 30.$

Коефіцієнти a, b, c, d нам невідомі. Підберемо їх так, щоб при $t = 0, 10, 20, 30$ поліном (1) прийняв відповідно значення $T = 60, 90, 80, 20.$

Підставимо послідовно значення t у поліном (1) і прирівняємо відповідним значенням T. Отримаємо систему рівнянь:

$$d = 60 \qquad (\textit{при } t = 0, \ T = 60)$$
$$1000a + 100b + 10c + d = 90 \qquad (\textit{при } t = 10, T = 90)$$
$$8000a + 400b + 20c + d = 80 \qquad (\textit{при } t = 20, T = 80)$$
$$27000a + 900b + 30c + d = 20 \qquad (\textit{при } t = 30, \mathrm{T} = 20)$$

Розв'язавши систему, одержимо:

$$a = –1/600, \ b = –3/20, \ c = 14/3.$$

Поліном буде мати вигляд:

$$T = – (1/600)t^3 – (3/20)t^2 + (14/3)t + 60.$$

Користуючись виразом, ми можемо знайти температуру тіла в кожен момент часу від $0'$ до $30'$. Наприклад, в момент $t = 17'$:

$T = – (1/600)17^3 – (3/20)17^2 + (14/3)17 + 60 = 87{,}8,$ тобто $T = 87{,}8^o.$

Весь цей процес називається інтерполяцією, а знайдена функція називається інтерполяційною функцією. Саму функцію записують у вигляді ***полінома:***

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ \dots + a_n$$

Інтерполяція за допомогою полінома називається ***параболічною***.

Точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, в яких функція має значення $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, називають вузлами інтерполяції.

Якщо між різними вузлами поліноми різні, то така інтерполяція називається локальною.

Якщо поліном один для всього інтервалу інтерполяції, то така інтерполяція називається глобальною.

За допомогою полінома можна знаходити значення функції у вузлах, які знаходяться за межами інтервалу. В такому випадку процес знаходження значень функції називають ***екстраполяцією***.

Інтерполяційний поліном Лагранжа

В загалному випадку для $n+1$ вузлів інтерполяційний поліном має вигляд

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i. \quad (2)$$

Ця формула називається інтерполяційний поліном Лагранжа.

Лінійна інтерполяція

Якщо задані значення функції в двох вузлах x_0 та x_1 і ці значення дорівнюють y_0 та y_1, то лінійну функцію на відрізку можна записати формулою:

$$y = Ax + B,$$

в якій при $x = x_0$ $y = y_0$, а при $x = x_1$ $y = y_1$.

Тоді можна записати:

$$y = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} y_1$$

Приклад 2. Потрібно побудувати інтерполяційний поліном для функції, яка задана у вигляді таблиці:

x	x_0	x_1
y	y_0	Y_1

з такими чисельними значеннями:

x	1	3
y	1	9

Розв'язання. В даному випадку маємо два вузли інтерполяції і рішення будемо шукати за формулою

$$y = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1.$$

Підставивши чисельні значення, одержимо:

$$y = \frac{(x-3)}{(1-3)} 1 + \frac{(x-1)}{(3-1)} 9 = 4x - 3,$$

або $y = 4x - 3$.

Графік функції має вигляд прямої лінії.

Квадратична інтерполяція

Якщо задані значення функції в трьох вузлах x_0, x_1 та x_2 і ці значення дорівнюють y_0, y_1 та y_2, то інтерполяційний поліном буде мати вигляд параболи, яку можна описати рівнянням виду:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Він може бути знайдений за формулою:

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2.$$

Приклад 3. Потрібно побудувати інтерполяційний поліном для функції, яка задана у вигляді таблиці:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

з такими чисельними значеннями:

x	1	3	4
y	12	4	6

Розв'язання. В даному випадку маємо три вузли інтерполяції і рішення будемо шукати за формулою:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Підставивши чисельні значення, отримаємо:

$$y = \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)}12 + \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}4 + \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}6 = 2x^2 - 12x + 22,$$

$$\text{або} \quad y = 2x^2 - 12x + 22.$$

Побудуємо графік функції. Він має вигляд параболи (рис. 5.1.).

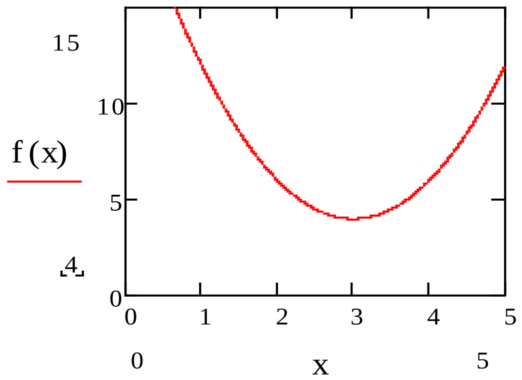


Рис. 5.1. Графік функції $y = 2x^2 - 12x + 22$

Кубічна інтерполяція

Якщо задані значення функції в чотирьох вузлах x_0, x_1, x_2 та x_3 і ці значення дорівнюють y_0, y_1, y_2 та y_3, то інтерполяційний поліном буде мати вигляд кубічної параболи, яку можна описати рівнянням виду:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Він може бути знайдений за формулою:

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_3)}y_1+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_2-x_2)}y_3.$$

Приклад 4. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа за наступними даними:

x	*0*	*2*	*3*	*5*
y	*1*	*3*	*2*	*5*

Розв'язання. В цьому випадку маємо чотири вузли інтерполяції і рішення будемо шукати за формулою:

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_3)}y_1+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_2-x_2)}y_3.$$

Підставивши чисельні значення, отримаємо:

$$y=\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}\cdot 1+\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)}\cdot 3+\frac{x(x-2)(x-5)}{2(3-2)(3-5)}\cdot 2+\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)}\cdot 5=$$
$$=\frac{2}{15}x^3-x^2+\frac{37}{15}x+1.$$

Побудуємо графік функції. Він має вигляд кубічної параболи (рис. 5.2).

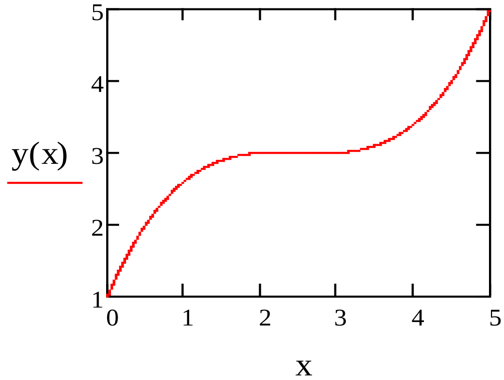


Рис. 5.2. Графік функції $y = \frac{2}{15}x^3 - x^2 + \frac{37}{15}x + 1$

Приклад 5. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $y = sin(\pi x)$ за такими значеннями функції в вузлах: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/4$, $x_3 = 1/2$.

Розв'язання. В заданих вузлах функція дорівнює: $y_0 = 0$, $y_1 = 1/2$, $y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $y_3 = 1$.

Користуючись формулою Лагранжа, отримуємо інтерполяційний поліном:

$$y = -3{,}764\, x^3 - 0{,}4903\, x^2 + 3{,}186\, x.$$

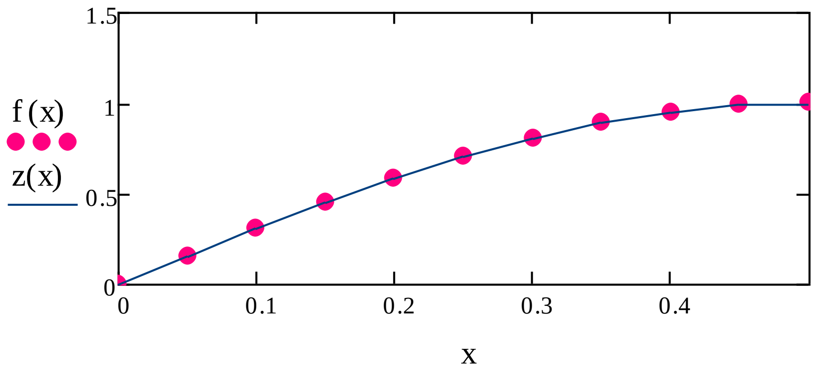


Рис. 5.3. Графік функції $y = sin(\pi x)$

На відрізку $0 \le x \le 0{,}5$

$$sin(\pi x) \approx -3{,}764\, x^3 - 0{,}4903\, x^2 + 3{,}186\, x.$$

Ми бачимо практично повний збіг графіків функцій:

$y = f(x) = sin(\pi x)$ *(точки)*;

z(x) = $-3{,}764x^3 - 0{,}4903x^2 + 3{,}186x$ *(тонка лінія)*.

