Лекція №4. Векторна алгебра. Основні поняття

1. Поняття вектора як напрямленого відрізка

Під **величиною** розуміють все те, що має числову характеристику. Величини розділяють на скалярні та векторні.

Скалярна величина, або скаляр, це — величина, яка має лише одну числову характеристику. Наприклад, скалярними величинами є числа, довжина відрізка, температура, маса, шлях, робота тощо.

Означення. **Векторною величиною, або вектором (геометричним),** називається величина, яка характеризується числовою характеристикою і напрямом.

Прикладом векторних величин є: сила, швидкість, струм, прискорення, тощо.

Зображається вектор у вигляді напрямленого відрізка AB (рис. 1), де точка A — початок, а точка B — кінець вектора.

Числова характеристика вектора AB називається його **модулем:** $|AB|$ і дорівнює довжині відрізка AB у вибраній системі одиниць.

Якщо початок A і кінець B вектора AB співпадають, тобто $AB = AA = 0$, то такий вектор називається **нульовим.** Його модуль дорівнює нулеві ($|0| = 0$), а напрям будь-який.

Розділ математики, який вивчає дії над векторами, називається **векторною алгеброю.**

Введемо основні поняття, що стосуються векторів.

Означення. Два вектори називаються **колінеарними,** якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих. Колінеарність векторів AB та CD позначається так: $AB \| CD$.

Якщо два колінеарні вектори мають один і той же напрям, то вони називаються **співнапрямленими,** у протилежному випадку — **протилежно спрямованими.**

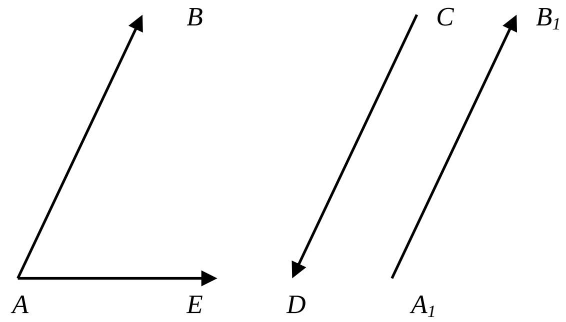

Рис.1

На рис. 1 вектори *AB, CD* і *A1B1* колінеарні: $AB \| CD \| A_1B_1$. При цьому *AB* і A_1B_1— співнапрямлені, а *AB* і *CD* — протилежно спрямовані.

Означення. Два вектори *AB* і A_1B_1 називаються **рівними** $AB = A_1B_1$**,**
якщо вони:

1. мають рівні модулі: $|AB| = |A_1B_1|$,
2. колінеарні: $AB \| A_1B_1$,
3. співнапрямлені.

На рис. 1 вектори *AB* та A_1B_1 рівні: $AB = A_1B_1$, тому що $|AB| = |A_1B_1|$; $AB \| A_1B_1$, і вектори співнапрямлені, а вектори *AB* і *AE* — не рівні, хоча $|AB| = |AE|$, але ці вектори не колінеарні. Вектори *AB* і *CD* теж не рівні, хоча $|AB| = |CD|$, $AB \| CD$, але ці вектори протилежно спрямовані.

Операції порівняння векторів, тобто поняття «більше», «менше», у векторній алгебрі не вводяться.

Очевидно, що із будь-якої точки площини (або простору) можна побудувати вектор, рівний даному. У цьому значенні ми будемо розглядати так звані **вільні вектори** і позначатимемо їх однією літерою: ***a, b*** тощо. Для того, щоб задати або знайти вектор, потрібно знати дві його характеристики: модуль і напрям.

Означення. Три вектори ***a, b, c*** називаються **компланарними,** якщо вони лежать в одній або паралельних площинах (рис. 2).
Зауважимо, що якщо вектори ***a, b, c*** лежать у різних паралельних площинах, то завжди можна в одній з них вибрати будь-яку точку *O* і побудувати три вектори ***a, b, c,*** що виходять із цієї точки. Отже, не обмежуючи загальності, можна вважати, що компланарні вектори лежать в одній площині.

