Лекція №3. Розв'язування систем лінійних рівнянь

1. Правило Крамера

Для спрощення будемо розглядати систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3, яку можна записати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3, \end{cases} \qquad (1)$$

числа a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ — це коефіцієнти системи; перший індекс i — це номер рівняння, другий —j — це номер невідомого x_i , при якому стоїть цей коефіцієнт. Числа h_1 h_2, h_3 — вільні члени системи.

Якщо всі вільні члени системи (1) дорівнюють нулеві $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, то система називається **однорідною.** Якщо ж є хоча б один вільний член, відмінний від нуля, то система називається **неоднорідною.**

Головним визначником системи називається визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Для знаходження розв'язку системи (1) виконаємо такі дії. Дом-ножимо кожне з рівнянь на відповідні алгебраїчні доповнення до першого коефіцієнта цього рівняння. А саме, перше рівняння домножимо на A_{11}, друге рівняння — на A_{21} і третє — на A_{31}. Дістанемо

$$\begin{cases} A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = h_1A_{11}, \\ A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = h_2A_{21}, \\ A_{31}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = h_3A_{31}, \end{cases}$$

Додамо ці рівняння, збираючи відповідні коефіцієнти при невідомих x_1, x_2, x_3. Маємо

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 +$$
$$+ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 = h_1A_{11} + h_2A_{21} + h_3A_{31}.$$

У перших дужках маємо розклад головного визначника (за елементами першого стовпця (властивість 9). У других і третіх дужках маємо суму добутків відповідно другого і третього стовпця на алгебраїчні доповнення до першого стовпця. Отже, згідно з властивістю 10, ці вирази дорівнюють нулеві. Таким чином, дістаємо

$$\Delta \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = h_1 A_{11} + h_2 A_{21} + h_3 A_{31}.$$

У цій рівності праворуч є розклад за елементами першого стовпця визначника, у якого перший стовпець складено із вільних членів, а два інші співпадають із відповідними стовпцями головного визначника. Позначимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тоді останнє рівняння набуває вигляду:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1.$$

Аналогічно, домножуючи кожне з рівнянь системи (2.1) на алгебраїчні доповнення елементів другого (третього) стовпців і виконуючи ті ж самі перетворення, дістанемо

$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2., \qquad \Delta \cdot x_3 = \Delta_3.,$$

де

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, система (1) звелась до еквівалентної системи:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1., \qquad \Delta \cdot x_2 = \Delta_2., \qquad \Delta \cdot x_3 = \Delta_3., \tag{3}$$

Нехай $\Delta \neq 0$. Тоді із системи (3) можна виразити x_1, x_2, x_3.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{4}$$

Формули (4) і складають зміст **правила Крамера:** якщо головний визначник системи (1) не дорівнює нулеві $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами (4).

Формули (4) називають також **формулами Крамера.**

Визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3 одержують із головного визначника Δ (див.(2)) заміною відповідного стовпця із коефіцієнтів при невідомих стовпцем із вільних членів.

Правило Крамера має місце і при розв'язуванні системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, тобто системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = h_2, \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = h_i, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n = h_n. \end{cases} \qquad (5)$$

Цю систему можна скорочено записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = h_i \qquad (i = 1, 2, ...n). \qquad (5)$$

Головним визначником Δ системи (5) буде визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих x_1, x_2, ... x_n тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило Крамера. Якщо головний визначник системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$), то система має єдиний розв'язок, що виражається формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad , x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad , x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

де Δ_j (*j*=1,2,... ,*n)* — це визначник, одержаний із Δ заміною елементів *j*-ого стовпця на стовпець із вільних членів,

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & h_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & h_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & h_i & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & h_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Зауважимо, що цей метод потребує громіздких обчислень і при $n > 3$ рідко застосовується. Далі будуть викладені деякі інші, більш ефективні методи.

Приклади. Розв'язати систему лінійних рівнянь, використовуючи правило Крамера.