Для розрахунків та побудови графіків зручно користуватися пакетами прикладних програм, наприклад, програмою MathCad. Нижче наведен приклад використання програми для проведення інтерполяції функції, яка задана масивами експериментальных точок *vx* та *vy* (рис5.4).

Інтерполяція функції в пакеті MathCad:

$$vx := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \mathrm{linterp}(vx, vy, x)$$

$$f(5.5) = 3$$

$$v := \mathrm{pspline}(vx, vy) \qquad t := \mathrm{cspline}(vx, vy)$$

$$z(x) := \mathrm{interp}(v, vx, vy, x) \qquad r(x) := \mathrm{interp}(t, vx, vy, x)$$

$$z(5.5) = 2.64 \qquad r(5.5) = 2.616$$

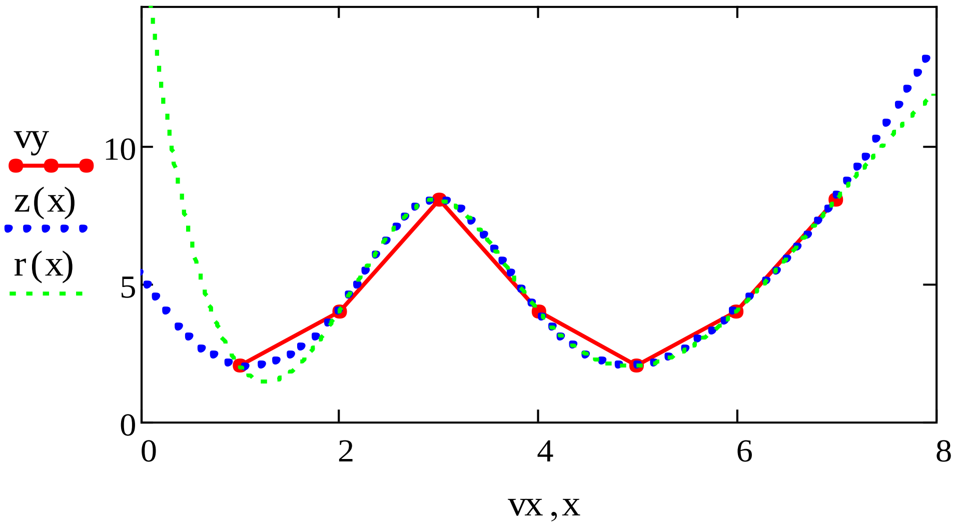


Рис. 5.4. Інтерполяція функції в пакеті MathCad

Система MathCad дозволяє проводити інтерполяцію набору експериментальних точок. Для цього в системі є функції, які дають можливість інтерполювати функцію різними методами. Розглянемо деякі з них.

- *lspline(vx,vy)* – у начальній і кінцевій точках накладається умова лінійності, тобто друга похідна функції дорівнює нулю. Перша буква в назві функції – *l* , означає *linear* (лінійний);
- *pspline(vx,vy)* – на першому та останньому інтервалі крива є параболою, тобто поліноміальний коефіцієнт при x^3 дорівнює нулю. Буква *p* означає *parabolic* (параболічний);
- *cspline(vx,vy)* – поліноміальні коєфицієнти при x^3 на перших двох інтервалах рівні між собою точно так само, як на останніх двох інтервалах. Буква *c* означає *cubic* (кубічний).

Результатом кожної функції є вектор, в якому є значення других похідних від інтерполяційної кривої в увсіх точках, заданих в масиві *vx*. Для того, щоб виходячи з цього вектора побудувати криву, потрібно скористатися вбудованою функцією *interp(v,vx,vy,x)*, де *vx* та *vy* – масиви експериментальных точок; *v* – масив, отриманий як результат однієї з трьох функцій, *x* – координата, в якій потрібно обчислити значення інтерполяційної кривої.

У наведеному вище прикладі показано використання стандартних функцій MathCad *lspline, pspline* та *cspline* та обчислено значення функції, яка задана таблицею, в точці з абсцисою $x = 5{,}5$.

Індивідуальні завдання за темою “Апроксимація”

Функція $y = f(x)$, задана таблицею значень.

№	*Таблиця*					X_0	*№*	*Таблиця*					x_0
1	*x*	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*–1,25*	*16*	*X*	*–3*	*–2*	*–1*	*0*	*–2,25*
	y	*4*	*1*	*–2*	*–3*			*y*	*–2*	*–3*	*–1*	*0*	
2	*x*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*–0,25*	*17*	*x*	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*–1,25*
	y	*1*	*–2*	*–3*	*–1*			*y*	*–3*	*–1*	*0*	*7*	
3	*x*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0,75*	*18*	*x*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*–0,25*
	y	*–2*	*–3*	*–1*	*0*			*y*	*–1*	*0*	*7*	*4*	
4	*x*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1,75*	*19*	*x*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0,75*
	y	*-3*	*-1*	*0*	*7*			*y*	*0*	*7*	*4*	*1*	

5	*x*	*2*	*3*	*4*	*5*	*2,75*	*20*	*x*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*-3,25*
	y	*-1*	*0*	*7*	*4*			*y*	*-3*	*-1*	*0*	*7*	
6	*x*	*3*	*4*	*5*	*6*	*3,75*	*21*	*x*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-4,25*
	y	*0*	*7*	*4*	*1*			*y*	*4*	*1*	*-2*	*-3*	
7	*x*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1,75*	*22*	*x*	*4*	*5*	*6*	*7*	*4,75*
	y	*4*	*1*	*–2*	*–3*			*y*	*1*	*–2*	*–3*	*–1*	
8	*x*	*–4*	*–3*	*–2*	*–1*	*–3,25*	*23*	*x*	*5*	*6*	*7*	*8*	*5,75*
	y	*1*	*–2*	*–3*	*–1*			*y*	*–2*	*–3*	*–1*	*0*	
9	*x*	*3*	*4*	*5*	*6*	*3,75*	*24*	*x*	*6*	*7*	*8*	*9*	*6,75*
	y	*–2*	*–3*	*–1*	*0*			*y*	*–3*	*–1*	*0*	*7*	
10	*x*	*4*	*5*	*6*	*7*	*4,75*	*25*	*x*	*–3*	*–2*	*–1*	*0*	*–2,25*
	y	*–3*	*–1*	*0*	*7*			*y*	*–1*	*0*	*7*	*4*	
11	*x*	*5*	*6*	*7*	*8*	*5,75*	*26*	*x*	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*–1,25*
	y	*–1*	*0*	*7*	*4*			*y*	*0*	*7*	*4*	*1*	
12	*x*	*6*	*7*	*8*	*9*	*6,75*	*27*	*x*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0,75*
	y	*0*	*7*	*4*	*1*			*y*	*0*	*1*	*2*	*3*	
13	*x*	*–5*	*–4*	*–3*	*–2*	*–4,25*	*28*	*x*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1,75*
	y	*–2*	*–3*	*–1*	*0*			*y*	*1*	*–2*	*–3*	*–1*	
14	*x*	*3*	*4*	*5*	*6*	*3,75*	*29*	*x*	*4*	*5*	*6*	*7*	*4,75*
	y	*4*	*1*	*–2*	*–3*			*y*	*–1*	*0*	*7*	*4*	
15	*x*	*2*	*3*	*4*	*5*	*2,75*	*30*	*x*	*5*	*6*	*7*	*8*	*5,75*
	y	*1*	*–2*	*–3*	*–1*			*y*	*0*	*7*	*4*	*1*	

Необхідно:

1) побудувати інтерполяційний поліном за методом складання системи рівнянь; розрахувати наближене значення функції в точці x_0 ; побудувати графік. Зробити це саме, використавши систему MathCad.

2) побудувати інтерполяційний поліном у формі Лагранжа; розрахувати наближене значення функції в точці x_0; побудувати графік. Зробити це саме, використавши систему MathCad.