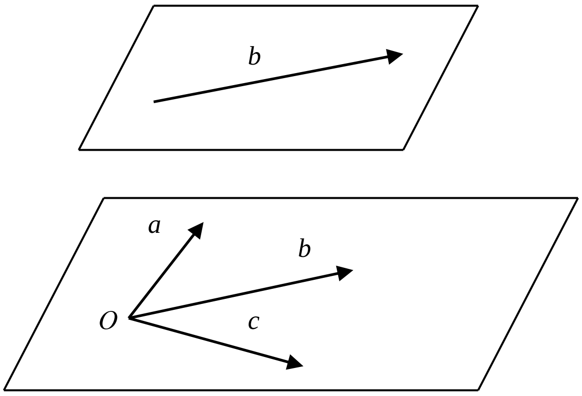

Рис. 2

2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над будь-якими величинами однакової природи називаються **операція їх додавання і операція множення цієї величини на скаляр.**

Означення. **Сумою двох векторів *a* і *b*,** розташованих так, що початок вектора ***b*** збігається з кінцем вектора ***a*,** називається вектор ***c* = *a*+*b*,** який з'єднує початок вектора ***a*** з кінцем вектора ***b*** (рис. 3). Таке правило додавання називається «правилом трикутника».

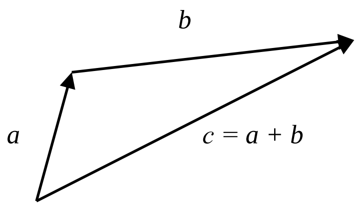

Рис.3

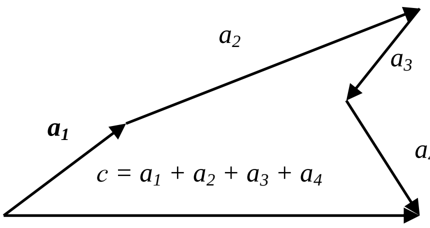

Рис.4

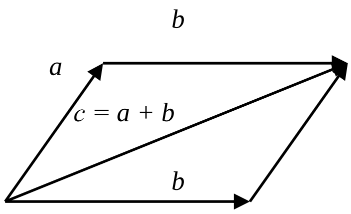

Рис.5

Аналогічно можна визначити суму будь-якої скінченої кількості векторів.

Означення. **Сумою *n*** векторів $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots \boldsymbol{a_n}$ розташованих так, що початок наступного вектора збігається з кінцем попереднього, називається вектор $c = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, який з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього (рис. 4).

Якщо трикутник на рис.3 добудувати до паралелограма, тобто з початку ***a*** відкласти вектор, що дорівнює ***b*** (рис. 5), то дістанемо друге правило додавання — «правило паралелограма», яке вводиться тільки для неколінеарних векторів.

Сумою двох векторів ***a*** та ***b*,** що мають спільний початок, називається вектор ***c* = *a*+*b*,** який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах ***a*** та ***b*,** як на сторонах, і який має початок у спільному початку векторів ***a*** та ***b*** (рис. 5).

Означення. **Добутком вектора *a* на дійсний скаляр λ,** називається вектор ***c* = *λ a*** такий, що:

1. модуль вектора ***c*** дорівнює добутку модулів скаляра λ і вектора ***a:***
   $|c| = |\lambda| \cdot |a|$;
2. вектор ***c*** колінеарний вектору ***a:*** ***c*** $||$ ***a*** ;
3. якщо $\lambda > 0$, то вектори ***c*** і ***a*** співнапрямлені, а якщо $\lambda < 0$, то вектори ***c*** і ***a*** протилежно спрямовані.

Очевидно, що, якщо $\lambda = 0$, то добуток λ ***a*** $= 0$ — нуль-вектор;

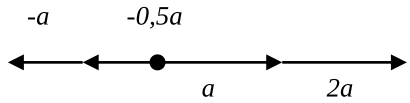

Рис.6

якщо $\lambda = -1$, то добуток λ ***a*** =– **a** і дістаємо вектор, **протилежний** вектору ***a***.
На рис. 10 при заданому векторі ***a*** представлено вектори *2**a**;*– 0,5***a***; – ***a***.

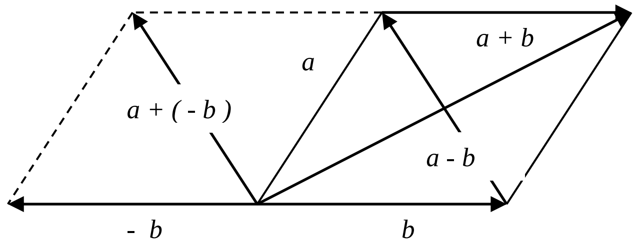

Рис.7

Тепер легко визначити різницю двох векторів. Дійсно: ***a*—*b* = *a* +(—*b*)**, тобто різниця векторів ***a*** і ***b*** є сума вектора ***a*** і вектора — ***b***, протилежного ***b*** (рис. 7). Використовуючи попередні означення суми двох векторів і рис. 7, дістаємо наступне означення.