а) Нехай задана система двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо головний визначник із коефіцієнтів при невідомих

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \neq 0$, отже система має єдиний розв'язок

Обчислюємо Δ_1 і Δ_2 , замінюючи в Δ відповідно перший і другий стовпці стовпцем із вільних членів. Маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13.$$

Знаходимо x_1 та x_2, використовуючи формули (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{13} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1.$$

б) Нехай задана система трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ 5x_1 + x_2 = -14 \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо головний визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 10 - 25 + 1 = -4 \neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок. Обчислюємо $\Delta_1;\ \Delta_2,\ \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & -1 \\ -14 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -28 - 30 + 70 = 12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \\ 5 & -14 & 0 \end{vmatrix} = -4; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -4.$$

Згідно з формулами (4) маємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-4} = -3; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Зауваження. Якщо головний визначник системи $\Delta = 0$, то, очевидно, що формули Крамера не мають місця. Отже, система (1) або (5) не може мати єдиного розв'язку. При цьому із рівнянь (3):

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

маємо, що при $\Delta_j \neq 0$ хоча б для одного номера *j* система розв'язку не

має($0 \cdot x_j = \Delta_j$, а $\Delta_j \neq 0$ що неможливо). Якщо ж $\Delta_j = 0$ для всіх

j=1, 2,…, *n,* то система має або безліч розв'язків, або зовсім не має розв'язку. Система рівнянь, яка має розв'язок (єдиний або безліч) називається **сумісною,** а система, яка не має розв'язку, — **несумісною.**

2. Розв'язання і дослідження систем лінійних рівнянь за допомогою матриць

Розглянемо систему (1) трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими (але всі висновки вірні і для будь-якого $n \geq 2$). Складемо матрицю *A* із коефіцієнтів при невідомих — матрицю системи, матрицю-стовпець *X* із невідомих і матрицю-стовпець *H* із вільних членів, тобто

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{31} \end{pmatrix}; \qquad H=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Враховуючи означення добутку матриць і умову рівності матриць, дістанемо еквівалентний запис системи (1) у матричній формі

$$AX=H \qquad (7)$$

(перевірте самостійно).

Рівняння (1) називається **матричним рівнянням.** Нехай $|A|\neq 0$. Тоді, як відомо, з однієї сторони, система (1) має єдиний розв'язок, з іншої сторони, матриця A має обернену A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівності (7) ліворуч на A^{-1} і, дістанемо:

$$A^{-1}AX=A^{-1}H; \qquad EX=A^{-1}H.$$

Враховуючи, що $EX=X$, маємо розв'язок X у матричній формі:

$$X=A\text{-}^{1}H. \qquad (8)$$

Для одержання значень невідомих x_1, x_2, x_3 використаємо, що матриці ліворуч і праворуч у (8) рівні.

Цей метод розв'язання системи (1) (або (5)) називається **матричним методом.**

Якщо A — вироджена матриця: $A=0$, то A^{-1} не існує і якщо існує розв'язок системи (1) (або (5)), то він не єдиний.

Приклад . Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=-6 \\ 5x_1+x_2=-14 \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи A і шукатимемо A^{-1} за наведеним вище алгоритмом.

1) $$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Матриця A має обернену, а система — єдиний розв'язок.

2) $$A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 5 & -25 & -11 \\ -3 & 11 & 5 \end{pmatrix},$$ 3) $$(A^{*})^{TP}=A^{\Pi P}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -5 & -25 & 11 \\ -3 & -11 & 5 \end{pmatrix},$$

4) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ -5 & -25 & 11\\ -3 & -11 & 5\end{pmatrix}\cdot(-1/4).$

Випишемо матрицю-стовпець *H* вільних членів системи і знайдемо *X* за формулою (8):

$$H=\begin{pmatrix}0\\ -6\\ -14\end{pmatrix};\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};$$

$$X=A^{-1}H=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ -5 & -25 & 11\\ -3 & -11 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -6\\ -14\end{pmatrix}\cdot(-1/4)=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 0+5\cdot(-6)+(-3)\cdot(-14)\\ -5\cdot 0+(-25)\cdot(-6)+11\cdot(-14)\\ -3\cdot 0+(-11)\cdot(-6)+5\cdot(-14)\end{pmatrix}\cdot(-1/4)=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отже, x_1 = - 3, x_2 = 1, x_3 = 1.