Контрольні запитання

1. Що таке інтерполяція?
2. Що таке локальна інтерполяція?
3. Що таке глобальна інтерполяція?
4. Що таке апроксимація?
5. Що таке лінійна інтерполяція?
6. Що таке квадратична інтерполяція?
7. Що таке екстраполяція?

Заняття № 6

Регресія. Види регресії. Метод найменших квадратів

Мета роботи: засвоїти методи регресії.

Регресія

Результати експериментів завжди мають якусь похибку і ця похибка часто буває досить великою. В таких випадках інтерполяційна крива не буде відповідати справжній залежності. Подібні ситуації виникають доволі часто, тому інтерполяція рідко використовується при аналізі результатів експериментів. Частіше використовується так званий регресійний аналіз. ***Регресією називається підгонка параметрів простої функції для найкращої апроксимації експериментальних даних (від латинського approximo – наближаюсь).***

Для пошуку оптимальних значень параметрів функцій часто використовують ***метод найменших квадратів***. Суть цього методу полягає в тому, щоб знайти такі коефіцієнти поліному, при яких сума квадратів відхилень (різниць між обчисленими та експериментальними значеннями функції) була мінімальною. Розглянемо застосування цього методу на прикладі лінійної регресії.

Лінійна регресія

Лінійна регресія є найпростішою, але використовується частіше за інші види регресії. Суть її в знаходженні таких значень параметрів a і b, щоб пряма $y = a + bx$ найкращим чином апроксимувала заданий набір точок.

Нехай відомо, що величини x та y зв'язані деякою формулою $y = f(x)$, але в формулі є невідомі параметри a та b. Запишемо залежність між ними, як

$$y = f(x, a, b).$$

Припустимо, що значення функції y обчислені за формулою, яка поки ще нам невідома, і ці значення дорівнюють $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots \hat{y}_n$.

На практиці маємо такі результати у вигляді таблиці.

x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_1	y_2	y_3	…	y_n

Необхідно знайти такі a і b, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною.

Відхиленнями називають $y_1 - \hat{y}_1$, $y_2 - \hat{y}_2$, ..., $y_n - \hat{y}_n$. Тоді сума квадратів відхилень

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - \hat{y}_k)^2 = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \hat{y}_n)^2.$$

Можна записати:

$$\hat{y}_1 = x_1 + ab;\ \ \hat{y}_2 = x_2 + ab;\ \ldots\ ;\ \ \hat{y}_1 = x_n + ab.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2 = (x_1 + ab - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots +$$

$$+ (ax_n + b - y_n)^2.$$

Значення a і b, задовільняючи вимогам, знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} M_{xx} + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + b = M_y \end{cases},$$

де

$$M_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k;\quad M_y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k;\quad M_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2;\quad M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо значення a і b та запишемо рішення у вигляді рівняння: $y = a + bx$, з відповідними значеннями a та b.

Приклад 6. Нехай дана таблиця, отримана шляхом експерименту. Потрібно методом найменших квадратів знайти емпірічну формулу залежності у вигляді лінійної функції.

x	0	3	5	8	10	14	17	20	22	24
y	1,02	2,5	3,92	5,16	6,82	8,36	10,74	11,82	13,64	12,96

Розв'язання. Визначимо значення M_x, M_{xy}, M_{xx}, M_{xy}.

$M_x = 1/10\ (0 + 3 + 5 + 8 + 10 + 14 + 17 + 20 + 22 + 24) = 12{,}3.$
$M_y = 1/10\ (1{,}02 + 2{,}5 + 3{,}92 + 5{,}16 + 6{,}82 + 8{,}36 + 10{,}74$

+11,82 +13,64 + 12,96) = 7,694.

$M_{xx} = 1/10\ ((0^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 22^2 + 24^2) = 214{,}3.$

$M_{xy} = 1/10\ (0 \cdot 1{,}02 + 3 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 3{,}92 + 8 \cdot 5{,}16 + 10 \cdot 6{,}82 + 14 \cdot 8{,}36 + 17 \cdot 10{,}74 + 20\ \ 11{,}82 + 22 \cdot 13{,}64 + 24 \cdot 12{,}96) = 128{,}372.$

Параметри a та b знайдемо з системи

$$\begin{cases} 214{,}3\,a + 12{,}3\,b \;=\; 128{,}4 \\ 12{,}3\,a + b \;=\; 7{,}694 \end{cases}$$

Розв’язавши систему, отримаємо: $a = 0{,}54;\ b = 1{,}05.$

Лінійна функція має вигляд: $y = 0{,}54x + 1{,}05.$

На відміну від лінійної регресії поліноміальна регресія апроксимує дані поліномом заданого ступеня. Це означає, що замість прямої лінії (як у лінійній регресії) модель може бути представлена у вигляді кривої, наприклад параболи або кубічної кривої.

Завдання за темою “ Регресія. Види регресії. Метод найменших квадратів”

Необхідно:

1) методом найменших квадратів знайти емпірічну формулу залежності у вигляді лінійної функції; побудувати графік.

2) провести лінійну та поліноміальну регресію в системі MathCad.

Дані для розрахунків взяти з попереднього завдання.

Контрольні запитання

1. Що таке регресія?
2. Види регресії.
3. Суть методу найменьших квадратів.

Заняття № 7

Чисельне інтегрування

Мета роботи: засвоїти методи чисельного інтегрування.

Теоретичні відомості

Чисельне інтегрування

При розв'язуванні задач фізики або геометрії, часто буває необхідно обчислити визначений інтеграл від функції в межах від a до b (формула Ньютона – Лейбніца):

$$\int_a^b f(x)dx,$$

де $f(x)$ – функція неперервна на відрізку $[a, b]$.

Інтеграл обчислюється за формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна від функція для заданої функції $f(x)$.

Геометрична інтерпритація: визначений інтеграл при $f(x) > 0$ дорівнює площі криволинійної трапеції, яка обмежена функцією $f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$ (границями інтегрування).

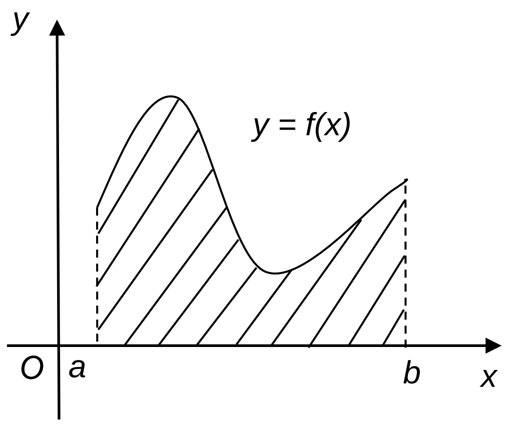


Рис.6.1. Геометрична інтерпретація визначеного інтеграла

Однак у багатьох випадках не вдається знайти аналітичної формули для визначення $F(x)$ або функція задана таблицею.

Таким інтегралом може бути, наприклад інтеграл

$$\int_2^3 \frac{\sin(x)}{x}dx$$

Для цієї функції неможливо виразити первісну $F(x)$ через елементарні функції. З іншого боку, площа криволінійної трапеції, що задається таким інтегралом, існує. Тоді, повинно існувати значення інтегралу, яке, однак, ми не можемо знайти точно.

У таких випадках використовують методи чисельного інтегрування. Суть методу полягає у такому. При чисельному інтегруванні інтервал інтегрування разбивається на відрізки, на яких крива $y = f(x)$ замінюється простішими функціями, інтеграли від яких можна обчислити. Таким чином, площа криволинійної трапеції приблизно замінюється сумою площин елементарних геометричних фігур.

Формули наближеного інтегрування називаються ***квадратурними формулами.***

Метод прямокутників

Поділимо інтервал інтегрування $[a, b]$ на n рівних частин, кожна довжиною $h = \frac{b-a}{n}$. Точками поділу будуть $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ... $x_{n-1} = a + (n-1)h$, $x_n = b$. Ці точки називають вузлами. Будемо обчислювати значення функції в вузлах, позначивши їх $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Розглянемо метод "лівих", "правих" та "середніх" прямокутників.

Метод "лівих" прямокутників

Приблизне значення інтегралу отримаємо у вигляді суми площин n прямокутників, висота яких дорівнює значенню $f(x)$ на лівому краю кожного підінтервалу.

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx hy_0 + hy_1 + \ldots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

Тобто, формула чисельного інтегрування має вигляд:

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

и називається формулою "лівих" прямокутників.