Означення. **Різницею двох векторів *a*** і ***b,*** що мають спільний початок, є вектор ***c*** = ***a*** – ***b***, який з'єднує кінці цих векторів і напрямлений із кінця від'ємника (вектор ***b)*** в кінець зменшуваного (вектор ***a***).

У паралелограмі, побудованому на векторах ***a*** і ***b***, вектор ***a*** – ***b*** співпадає із другою діагоналлю, яка з'єднує кінці векторів ***b*** і ***a*** (рис. 7).

Означення. **Лінійною комбінацією *n* векторів** $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots a_n}$ називається сума їх добутків на скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, тобто вектор

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_i a_i + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Легко переконатися у тому, що у векторній алгебрі мають місце такі самі основні закони лінійних операцій, як і у звичайній алгебрі. А саме:

1) Переставний (комутативний) закон:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a};$$

2) Сполучний (асоціативний) закон:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

$$\lambda_1(\lambda_2 a) = \lambda_2(\lambda_1 a) = \lambda_1\lambda_2 a;$$

3) Розподільний (дистрибутивний) закон :

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b},$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a;$$

4) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Теорема **(Умова колінеарності векторів).** Два вектори ***a*** та ***b*** **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b},$$

де λ — скаляр, причому $\lambda \neq 0$.

Означення. Вектор a^0 називається **одиничним вектором** для вектора ***a,*** або **ортом вектора *a,*** якщо :

1) $|\boldsymbol{a}^\circ| = 1$

2) $\boldsymbol{a}^\circ \parallel \boldsymbol{a}$

3) $\boldsymbol{a}^0$ співнапрямлений із ***a***.

Із попереднього випливає, що

$$a^0 = (1/|a|)a$$

Теорема **(Умова компланарності векторів).** Три вектори ***a, b, c*** **компланарні** тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших. Наприклад,

$$c = \lambda_1 a + \lambda_2 b,$$

де λ_1, λ_2 — два скаляри, причому хоча б один із них не дорівнює нулеві.

3. Величина напрямленого відрізка. Координатна вісь

Означення. **Величиною напрямленого відрізка *AB,*** розташованого на осі, називається число, яке дорівнює довжині $|AB|$ відрізка, взяте із знаком «+», якщо напрям відрізка збігається із напрямом осі, і із знаком «—», якщо напрям відрізка протилежний напряму осі.

Величину відрізка ***AB*** позначають як ***вел. AB*** або просто *AB.*

Теорема **(Основна тотожність між величинами).**

При будь-якому розташуванні точок *A, B, C* на осі *l* величини відрізків *AB, BC, AC* задовольняють співвідношення

$AC = AB + BC$

Теорема. Величина напрямленого відрізка *AB* на координатній осі *Ox* дорівнює різниці координат кінця і початку цього відрізка.

Доведення. Нехай є точки $A(x_1)$ і $B(x_2)$. Тоді величина AB відрізка $\boldsymbol{AB}$ дорівнюватиме:

$$AB = x_2 — x_1$$

Дійсно, згідно з основною тотожністю між величинами (1) для трьох точок A, O, B можна записати:

$$AB = AO + OB = OB — OA = x_2 — x_1$$

Зауважимо, що довжина (або модуль) відрізка $\boldsymbol{AB}$ дорівнює:

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

Це ж число (|AB|) визначає віддаль між точками $A(x_1)$ та $B(x_2)$, що лежать на осі $\boldsymbol{Ox}$.

4. Поняття проекції вектора на вісь.

Означення. **Проекцією на вісь *l* точки *M*** називається точка M_1, яка є основою перпендикуляра, опущеного із точки M на вісь l (рис. 8).
Позначається це так

$$M_l = пр_l\, M.$$

Означення. **Проекцією вектора *AB* на вісь** l називається величина напрямленого відрізка A_lB_l, розташованого на осі l, тобто
$Пр_l\, AB = A_lB_l,$