Зауважимо, що цей метод зручний тоді, коли потрібно розв'язати системи з однаковою лівою частиною і різними правими частинами, тобто тоді, коли матриця A^{-1} не змінюється, а змінюється лише матриця-стовпець *H*.

3. Розв'язування однорідної системи лінійних рівнянь

Запишемо однорідну систему, що відповідає системі неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0,\end{cases}\tag{9}$$

Очевидно, що така система має завжди один розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, який називається **нульовим** або **тривіальним.**

Якщо головний визначник системи $\Delta\neq 0$, то з правила Крамера випливає, що нульовий розв'язок системи буде її єдиним розв'язком.

Якщо ж $\Delta=0$, то однорідна система (9) має безліч розв'язків, тобто однорідна система завжди сумісна.

Розберемо, як знайти розв'язки системи (9) при $\Delta=0$.

Спочатку розглянемо однорідну систему двох рівнянь з трьома невідомими. Нехай, наприклад, маємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Доведемо, що вона завжди має безліч розв'язків. Нехай будь-який із визначників другого порядку, складений із коефіцієнтів системи (10), не дорівнює нулеві. Наприклад,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Перенесемо члени рівнянь (10), що містять x_3, праворуч. Дістанемо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3. \end{cases}$$

За формулами Крамера маємо

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta'}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{21} & -a_{23}x_3 \end{vmatrix}}{\Delta'}.$$

Перетворимо ці вирази, використовуючи властивості 5 та 2. Дістанемо

$$x_1 = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta'} = x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\Delta'}; \quad x_2 = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\Delta'}. \qquad (11)$$

Із цих формул випливає, що при різних значеннях x_3 ми одержимо і різні значення x_1 та x_2, тобто система (10) має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta' = 0$, то вибираємо із коефіцієнтів системи (10) будь-який інший визначник другого порядку, що не дорівнює нулеві, і, міркуючи аналогічно, виражаємо два невідомі системи через третє.

Якщо ж всі визначники другого порядку із коефіцієнтів системи (10) дорівнюють нулеві, то відповідні коефіцієнти рівнянь системи пропорційні і система вироджується в одне рівняння з трьома невідомими. Якщо, наприклад, $a_{11} \neq 0$, то одержимо

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3.$$

Змінюючи довільно x_2 та x_3, одержимо знову безліч розв'язків, що і потрібно було довести.
Перепишемо формули (11) у більш зручному вигляді. Маємо такі відношення:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = t,$$

де t— деяка стала, яка називається **параметром.** Отже,

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t; \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t; \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t; \qquad (12)$$

Ці формули подають розв'язок системи (10) у параметричному вигляді. При різних значеннях t одержуємо і різні розв'язки.

Якщо розглянути головний визначник Δ системи (9) трьох рівнянь з трьома невідомими, то видно, що коефіцієнти при t у формулах (12) є відповідні алгебраїчні доповнення елементів третього рядка у визначнику Δ. Отже, мають місце співвідношення

$$x_1 = A_{31}t, \qquad x_2 = A_{32}t, \qquad x_3 = A_{33}t. \qquad (13)$$

Формули (12) чи (13) визначають всю множину розв'язків системи (10). Це є так званий її загальний розв'язок. Повернемось до однорідної системи (9).

Теорема (про ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь)

Для того, щоб однорідна система (9) мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її головний визначник дорівнював нулеві:

$$\Delta = 0.$$

Наслідок. Разом із доведенням теореми одержали правило знаходження всіх розв'язків однорідної системи (1) при $\Delta = 0$.

А саме, **для визначення загального розв'язку однорідної системи (9) при $\Delta = 0$ потрібно знайти загальний розв'язок для системи із будь-яких двох рівнянь, із коефіцієнтів яких можна скласти визначник другого порядку, відмінний від нуля, наприклад, за формулами (13), який і буде загальним розв'язком усієї системи.**

4. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими.