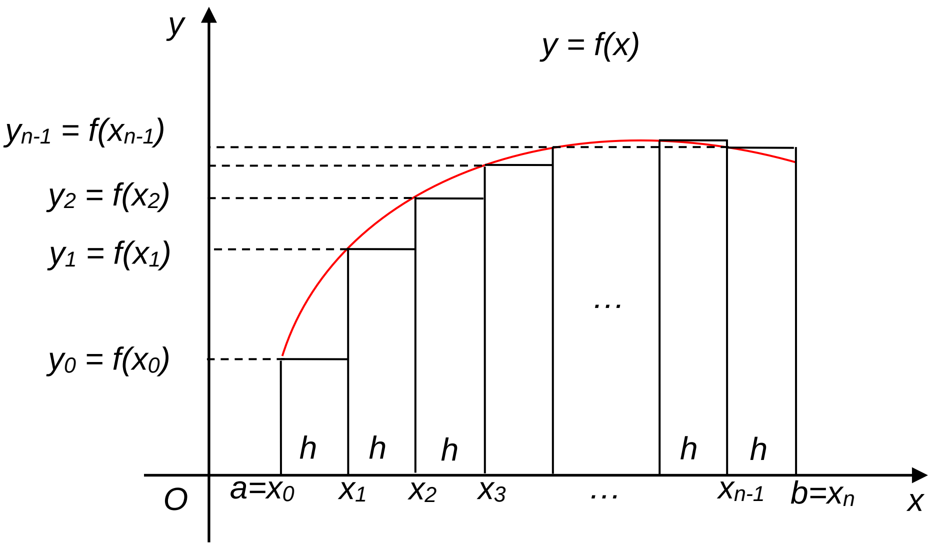


Рис.6.2. Геометрична інтерпретація метода “лівих” прямокутників

Метод “правих” прямокутників

Якщо як наближене значення площі для кожного підінтервалу прийняти площу прямокутника, висота якого дорівнює значенню $f(x)$ на правому краю підінтервалу, то формула чисельного інтегрування має вигляд:

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

і називається формулою “правих” прямокутників.

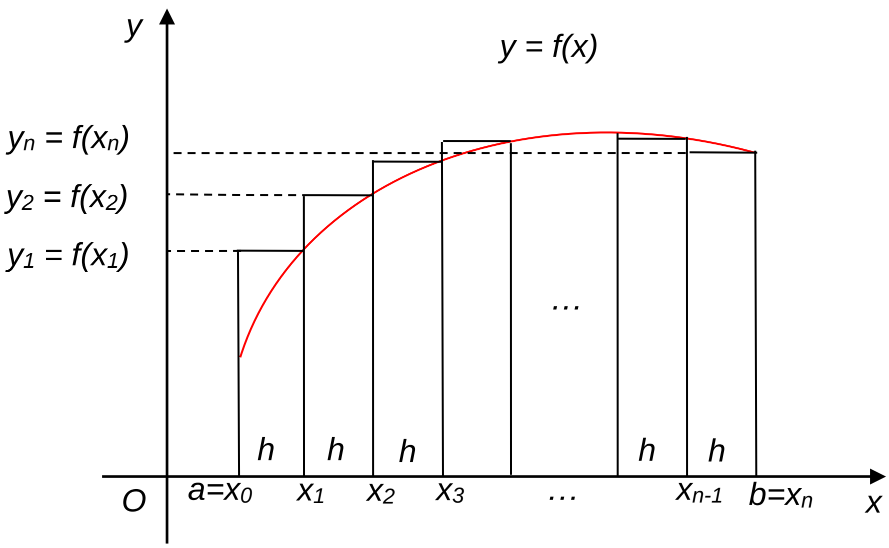


Рис.6.3. Геометрична інтерпретація метода “правих” прямокутників

Метод “середніх” прямокутників

Існує третя модифікація методу прямокутників – метод “середніх” прямокутників. У такому випадку в якості наближенного значення площі для кожного підінтервалу можна прийняти площу прямокутника, висота якого дорівнює значенню $f(x)$ у середній точці підінтервалу.

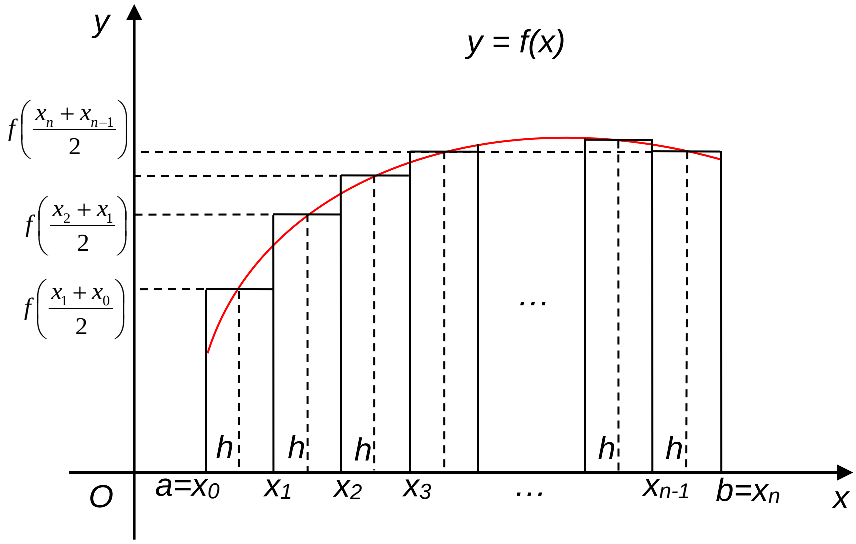


Рис.6.4. Геометрична інтерпретація метода “середніх” прямокутників

Тоді формула чисельного інтегрування має вигляд:

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y(x_i+\frac{h}{2})$$

Метод прямокутників – це найпростіший, але разом с тим найбільш приблизний метод чисельного інтегрування. Очевидно, що чим більшем буде кількість n відрізків поділу інтервалу, тим більш точним буде результат. Однак збільшення кількості відрізків проміжку інтегрування не завжди можливе. Тому часто використовують інші формули, які дають точніші результати при тому самому числі точок поділу.

Приклад 1. Обчислимо за методом “лівих” та “правих” прямокутників інтеграл:

$$\int_1^9 \frac{1}{x+2}dx.$$

Розв’язання. Приймемо, що інтервал поділено на $n = 4$ рівних частин. Тоді крок інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{9-1}{4} = 2$.

Точки поділу $x_0 = 1$; $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 7$; $x_4 = 9$.

Визначимо значення функції $y_0 = f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ у цих точках:

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3};\ y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5};\ y_2 = f(x_2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{7};$$

$$y_3 = f(x_3) = \frac{1}{7+2} = \frac{1}{9};\quad y_4 = f(x_4) = \frac{1}{9+2} = \frac{1}{11}.$$

Чисельне значення інтегралу за формулою "лівих" прямокутників:

$$I = h\,(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = 1{,}6024.$$

Чисельне значення інтегралу по формулі "правих" прямокутників:

$$I = h\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} = 1{,}1053.$$

Ми бачимо велику розбіжність у результатах обчислень, тобто метод прямокутників дає велику похибку. Для підвищення точності розрахункив слід поділити інтервал на більшу кількість відрізків, тобто збільшити кількість кроків.

Меншу похибку дає інший метод – метод трапецій.

Метод трапецій

Якщо функцію на кожному відрізку апроксимувати прямою, яка проходить через кінцеві значення, то одержимо метод трапецій.

У цьому методі відрізок $[a, b]$ також разбивається на n рівних частин. На кожному відрізку $[x_i, \ x_{i+1}]$ крива $y = f(x)$ замінюється прямою, що проходить через дві відомі точки і створюється прямокутна трапеція з висотою $h = (b - a)/n$.