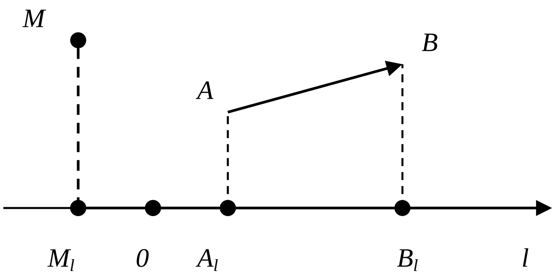

Рис.8

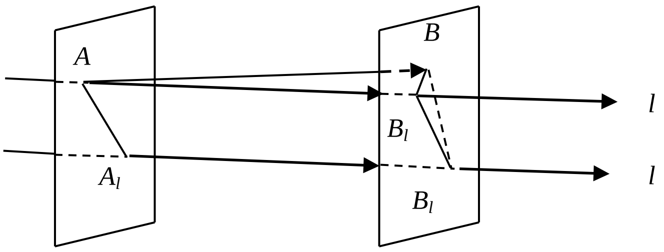

Рис.9

де A_l, B_l—це відповідно проекції початку A та кінця B вектора AB (рис. 8).

Таким чином, проекція вектора AB на вісь є число, яке додатне, якщо напрям A_lB_l збігається з напрямом осі l і від'ємне — в протилежному випадку. Якщо вектор AB і вісь l не лежать в одній площині (розташовані на перехресних прямих), то для того, щоб спроектувати вектор AB на вісь, потрібно через точки A та B провести площини, перпендикулярні до осі (рис. 9). Точки їх перетину з віссю і будуть відповідно проекціями A_l та B_l точок A та B. Якщо вектор вільний, тобто $AB = a$, то його проекція на вісь l позначається так: $a_l = пр_l a$.

Означення. **Кутом між вектором і віссю** називається найменший кут, на який потрібно повернути вісь так, щоб її напрям збігся з напрямом вектора.
Кут між вектором AB і віссю l позначається так :

$$(AB,\, l) = (a, l) = \varphi.$$

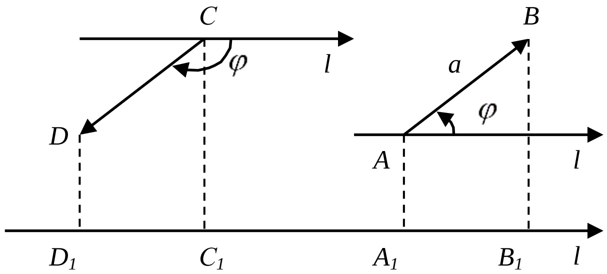

Рис.10

Для того, щоб визначити кут φ, потрібно через початок вектора ***a*** провести пряму, паралельну осі (рис. 10) (або із будь-якої точки осі побудувати вектор, що дорівнює даному), і кут між вектором ***a*** і прямою, паралельною осі, і буде φ, при цьому 0 < φ < 180°. На рис. 10 φ = *(AB,l)* < 90°, а φ = ***(CD,l)*** > 90°.

Очевидно, якщо φ — гострий кут, то $пр_l a$ — додатна, а якщо φ — тупий кут, то $пр_l a$ — від'ємна.

5. Властивості проекцій вектора на вісь

Властивість 1 **(про величину проекції). Проекція вектора на вісь** дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між вектором і віссю:

$$пр_l AB = |AB| cos(AB,l) = |AB|\ cos\ φ,$$

$$пр_l a = |a|\ \cos(a,l) = |α|\ \cos φ. \qquad (1)$$

Для доведення формули (1) розглянемо вектор $a=AB$ і його проекцію $a_l = A_l B_l$ на вісь l (рис. 11).

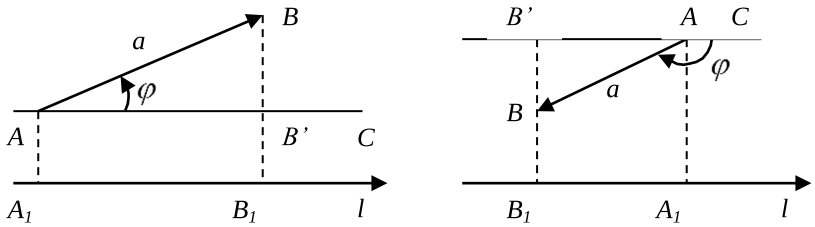

Рис11

При цьому можливі два випадки $α_l > 0$ (рис. 11. а) і $α_l < 0$ (рис. 11. б).