Теорема (про загальний розв'язок неоднорідної системи)

Якщо головний визначник цієї системи дорівнює нулеві ($\Delta = 0$) і система має якийсь розв'язок (x_l, x_2, x_3), то вона має безліч розв'язків. При цьому загальний розв'язок цієї системи є сумою її довільного розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної системи (9). А саме,

$$x_1^{3H}=x_1^*+x_1^{30};\qquad x_2^{3H}=x_2^*+x_2^{30};\qquad x_3^{3H}=x_3^*+x_3^{30}. \quad (14)$$

де$(x_1^{3H},x_2^{3H},x_3^{3H})$ — загальний розв'язок неоднорідної системи ,

а $(x_1^{30},x_2^{30},x_3^{30})$ — загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

Алгоритм розв'язку неоднорідної системи лінійних рівнянь

Виходячи з усього викладеного у цьому параграфі, дістанемо такий алгоритм розв'язку неоднорідної системи за допомогою визначників.

1.Знаходимо головний визначник А системи .
Якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, і переходимо до п.2.
Якщо $\Delta=0$, то переходимо до п.3.

2.Знаходимо визначники $\Delta_j \quad (j=1,\ 2,\ 3)$і записуємо єдиний розв'язок системи згідно з формулами Крамера:

$$x_j=\Delta_j/\Delta \qquad (j=1,2,3)$$

3.З'ясовуємо, чи має система (2.1) якийсь розв'язок. Для цього вибираємо будь-які два рівняння, з коефіцієнтів яких можна скласти визначник другого порядку, відмінний від нуля (якщо всі визначники другого порядку дорівнюють нулеві, то вибираємо одне будь-яке рівняння). Знаходимо якийсь розв'язок (x_1^*,x_2^*,x_3^*) системи вибраних рівнянь (або одного рівняння) і перевіряємо, чи задовольняє він всю систему. Якщо ні, то система розв'язків не має. Якщо ж (x_1^*,x_2^*,x_3^*)— розв'язок системи, то вона має безліч розв'язків, і переходимо до п.4.

4. Знаходимо загальний розв'язок відповідної однорідної системи ($x_1^{30},x_2^{30},x_3^{30}$). Записуємо загальний розв'язок даної системи за формулами (14):

$$x_j^{3H}=x_j^*+x_j^{30} \qquad (j=1,2,3).$$

Приклад. Задано систему:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=5, \\ x_1+2x_2-2x_3=4, \\ x_1-12x_2+8x_3=4. \end{cases}$$

Вияснити, чи має ця система розв'язок і якщо має, то знайти його.

Розв'язання. Використаємо алгоритм п.2.4.

1. Знаходимо головний визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & - \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -12 & 8\end{vmatrix}=32+6-12-2+24-48=0.$$

Отже, система або не має розв'язків, або має їх безліч. Переходимо до п.3 алгоритму.

3. Вибираємо два рівняння даної системи, наприклад, перше і друге

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=5,\\ x_1+2x_2-2x_3=4.\end{cases}$$

Щоб знайти якийсь розв'язок, покладемо, наприклад, $x_1^*=0$.

Тоді

$$\begin{cases}-3x_2+x_3=5\\ 2x_2-2x_3=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x_2+x_3=5\\ x_2-x_3=2\end{cases}\Rightarrow x_2^*=-3{,}5;\ x_3^*=-5{,}5.$$

Отже, дістали розв'язок: $x_1^*=0, x_2^*=-3{,}5, x_3^*=-5{,}5$. Підставляємо його в третє рівняння заданої системи

0 — 12(—3,5) + 8 (—5,5) = 42 — 44 = —2.

Переконалися, що цей розв'язок задовольняє третє рівняння (—2=—2).

Таким чином, система має безліч розв'язків, і переходимо до п.4 алгоритму.

4. Записуємо відповідну однорідну систему

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2-2x_3=0,\\ x_1-12x_2+8x_3=0.\end{cases}$$

Вибираємо два рівняння, наприклад, перше і друге:

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

тому що з коефіцієнтів цих рівнянь можна скласти визначник другого порядку, відмінний від нуля. Наприклад,

$$\Delta'=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7\neq 0.$$

Розв'язок цієї системи шукаємо, наприклад, за формулами (4). Маємо

$$x_1^{30} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot t = 4t;\ x_2^{30} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot t = 5t;\ x_3^{30} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 7t.$$

Як показано раніше, це і буде загальний розв'язок усієї однорідної системи (переконайтесь в цьому самостійно, підставивши цей розв'язок у третє рівняння).