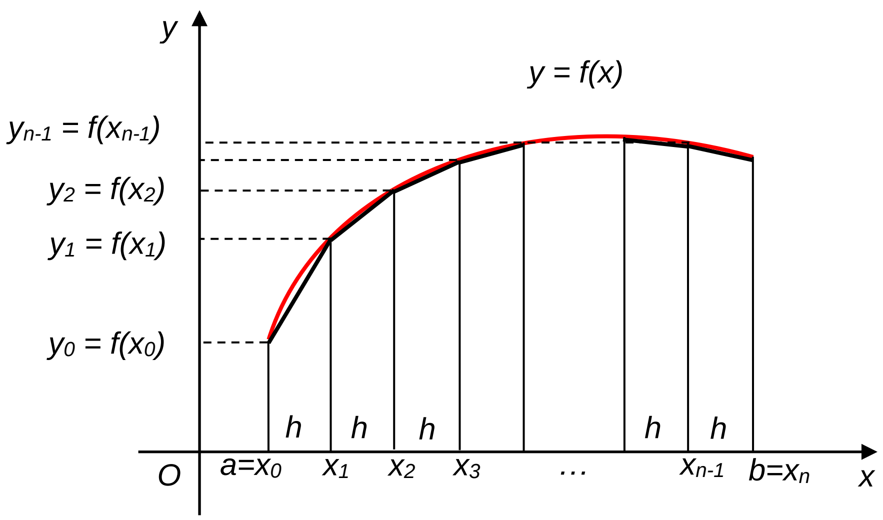


Рис.1.1. Геометрична інтерпретація метода трапецій

Таким чином, площа криволінійної трапеції наближено замінюється сумою площин елементарних геометричних трапецій (площа трапеції висотою h и основами a, b обчислюється за формулою: $S = h \cdot(a + b)/2$. Очевидно, що площа такої фигури буде точніше відповідати площі криволінійної трапеції, ніж площа ступінчастої фігури, обчисленої за методом прямокутників.

Тоді

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx h\,\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\,\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + h\,\frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2} + h\,\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Таким чином,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Отриману формулу можно записати у вигляді

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Приклад 2. Обчислимо за методом трапецій інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

Розв'язання. Приймемо, що інтервал поділен на $n = 4$ рівних частин. Тоді крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$,

Точки поділу $x_0 = 0;$ $x_1 = 0{,}25;$ $x_2 = 0{,}5;$ $x_3 = 0{,}75;$ $x_4 = 1.$

Функція в точках:

$y_0 = f(x_0) = 1;$ $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{1+0.25^2};$ $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{1+0.5^2};$

$y_3 = f(x_3) = \frac{1}{1+0.75^2};$ $y_4 = f(x_4) = \frac{1}{2}.$

Тоді за формулою трапецій маємо:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 0{,}25(1+\frac{1}{1+0{,}25^2}+\frac{1}{1+0{,}5^2}+\frac{1}{1+0{,}75^2}+\frac{1}{2}) \approx 0{,}764$$

Метод парабол (Сімпсона)

Значне підвищення точності наближених формул чисельного інтегрування дає метод парабол (метод Сімпсона). Ідея методу виходить з того, що на частковому проміжку дуга параболи в загальному випадку “тісніше” прилягає до кривої $y = f(x)$, ніж хорда, яка з’єднує кінці дуги цієї кривої (метод трапецій). Тому значения площин відповідних елементарних трапецій, які обмежені зверху дугами парабол, є ближчими до значень площин відповідних часткових криволінійних трапецій, обмежених зверху дугою кривої $y = f(x)$, ніж значення площин відповідних прямолінійних трапецій.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Будемо вважати, що на відрізку $[a, b]$ вона додатна и неперервна. Знайдемо площу криволінійної трапеції $aABb$.

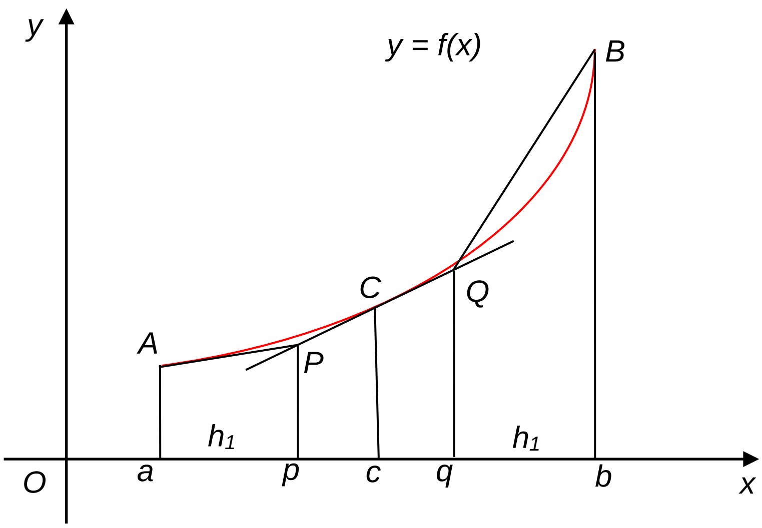


Рис.6.6. Геометрична інтерпретація метода Сімпсона

Поділимо відрізок $[a, b]$ точкою $c = \dfrac{a+b}{2}$ навпіл і в точці $C(c, f(c))$ проведемо дотичну до лінії $y = f(x)$. Після цього розділимо відрізок $[a, b]$ точками p и q на три рівні частини і проведемо через них прямі $x = p$ і $x = q$. Нехай P і Q – точки перетину цих прямих з дотичною. З’єднавши A з P і B з Q, оримаємо три прямолінійні трапеції $aAPp$, $pPQq$, $qQBb$. Тоді площу трапеції $aABb$ можна приблизно обчислити за формулою:

$$I \approx \frac{aA + pP}{2} \cdot h_1 + \frac{pP + qQ}{2} \cdot h_1 + \frac{qQ + bB}{2} \cdot h_1, \quad \text{де} \quad h_1 = \frac{b - a}{3}.$$

Таким чином, отримуємо так звану “***малу” формулу Сімпсона.***

$$I \approx \frac{b - a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f(c) + f(b) \right)$$

В цьому випадку дуга ACB замінюється параболою, яка проходить через точки A, P, Q, B.

“Мала” формула Сімпсона дає інтеграл с достатньою точністю, коли графік функції мало “зігнутий”, в іншому випадку, коли функція більш складна, необхідно поділити відрізок $[a,\ b]$ на n частин и до кожної з них використати “малу” формулу Сімпсона. Обов’язковою вимогою є та, що n повинно бути парним.

Тоді отримуємо так звану “***велику” формулу Сімпсона***, яка має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) \right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2}) \right) + f(x_n) \right]$$

Загальний вигляд формули:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(Y_{кр} + 4Y_{непар} + 2Y_{пар} \right),$$

де $Y_{кр} = y_0 + y_n$, $Y_{непар} = y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}$, $Y_{пар} = y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}$, а $h = (b - a) / n$.

Особливістю використання формули Сімпсона є те, що кількість відрізків поділу інтервалу інтегрування – парна. Якщо кількість відрізків поділу непарна, то слід використати формулу, яку називають ***формулою «трьох восьмих» або формулою Ньютона .***

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \ldots + y_n \right), \quad \text{або}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(\Sigma_1 + 3\Sigma_2 + 2\Sigma_3 \right),$$

де $h = \dfrac{b - a}{n}$;

$$\Sigma_1 = y_0 + y_n;\ \ \Sigma_2 = y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots;\ \ \Sigma_3 = y_3 + y_6 + y_9 + \ldots$$

Зверніть увагу, число поділу n повинно бути кратним трьом.

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Розв'язання. Цей інтеграл легко обчислюється:

$$I = arctg\ x\,|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398.$$

Для порівняння точності наближених формул обчислимо ще раз інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

але тепер за формулою Сімпсона при $n = 4$. Розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на чотири рівні частини точками $x_0 = 0,\ x_1 = 1/4,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 3/4,\ x_4 = 1$ та обчислимо приблизно значення функції $f(x) = 1/(1+x)$ в точках: $y_0 = 1{,}0000,\ \ y_1 = 0{,}8000,\ \ y_2 = 0{,}9411765,\ \ y_3 = 0{,}64,\ y_4 = 0{,}5000.$

За формулою Сімпсона отримаємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{b-a}{3n}[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)] =$$

$$= \frac{1-0}{12}[1{,}0000 + 0{,}5000 + 2 \cdot 0{,}9411765 + 4(0{,}8000 + 0{,}64)] \approx 0{,}785.$$

Очевидно, що обчислення за методом "лівих" або "правих" прямокутників дають найнижчу точність. Більш високу точність дає метод "середніх" прямокутників, трапецій та, особливо, Сімпсона.