1) Нехай $пр_l a = a_l = A_l B_l > 0$ (рис. 11. а). Проведемо через точку A пряму AC, паралельну осі l, і точку її перетину з перпендикуляром BB_l

позначимо B'. Кут $φ = (AB,l) = \angle B'AB < 90°$. Користуючись означенням проекції вектора і співвідношеннями у прямокутному трикутнику ABB', дістаємо

$$пр_l AB = A_l B_l = |A_l B_l| = |A\ B'| = |AB|\ cos\ φ.$$

2) Нехай $пр_l a = A_l B_l < 0$ (рис. 11. б). Аналогічно попередньому роведемо пряму AC, паралельну осі l Очевидно, кут $φ = (AB,l) = \angle CAB > 90°$, а у $ΔABB'$ буде $\angle B'AB = 180° — φ$. Користуючись тими ж міркуваннями, що і у випадку 1 маємо

$пр_l AB = A_lB_l$ = —| A_lB_l|= —| AB' |= — (|AB| cos (180°— φ)) = |AB|cos φ.
Властивість доведена.

Наслідок 1. Із формули (1) дістаємо

$$\cos \varphi = \cos (a,l) = пр_l a/|a| = a_l /|a|, \qquad (2)$$

тобто косинус кута між вектором і віссю є відношенням проекції вектора на вісь до його модуля.

Наслідок 2. Рівні вектори мають рівні проекції, тобто якщо $a = b$, то $a_l=b_l$.

Властивість 2. **Проекція суми векторів** на вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь:

$$пр_l(a + b + c) = пр_l\, a + пр_l\, b + пр_l\, c = a_l + b_l + c_l. \qquad (3)$$

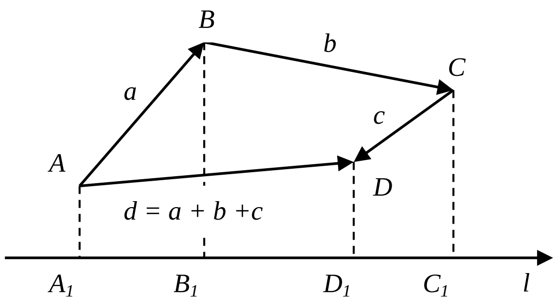

Рис.12

Для доведення розглянемо три вектори, розташовані, наприклад, так, як на рис. 12. Сумою цих векторів є вектор d, тобто $d= a+b+c$, або $AD =AB + BC + CD$.

Спроектуємо вектори a, b, c, d на вісь l. Використовуючи означення проекції вектора на вісь і основну тотожність між величинами для чотирьох точок A_l, B_l, C_l, D_l дістанемо

$$пр_l (a + b + c) = пр_l d = A_lD_l = A_lB_l + B_lD_l = A_lB_l + B_lC_l + C_lD_l = пр_l\, a+$$
$$+пр_l\, b + пр_l\, c.$$

Властивість 3. **Проекція на вісь добутку скаляра на вектор** дорівнює добутку скаляра на проекцію вектора на цю вісь:

$$Np_l\, \lambda a = \lambda пр_l a. \qquad (4)$$

Для доведення використаємо властивість 1 (формула (1)). Маємо

$$пр_l\lambda a = |\lambda\, a| \cos (\lambda\, a, l) = |\lambda|\, |a| \cos (\lambda\, a, l).$$

Нехай $\lambda > 0$. Тоді $|\lambda| = \lambda$ і вектор $\lambda\, a$ співнапрямлений вектору a, тобто $(\lambda a, l) =(a, l) = \varphi$ (рис. 13. а)).

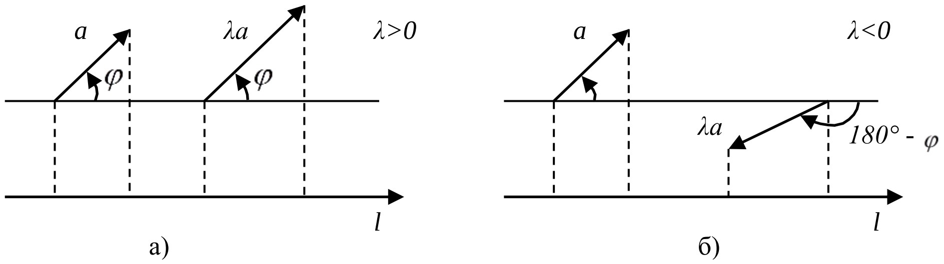

Рис.13

І із останньої рівності дістаємо

$$np_l\, \lambda a = \lambda\, |a| \cos\, (a,\, l) = \lambda np_l\, a.$$

Якщо $\lambda < 0$ (рис.13. б)), то $|\lambda| = — \lambda$ і вектор λa напрямлений протилежно до вектора a, тобто $(\lambda a,\, l) = 180° — (a,\, l) = 180° — \varphi$. Тоді

$$np_l\, \lambda a = — X|a| \cos\, (180° — \mathbf{(a,}\, l\mathbf{)}) = — \lambda|a|\, \mathbf{(}—\cos(a,l)) = \lambda|a| \cos\, (a,\, l) =$$
$$= \lambda\, np_l\, a.$$

Рівність (4) доведено.