Таким чином, загальний розв'язок заданої системи має вигляд

$$x_1^{3H} = 4t; \qquad x_2^{3H} = -3{,}5 + 5t; \qquad x_3^{3H} = -5{,}5 + 5t$$

де t — параметр, який приймає будь-яке дійсне значення.

Аналогічний алгоритм має місце і для системи n рівнянь з n невідомими.

5. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі

Означення. **Рангом** матриці A називається найвищий із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Якщо ранг матриці A дорівнює k, то це позначається так: $r(A) = k$.

Якщо матриця A складається тільки із нулів, то для неї $r(A) = 0$.

Якщо ж у матриці є хоча б один елемент, відмінний від нуля, то $r(A) = 1$ і взагалі, $1 < r(A) < \min\{m, n\}$.

Зауважимо, що, якщо всі мінори k-го порядку дорівнюють нулеві, то і всі мінори порядку більшого, ніж k, також будуть дорівнювати нулеві, тобто $r(A) < k$.

Так, якщо для квадратної матриці A порядку n буде $|A| = 0$, то $r(A) < n$.

Для знаходження рангу матриці доцільно використовувати такі властивості рангу, які наведемо без доведення.

Ранг матриці не зміниться, якщо

1) матрицю транспонувати;
2) у матриці переставити рядки (стовпці);
3) із матриці виключити рядок (стовпець), який містить тільки нулі;
4) із матриці виключити рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців);
5) будь-який рядок (стовпець) помножити на число, що не дорівнює нулеві;
6) до будь-якого рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).

Приклад . Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 8 & 3 & 19 & 11\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Задана матриця порядку (3x4), отже, *r(A)* $\leq$ min {3;4}, тобто *r(A)* $\leq$ 3. Всього буде чотири мінори третього порядку. Для того, щоб не обчислювати їх, зробимо такі перетворення. Помножимо перший рядок спочатку на –2, а потім на –8 і додамо відповідно до другого і третього рядка (властивості 5, 6). Маємо

$$r(A)=r\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 8 & 3 & 19 & 11\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 0 & -7 & -7 & -7\\ 0 & -27 & -21 & -21\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

За властивістю 4 маємо

$$r(A)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже, *r(A)* = 2, тому що, наприклад, мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Розглянемо системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1j}x_j+...+a_{1n}x_n=h_1,\\ \text{.......... ....}\\ a_{i1}x_1+...+a_{ij}x_j+...+a_{in}x_n=h_i,\\ \text{.......... ....}\\ a_{m1}x_1+...+a_{mj}x_j+...+a_{mn}x_n=h_m. \end{cases} \qquad (15)$$

Доповнимо матрицю *A* системи стовпцем із вільних членів:

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & h_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & h_m \end{array}\right)$$

Матриця *B* називається **розширеною** матрицею системи (15).

Наступна фундаментальна теорема лінійної алгебри (наведемо її без доведення) формулює умови, за яких система (15) сумісна, тобто має розв'язок (один або безліч).

Теорема Кронекера — Капеллі. Система лінійних рівнянь **сумісна** тоді і тільки тоді, коли ранг матриці *A* системи дорівнює рангу розширеної матриці *B*

$$r(A) = r(B).$$

При цьому система має **єдиний** розв'язок, якщо $r(A) = r(B) = n$, де n — число невідомих системи. Якщо ж $r(B) > r(A)$, то система розв'язку немає (очевидно, що нерівність $r(B) < r(A)$ неможлива).

Приклад . Дослідити, чи сумісна система:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + 2z = 1; \\ x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю *A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Використаємо властивість 4 рангу матриці

$$r(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ і } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ тобто } r(A)=2$$

Запишемо розширену матрицю *B:*

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Маємо:

$$r(B) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже, $r(B) = 3$, тобто $r(B) > r(A)$, і система несумісна.

Повернутися до змісту