Перевірка розрахунків за допомогою пакету MathCad:

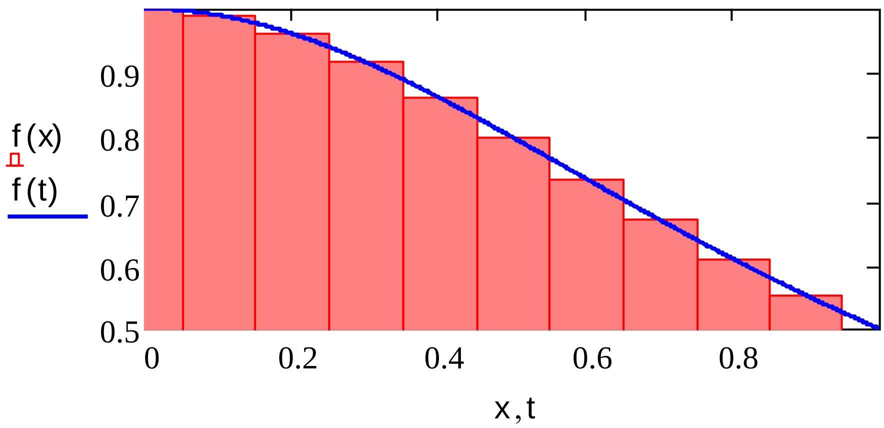
Ч и с е л ь н е і н т е г р у в а н н я

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$$

Ф у н к ц і я $\quad f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$

$a := 0 \quad b := 1 \quad N := 10 \quad h := \dfrac{b-a}{N}$

$i := 0 .. N-1 \quad x_i := a + h \cdot i$



М е т о д п р я м о к у т н и к і в

$$Rect1 := h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \qquad Rect1 = 0.81$$

$$Rect2 := h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \qquad Rect2 = 0.786$$

М е т о д т р а п е ц і й

$$Trap := h \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right) \qquad Trap = 0.785$$

"Т о ч н и й " м е т о д

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.785$$

Правило Рунге оцінки похибки

У кожній конкретній задачі необхідно визначити число точок поділу n для обчислювання інтегралу з необхідною точністю ε.

Для визначення n зручно користуватися правилом Рунге. Нехай ε – необхідна точність обчислювання інтегралу, тоді крок h повинен задовольняти умові:

$$h \le \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

За значенням h із співвідношення $h = \frac{b-a}{n}$ визначається n. При цьому для методу Сімпсона як n береться найближче парне ціле число, більше за $\frac{b-a}{n}$, а для методів прямокутників і трапецій – найближче ціле, більше за $\frac{b-a}{n}$.

Оцінку похибки можна провести також методом Рунге.

Нехай I_h – приблизне значення інтегралу, обчислене з кроком h, а I_{2h} – значення цього интегралу, обчислене з кроком $2h$. Зверніть увагу, що чим меньше крок h (тобто, більше n), тим точнішим буде наближене значення інтегралу.

Якщо

$$\frac{|I_h - I_{2h}|}{15} < \varepsilon, \qquad (1)$$

де I_h і I_{2h} обчислені за методом Сімпсона, або

$$\frac{|I_h - I_{2h}|}{3} < \varepsilon, \qquad (2)$$

де I_h і I_{2h} обчислені за по методом прямокутників або трапецій, то як приблизне значення інтегралу беруть значення I_h.

Якщо нерівність для відповідного методу не виконується, тоді знайдене значення інтегралу не відповідає заданій точності.

Тоді проводять нові обчислення з кроком $\frac{h}{2}$ і знову перевіряють виконання нерівності (1) або (2). Цю процедуру зменшення кроку виконують доти, поки відповідна нерівність не стане дійсною.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0,215}^{1,523} e^{\cos x}dx$ з точністю ε = 0,001 за методом Сімпсона.

Розв'язання. Оцінимо величину кроку h :

$$h \le \sqrt[4]{0,001} \approx 0,1778.$$

Выберемо $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1,523-0,215}{0,1718} = 7,3566$. Оскільки в методі Сімпсона n обов'язково повинно бути парним, його следует округлити в більший бік, тобто беремо n = 8. Для цього n визначаємо крок

$$h = \frac{1,523-0,215}{8} = 1,635.$$

(оскілки точність ε = 0,001, то в обчисленнях залишаємо чотири цифри після коми).

Використовуючи формулу Сімпсона, отримуємо

$$\int\limits_{0,215}^{1,523} e^{\cos x}dx \approx 2,4755.$$

Перевіримо точність обчислюван за методом Рунге. Позначимо знайдене значення інтегралу з кроком h = *0,1635* через I_h. Збільшимо крок інтегрування в два рази и з новым кроком $2h$ = 0,327 обчислимо інтеграл (при n = 4). Отримаємо значення

$$I_{2h} = \int\limits_{0,215}^{1,523} e^{\cos x}dx \approx 2,4754.$$

За формулою (2) маємо:

$$\frac{I_h - I_{2h}}{15} = \frac{2,4755-2,4754}{15} = \frac{0,0001}{15} = 0,000007 < \varepsilon.$$

Умова (2) виконана. Таким чином, наближене значення інтегралу з точністю 0,001 дорівнює $I_h = 2,476$.

Нагадаємо, що для оцінки точності знайденого значення інтегралу за правилом Рунге необхідно, щоб значення n було кратним чотирьом.

Індивідуальні завдання за темою “Чисельне інтегрування”

Функція *f(x)* задана формулою.

№ п/п	Функція *f(x)*	*Відрізок інтегрування [a, b]*
1	$f(x)=\sin\frac{1}{3}\ln\left(0{,}1+x^2\right)$	*[1; 3]*
2	$f(x)=\sqrt{1+0{,}1x+\ln^2 x}$	*[1; 3]*
3	$f(x)=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{3}+0{,}1}$	*[0; 2]*
4	$f(x)=\frac{0{,}1+\sqrt{x}}{1+\ln^2 x}$	*[2; 4]*
5	$f(x)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1{,}1+x}}$	*[1; 3]*
6	$f(x)=\cos\left(e^{\frac{x}{3}}+0{,}1x\right)$	*[0; 2]*
7	$f(x)=e^{\sqrt{1+x+0{,}1x^2}}$	*[0; 2]*
8	$f(x)=\operatorname{tg}0{,}1\left(x^2+\sqrt{1+0{,}1x}\right)$	*[1; 3]*
9	$f(x)=\ln\left(1{,}1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$	*[0; 2]*
10	$f(x)=\ln(2{,}1+\sin 2x)$	*[0; 2]*
11	$f(x)=\sin\frac{1}{3}\cdot\ln\left(0{,}2+x^2\right)$	*[1; 3]*
12	$f(x)=\sqrt{1+0{,}2x+\ln^2 x}$	*[1; 3]*
13	$f(x)=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{3}+0{,}2}$	*[0;2]*
14	$f(x)=\frac{0{,}2+\sqrt{x}}{1+\ln^2 x}$	*[2; 4]*

Продовження

15	$f(x)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1{,}2+x}}$	*[1; 3]*
16	$f(x)=\cos\left(e^{\frac{x}{3}}+0{,}2x\right)$	*[0; 2]*
17	$f(x)=e^{\sqrt{1+x+0{,}2x^2}}$	*[0; 2]*
18	$f(x)=\operatorname{tg}0{,}1\left(x^2+\sqrt{1+0{,}2x}\right)$	*[1; 3]*
19	$f(x)=\ln\left(1{,}2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$	*[0; 2]*
20	$f(x)=\ln(2{,}2+\sin 2x)$	*[0; 2]*
21	$f(x)=\sin\frac{1}{3}\cdot\ln\left(0{,}5+x^2\right)$	*[1; 3]*
22	$f(x)=\sqrt{1+0{,}5x+\ln^2 x}$	*[1; 3]*
23	$f(x)=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{3}+0{,}5}$	*[0; 2]*
24	$f(x)=\frac{0{,}5+\sqrt{x}}{1+\ln^2 x}$	*[2; 4]*
25	$f(x)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1{,}5+x}}$	*[1; 3]*
26	$f(x)=\cos\left(e^{\frac{x}{3}}+0{,}5x\right)$	*[0; 2]*
27	$f(x)=e^{\sqrt{1+x+0{,}5x^2}}$	*[0; 2]*
28	$f(x)=\operatorname{tg}0{,}1\left(x^2+\sqrt{1+0{,}5x}\right)$	*[1; 3]*
29	$f(x)=\ln\left(1{,}5+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$	*[0; 2]*
30	$f(x)=\ln(2{,}5+\sin 2x)$	*[0; 2]*

Необхідно:

1) обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

за методами: “лівих”, “правих”, “середніх” прямокутників.