Наслідок. Для колінеарних векторів $a\, |\,|\, b$ відношення їх проекцій a_l і b_l на вісь l є величина стала, незалежна від положення осі.

Дійсно, якщо $a\, |\,|\, b$, то $a = \lambda b$ і згідно з наслідком 2 із властивості 1 маємо

$$np_l\, a = np_l\, \lambda b = \lambda\, np_l\, b,$$

а звідси випливає

$$np_l\, a\, /\, np_l\, b = a_l\, /\, b_l = \lambda,$$

де λ— скаляр.

Властивості 2 і 3 стосуються лінійних операцій над проекціями векторів і називаються **властивостями лінійності** операції «проекція», їх можна об'єднати в одну, так звану властивість лінійності проекцій: **проекція на вісь *l* лінійної комбінації** декількох векторів дорівнює лінійній комбінації проекцій цих векторів із тими самими скалярами:

$$np_l(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) = \lambda_1 np_l\, a + \lambda_2 np_l\, b + \lambda_3 np_l\, c$$

Властивість 4. Проекція вектора на координатну вісь дорівнює різниці координат проекцій кінця і початку вектора

$$np_{Ox}AB = A_xB_x = x_2 — x_2, \qquad (5)$$

де $A_x\, (x_1)$ і $B_x\, (x_2)$ — це проекції точок A і B на вісь Ox (рис. 14).

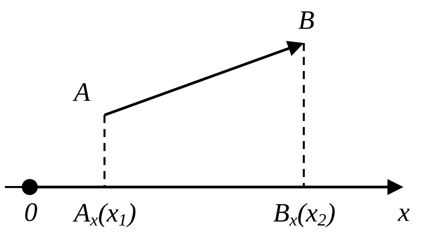

Рис.14

Дійсно, $пр_{Ox}AB$ дорівнює величині A_XB_X напрямленого відрізка A_XB_X. Тоді маємо, що

$$A_xB_x = x_2 — x_2$$

тобто має місце рівність (5).

6. Вектор у декартовій системі координат

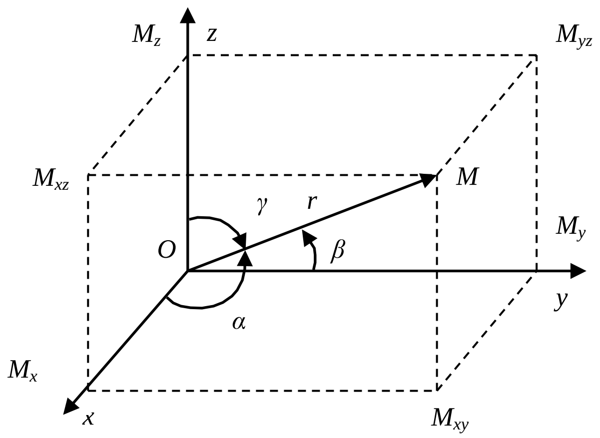

Рис.15

Нехай розглядається декартовий простір.

Означення. **Радіусом-вектором** точки $M(x,y,z)$ називається вектор $r = r(M) = OM$, який з'єднує початок координат з точкою M (рис. 15).

Спроектуємо вектор r на координатні осі. Оскільки точка O лежить на всіх осях, досить спроектувати лише точку $M(x,y,z)$. Згідно з означенням проекції вектора на вісь дістаємо

$$пр_{Ox}r = r_x = OM_x = x,$$
$$пр_{Oy}\, r = r_y = OM_y = y,$$
$$пр_{Oz}\, r = r_z = OM_Z = z.$$

Тобто проекції радіуса-вектора $r(M)$ на координатні осі дорівнюють координатам точки М і радіус-вектор записується у декартовій системі так:

$$r = \{x;y;z\}.$$

Числа x, y, z називаються **декартовими координатами вектора.**
На відміну від координат точки координати вектора записуються у фігурних дужках.

Очевидно, що кожному вектору r відповідає єдина трійка чисел $\{x; y; z\}$ — координати цього вектора у декартовому просторі і, навпаки, кожній упорядкованій трійці $\{x; y; z\}$ відповідає єдиний вектор r, проекції якого на осі дорівнюють відповідно числам x, y, z.

Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між радіусом-вектором $r = OM$ і трійкою чисел $\{x; y; z\}$ — координатами (проекціями) вектора або координатами точки $M(x,y,z)$.

Якщо ж у декартовому просторі взяти довільний вектор a, то завжди можна побудувати рівний йому радіус-вектор $OM = r$ $(a = OM)$, координати якого $\{x; y; z\}$. Оскільки рівні вектори мають і рівні проекції, то і вектор ***a*** визначається тією ж трійкою чисел. Звідси випливає друге «аналітичне» означення вектора у декартовому просторі.

Означення. **Вектором *a* у декартовому просторі,** або тривимірним вектором, називається величина, що визначається трійкою чисел $\{x; y; z\}$ — проекціями цього вектора на відповідні координатні осі, і будь-яка упорядкована трійка чисел $\{x; y; z\}$ є тривимірний вектор з координатами x, y, z.

Будемо надалі позначати будь-який вектор $a = \{a_x, a_y; a_z\}$, а радіус-вектор — $r = \{x; y; z\}$.

Розглянемо тепер вектор AB = ***a*** з фіксованим початком $A(x_1,y_1,z_1)$ і кінцем $B(x_2,y_2,z_2)$ і визначимо його координати. Для цього спроектуємо AB на координатні осі. Тоді згідно з властивістю 4 проекції вектора на вісь (формула (5)) дістанемо:

$$a_x = пр_{Ox}AB = A_xB_x = x_2 — x_1; \quad a_y = пр_{Oy}AB = A_yB_y = y_2 — y_1,$$

$$a_z = пр_{Oz}AB = A_ZB_Z = z_2 — z_1.$$

Тобто координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора.

Вектор AB згідно зі своїми координатами має вигляд:

$$AB = \{x_2 — x_1; y_2 — y_1; z_2 — z_1\}.$$

Аналогічно вводиться і вектор ***a*** на площині (рис. 16).

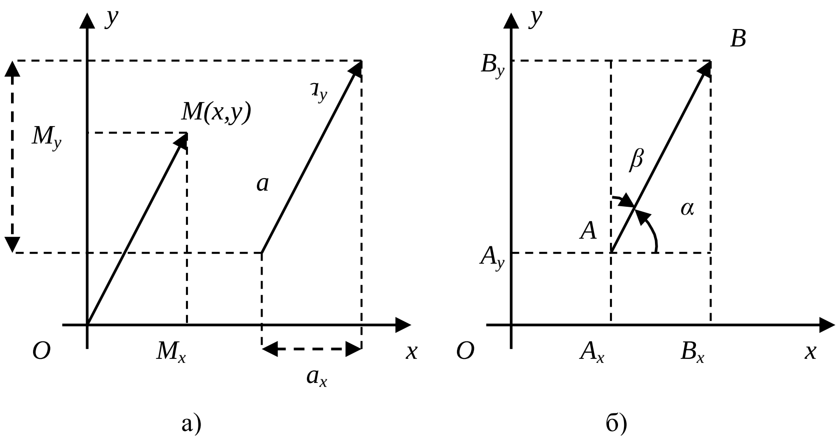

Рис.16

Вектором *a* на декартовій площині, або двовимірним вектором, називається величина, яка визначається парою чисел $\{x; y\}$ — проекціями цього вектора на відповідні координатні осі, і будь-яка упорядкована пара чисел $\{x; y\}$ є двовимірний вектор з координатами x, y.

Радіус-вектор $OM = r$ та будь-який вектор a чи AB позначаються на площині аналогічно тому, як у просторі. Тобто (рис. 16. (а), б)):

$$OM = r = \{x,y\}; a = \{a_x; a_y\}; AB = \{x_2 — x_1; y_2 — y_1\},$$

де $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ — початок і кінець вектора AB.
Отже, викладення достатньо вести лише для тривимірних векторів.

Встановимо зв'язок між означеннями вектора як напрямленого відрізка (геометричного вектора), і тільки що введеним «аналітичним» вектором.

Для простоти міркувань будемо розглядати радіус-вектор $r = OM = \{x;y;z\}$ (рис. 8).