2) обчислити визначений інтеграл від заданої функції за методами:

a) прямокутників;

b) трапецій;

c) сімпсона (або за формулою “трьох восьмих”).

3) оцінити похибку за правилом Рунге. Зробити це саме, використавши систему MathCad.

4) обчислити функцію різними методами в системі MathCad.

Контрольні запитання

1. Обчислення інтегралу $\int_a^b f(x)dx$ відповідає визначенню:

a) об'єму будь якої фігуры;

b) площі будь якої фігуры;

c) об'єму тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, в якої $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$;

d) площі криволінійної трапеції, обмаженої лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$.

2. Формула чисельного інтегрувания методу “лівых” прямокутників має вигляд:

3. Суть методу Сімпсона полягає в тому, що через три послідовні ординати поділу інтервалу проводиться:

a)квадратична парабола;

b) будь яка крива;

c) сінусоида;

d) гіпербола.

4. Методи чисельного інтегрування використовуються тоді, коли:

a) неможливо визначити первісну $F(x)$;

b) неможливо визначити похідну $f(x)$;

c) невідомий інтервал інтегрування $[a,b]$;

d) функція $y = f(x)$ задана графічно.

5. Найбільш приближним методом чисельного інтегрування є метод:

a) прямокутників;
b) трапецій;
c) парабол;
d) Сімпсона.

6. Необхідна умова використання формул Сімпсона є: число точок поділу повино бути:

a) парним числом;
b) цілим числом;
c) непарним числом;
d) кратним “4”.

7. Відомо, що функція описується поліномом другого ступеня (квадратним рівнянням). Вкажіть метод, який дозволить обчислити визначений інтеграл з мінімальною похибкою:

a) метод Сімпсона;
b) метод трапецій;
c) метод “лівих” прямокутників;
d) метод “середніх” прямокутників.

Заняття № 8

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з застосуванням методу Ейлера

Мета роботи: Ознайомлення з розв'язанням диференціальних рівнянь методом Ейлера.

Теоретичні відомості

Методи наближенного розв'язання диференціальних рівнянь, які в залежності від форми отримання рішення розподіляються на дві групи:

1) аналітичні методи, які дають наближене рішення диференціального рівняння у вигляді аналітичного виразу;

2) чисельні методи, які дають наближене рішення у вигляді таблиці.

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з застосуванням чисельних методів виконуються за:

а) методом Ейлера;

б) методом Рунге–Кутта.

Взагалі рішенням (або інтегралом) диференціального рівняння називається будь–яка диференційована функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє цьому рівнянню, тобто така, після підстановки якої в рівняння воно обертається в тотожність

Але розв'язати диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ чисельним методом – це означає, що необхідно, не з'ясовуючи функцію $y = f(x)$, отримати таблицю значень цієї функції для заданої послідовності значень аргументу. Величина $h = x_{k+1} - x_k$ називається кроком інтегрування.

Розглянемо один з методів розв'язання диференціальних рівнянь – метод Ейлера.

Метод Ейлера

Цей метод є порівнянно неточним і використовується переважно для наближених розрахунків, а також для визначення точок входу для інших методів.

Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$. Необхідно знайти рішення цього рівняння на інтервалі $[a, b]$.

Розіб'ємо інтервал на k рівних частин і отримаємо послідовність x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, де $x_i = x_0 + k \cdot i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots , k)$. $h = (b – a)/n$ – крок інтегрування.

Значення функції у відповідних точках позначимо $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Для розв'язання рівняння слід скористатися формулою:

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$$

Тоді,

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1)$$

....

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$$

Продовжуючи цей процес та кожного разу приймаючи підінтегральну функцію на відповідній дільниці постійною та рівною її значенню на початку кожної дільниці, отримаємо таблицю рішень діференціального рівняння на заданному інтервалі $[a, b]$. Отримана формула означає, що на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива наближено замінюється прямолінійним відрізком, що виходить із точки з координатами (x_k, y_k) з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$. Як наближену інтегральну криву отримуємо ломану лінію (верхня лінія), яка показує збільшення відхилення від теоретичної кривої (нижня лінія), тобто збільшення погрішності впродовж обчислень.

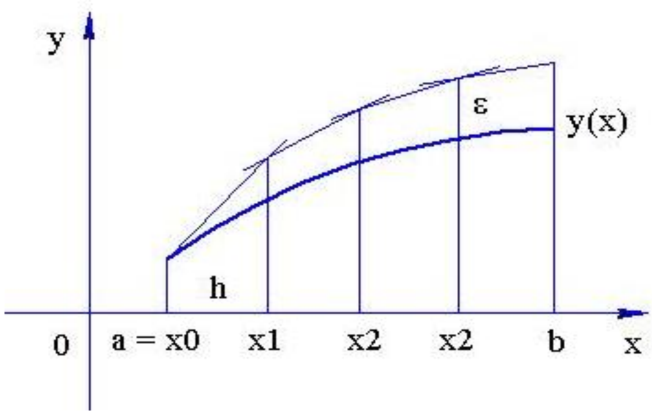


Рис. 2.1. Геометрична інтерпретація метода Ейлера

Похибка обчислювань $R_k = 0{,}5h^2 \cdot y''(\varepsilon)$, $x_k \le \varepsilon \le x_{k+1}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = y + x^2$ при початкових умовах: $y_0 = y(0) = 1$; $0 \le x \le 0{,}5$. Прийняти $h = 0{,}1$.

Розв'язання. Для розв'язання рівняння скористаємося формулою

$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, де $f(x_k, y_k) = y_k + x_k^2$.

Тоді отримаємо вираз $y_{k+1} = y_k + h \cdot (y_k + x_k^2)$.

Підставляючи відповідні значення $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, $x_4 = 0{,}4$, $x_5 = 0{,}5$, а також початкові умови y_0 та обчислені значення y_k в рівняння, отримаємо:

$$y_1 = y_0 + h \cdot (y_0 + x_0^2) = 1 + 0{,}1 \cdot (1 + 0) = 1{,}1;$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot (y_1 + x_1^2) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}1^2) = 1{,}211;$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot (y_2 + x_2^2) = 1{,}211 + 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}2^2) = 1{,}3361;$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot (y_3 + x_3^2) = 1{,}3361 + 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}3^2) = 1{,}4787;$$
$$y_5 = y_4 + h \cdot (y_4 + x_4^2) = 1{,}4787 + 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}4^2) = 1{,}6426.$$

Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці і побудуємо графік (рис. 7.2).

K	x_k	y_k
0	0	1
1	0,1	1,1
2	0,2	1,211
3	0,3	1,3361
4	0,4	1,4787
5	0,5	1,6426

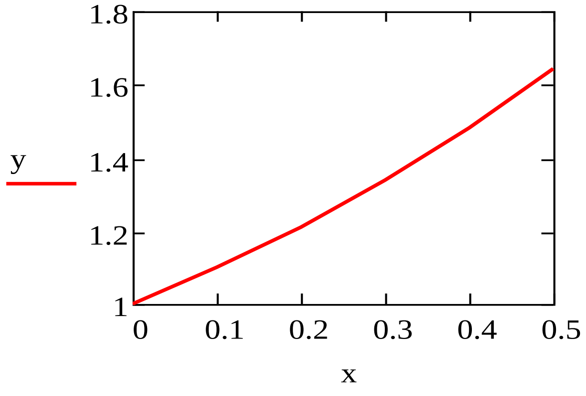


Рис. 7.2. Графік функції $y = f(x)$

Індивідуальні завдання за темою “ Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з застосуванням методу Ейлера”

Задано рівняння.