Доведемо, що, знаючи координати вектора *г,* можна завжди визначити його довжину $|r|$ і напрям. Очевидно, $r = OM$ збігається з діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, ребрами якого є відрізки OM_x, OM_y, OM_z і, як відомо, в такому паралелепіпеді квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів усіх його ребер:

$$|r| = |OM| = \sqrt{(OM_x)^2 + (OM_y)^2 + (OM_z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6)$$

тобто модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

Напрям вектора r визначається за допомогою косинусів кутів, які утворюються між вектором r і відповідними осями: $\alpha = (r, Ox)$; $\beta = (r, Oy)$; $\gamma = (r, Oz)$ (див. рис. 15 і рис. 16 (б)). Кути α, β, γ називаються напрямними, а їх косинуси: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — **напрямними косинусами.** За формулою (2) маємо:

$$\cos(r, Ox) = \cos\alpha = x/|r|, \ \cos(r, Oy) = \cos\beta = y/|r|,$$
$$\cos(r, Oz) = \cos\gamma = z/|r|. \quad (7)$$

Напрямні косинуси задовольняють співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (8)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів для будь-якого вектора дорівнює одиниці.

У справедливості тотожності (8) легко переконатися, якщо застосувати рівності (7) і (6). Дійсно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (x/|r|)^2 + (y/|r|)^2 + (z/|r|)^2 =$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)/(|r|)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2} = 1$$

Отже, всі три кути α, β, γ не можуть бути довільними; знаючи два із них, третій потрібно знаходити із співвідношення (8).

У двовимірному випадку (рис. 15(б)) формула (8) має вигляд

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Оскільки $\cos\beta = \pm\sin\alpha$, то і дістаємо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + + \sin^2\alpha = 1$ — відому із тригонометрії формулу.

Таким чином, формули (6) — (7) цілком визначають вектор r.

Навпаки, знаючи модуль $|r|$ і напрям вектора r, можна завжди знайти його координати або проекції на координатні осі.

Дійсно, якщо вибрано систему координат, то напрям вектора можна задати за допомогою двох кутів, наприклад, α і β між вектором *r* і координатними осями *Ox* і *Oy*. Знайшовши cos α і cos β (наприклад, за таблицею) можна із співвідношення (8) (з точністю до знака) визначити cos *γ*. А тоді дістаємо:

$$пр_{Ox}r = x = |r| \cos\alpha; \quad пр_{Oy}r = y = |r|\cos\beta; \quad пр_{Oz}r = z = |r|\cos\gamma. \quad (9)$$

Отже, знайдено координати вектора *r* = *{x; y; z}*. Еквівалентність двох означень вектора доведено.

Приклад 1. Задано вектор ***a*** = {1; -2; 2}. Знайти його модуль і напрямні косинуси.

Розв'язання. Згідно з формулами (6) — (7) дістаємо

$$|a| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3; \quad \cos\alpha = 1/3; \quad \cos\beta = -2/3; \quad \cos\gamma = 2/3.$$

Приклад 2. Відомо, що вектор *a,* розташований у площині, утворює з віссю *Ox* кут α = 120° і |a|= 2. Знайти координати вектора ***a.***

Розв'язання.

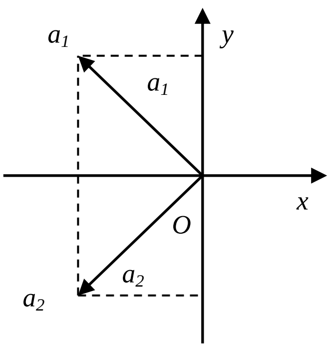

Рис.17

Знаходимо cos α = cos 120° = — cos 60° = —1/2;

cos β знаходимо із співвідношення (8): $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha$;

$\cos^2\beta = 1 - 1/4 = 3/4$,

отже $\cos\beta = \pm\sqrt{3}/2$, і β = 30° або β =150°.

Тоді $a_x = |a|\cos\alpha = 2\,(-1/2) = -1$; $a_y = |a|\cos\beta = 2\left(\pm\sqrt{3}/2\right) = \pm\sqrt{3}$, тобто задача має два розв'язки : $a_1 = \{-1;\ \sqrt{3}\}$; $a_2 = \{-1;\ -\sqrt{3}\}$. На рис. 10 представлено ці вектори.

Зауваження. Якщо вектор a^0 — одиничний, тобто |a°| = 1, то згідно з формулою (9) дістаємо

$$пр_{Ox}\,a^0 = |a°|\cos\alpha = \cos\alpha;$$
$$пр_{Oy}\,a^0 = |a°|\cos\beta = \cos\beta;$$
$$пр_{Oz}\,a^0 = |a°|\cos\gamma = \cos\gamma.$$

Отже, $a^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, і координатами одиничного вектора є напрямні косинуси.

Повернутися до змісту