№ п/п	Рівняння	*Початкові умови*
1	$y' = 2y + 3x + 1$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 1$
2	$y' = x - 2y$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 1$
3	$y' = y^2 + x$	$y(0)=1,\ 0 \le x \le 1$
4	$y' = y^2 + x^2$	$y(0)=1,\ 0 \le x \le 1$
5	$y' = yx^2 + x^3$	$y(0)=1,\ 0 \le x \le 1$
6	$y' = x - y$	$y(0)=-1,\ 0 \le x \le 1$
7	$y' = x^2 - y$	$y(0)=2,\ 0 \le x \le 1$
8	$y' = y + x + 1$	$y(0)=1,\ 0 \le x \le 1$
9	$y' = y - 2x$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 1$
10	$y' = x - y + 2$	$y(0)=0,\ 1 \le x \le 2$
11	$y' = y - 3x$	$y(0)=1,\ 0 \le x \le 1$
12	$y' = y - 4x$	$y(0)=1,\ 0 \le x \le 1$
13	$y' = y + x + 2$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 1$
14	$y' = 2y + 2x + 1$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 1$
15	$y' = 3y + 2x + 1$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 1$
16	$y' = 2y + 3x + 1$	$y(0)=0,\ 1 \le x \le 2$
17	$y' = x - 2y$	$y(0)=0,\ 1 \le x \le 2$
18	$y' = x - 2y$	$y(0)=0,\ 1 \le x \le 2$

Продовження

19	$y' = yx^2 + x^3$	$y(0)=1,\ 1 \le x \le 2$
20	$y' = x - y$	$y(0)=-2,\ 0 \le x \le 1$
21	$y' = x^2 - y$	$y(0)=2,\ 1 \le x \le 2$
22	$y' = y + x + 1$	$y(0)=1,\ 1 \le x \le 2$
23	$y' = y - 2x$	$y(0)=0,\ 1 \le x \le 2$
24	$y' = x - y + 2$	$y(0)=0,\ 0 \le x \le 12$

Необхідно:

1) розв'язати рівняння методом Ейлера, прийнявши $h = 0{,}1$, побудувати графік.

2) розв'язати рівняння відповідним методом в системі MathCad.

Контрольні запитання

1 В чому суть метода Ейлера?
2 Яка геометрична інтерпритація метода Ейлера?
3 Яка точність метода Ейлера?
4. Яка послідовність розв'язання рівняння за методом Ейлера?
5. Коли слід використовувати метод Ейлера?

Заняття № 9

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з застосуванням методу Рунге–Кутта

Мета роботи: Ознайомлення з розв'язанням рівнянь методом Рунге–Кутта.

Теоретичні відомості

Метод Рунге–Кутта четвертого порядку

В обчислювальній практиці найбільш часто використовується метод Рунге–Кутта четвертого порядку. Цей метод може бути застосован до звичайних диференціальних рівнянь вищого порядку, а також до систем диференціальних рівнянь першого порядку. Він реалізован в різних математических пакетах (Maple, MathCAD, Maxima).

Суть методу полягає в послідовному обчисленні приблизних значень рішення задачи Коши за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + h\,(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)/6, \quad \text{де} \quad i = 1, 2, 3, \ldots , k$$

В цій формулі

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h/2,\ y_i + h \cdot k_1/2)$$
$$k_3 = f(x_i + h/2,\ y_i + h \cdot k_2/2)$$
$$k_4 = f(x_i + h/2,\ y_i + h \cdot k_3)$$

А також

y_0 – початкова умова, h – крок, $x_i = x_0 + i \cdot h$

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = y + x^2$ при початкових умовах: $y_0 = y(0)=1;\ 0 \le x \le 0{,}5.$ Прийняти $h = 0{,}1.$

Розв'язання. В нашому випадку $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2,\ x_3 = 0{,}3,\ x_4 = 0{,}4,\ x_5 = 0{,}5.$

На першому кроці, підставляючи $x_0 = 0$ та $y_0 = 1$ в відповідні рівняння, отримуємо:

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 + x_0^{\,2} = 1 + 0 = 1.$$

$$k_2 = f(\,x_0 + h/2,\ \ y_0 + h \cdot k_1/2\,) = y_0 + k_1/2 + (x_0 + h/2)^2 =$$
$$= 1 + 0{,}05 + (0 + 0{,}05)^2 = 1{,}0525.$$

$$k_3 = f(\,x_0 + h/2,\ \ y_0 + h \cdot k_2/2\,) = y_0 + k_2/2 + (x_0 + h/2)^2 =$$
$$= 1 + 1{,}0525/2 + (0 + 0{,}05)^2 = 1{,}0551.$$

$$k_4 = f(\,x_0 + h/2,\ \ y_0 + h \cdot k_3\,) = y_0 + k_3/2 + (x_0 + h/2)^2 =$$
$$= 1 + 1{,}0551 + (0 + 0{,}05)^2 = 1{,}1155.$$

Тоді,

$$y_1 = y_0 + h\,(\,k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\,)/6 =$$
$$= 1 + 0{,}1\,(1 + 2 \cdot 1{,}0525 + 2 \cdot 1{,}0551 + 1{,}1155\,)/6 = 1{,}1055117.$$

На другому кроці, підставляючи $x_1 = 0{,}1$ та $y_1 = 1{,}1055117$ в відповідні рівняння, отримуємо значення y_2, і так далі по всіх кроках до $x_5 = 0{,}5$ (всі розрахунки не наводимо).

Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці.

k	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	1,10551
2	0,2	1,22421
3	0,3	1,35958
4	0,4	1,51548
5	0,5	1,69617

Графік буде мати майже такий самий вигляд, як і при розв’язанні рівняння із застосуванням методу Ейлера.

Приклад розв'язання рівняння методом Рунге–Кутта в системі MathCad.

Розв'язати рівняння $y' = y + x^2$ при початкових умовах: $y_0 = y(0)=1;\ 0 \le x \le 0{,}5$. Прийняти $h = 0{,}1$.

Розв'язання в системі MathCad.

1. Задамо вектор початкових умов. Оскільки рівняння першого порядку, то є тільки один елемент цього вектору:

$$y_0 := 1$$

2. Задамо функцію, яка дорівнює значенню першої похідної функції при початкових умовах:

$$D(x, y) := y_0 + x^2$$

3. Задамо інтервал $[x_1, x_2]$, на якому шукаємо рішення нашого рівняння:

$$x1 := 1; \quad x2 := 0.5$$

4. Визначаємо кількість точок, в яких шукається рішення:

$$n := 5$$

5. Функція пошуку рішення методом Рунге–Кутта має вигляд:

$$z := \mathrm{rkfixed}(y, x1, x2, n, D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1.106 \\ 0.2 & 1.224 \\ 0.3 & 1.36 \\ 0.4 & 1.515 \\ 0.5 & 1.696 \end{pmatrix}$$

6. Отримаємо матрицю, яка складається з двох стовбців. В першому стовбці знаходяться точки, в яких шукається рішення диференціального рівняня. В другому–знаходяться значення знайденого рішення. Тепер ми можемо вивести це рішення у вигляді графіка.

Аналогічно розв'язуються звичайні диференціальні рівняння більш високих порядків.

Таким же чином за допомогою функції *rkfixed* розв'язуються системи диференціальних рівнянь.

Індивідуальні завдання за темою “ Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з застосуванням методу Рунге–Кутта”

Необхідно:

1) розв’язати рівняння із попередньої роботи методом Рунге–Кутта, прийнявши $h = 0{,}1$, побудувати графік.

2) розв’язати рівняння відповідним методом **у** системі MathCad.

Контрольні запитання

1 У чому суть методу Рунге–Кутта?

2 Яка геометрична інтерпретація методу Рунге–Кутта?

3 Яка точність методу Рунге–Кутта?

4. Яка послідовність розв’язання рівняння за методом Рунге–Кутта?

5. Коли слід використовувати метод Рунге–Кутта?

НАВЧАЛЬНО–МЕТОДИЧНА ЛІТЕРАТУРА З ДИСЦИПЛІНИ

1. Дюженкова Л.І. Вища математика. Приклади і задачі. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. – 624 с.
2. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я. та ін. – К.: Вища школа, ч. І, 2002. – 462 с.
3. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я. та ін. – К.: Вища школа, ч. ІІ., 2003. – 470 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика. Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: Вища школа. 2004. – 647с.
5. Суліма І.М. Чисельні методи із застосуванням MATLAB. Суліма І.М., Мейш В.Ф. К.: Видавництво НАУ, 2003. – 319 с.
6. Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича группа BHV, 2003. – 480 с.
7. Чисельні методи в інформатиці. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт. К.: Видавництво НАУ, 2008. – 119 с.