Лекція №7. Рівняння площини і прямої у просторі

Не кожне рівняння $F\ (x,\ y,\ m) = 0$ зображає деяку поверхню. Так, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не задовольняють жодні значення $x,\ y,\ z$ і воно нічого не зображає.

Лінію у просторі розглядають як перетин двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно на обох поверхнях. Тому лінія L є перетин двох поверхонь Qi і Q_2, рівняння яких відповідно $Fi(\ x,\ y,\ z) = 0$ і $F_2(x,\ y,\ z) = 0$, тобто лінію L потрібно визначити системою із цих рівнянь.

Означення. Система рівнянь $F\backslash(x,y,z) = 0,\ F_2(x,\ y,z) = 0$ називається **рівнянням лінії *L*** (визначає лінію L при заданій системі координат), якщо цю систему задовольняють координати $(x,\ y,\ z)$ будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати точок, що не лежать на L.

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

представляє перетин сфери із площиною xOy, тобто визначає коло, що лежить у площині xOy з центром у початку координат і радіусом R.

Зауважимо, що задана лінія L може бути, взагалі кажучи, лінією перетину різних пар поверхонь, тобто може бути представлена різними системами із двох рівнянь. Але усі такі системи мають однаковий розв'язок, отже, є еквівалентними.

Надалі вважатимемо, що зафіксовано декартову систему координат $Oxyz$ і що задати поверхню (лінію в просторі), або знайти поверхню (лінію) означає задати або знайти рівняння цієї поверхні (лінії).

1. Рівняння площини

1.1. Рівняння площини з нормальним вектором

Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить площині Q, і вектор $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$, перпендикулярний до цієї площини. Скласти рівняння площини Q.

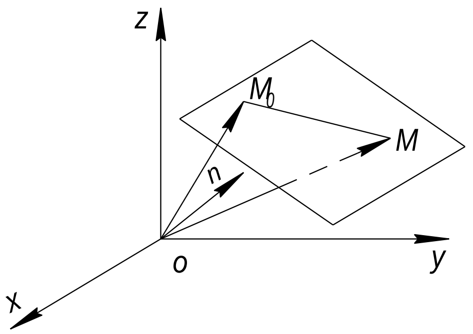

Рис 1

Вектор $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ називається **нормальним** вектором площини Q (рис. 1).

Візьмемо на площині Q довільну точку (біжучу) $M(x, y, z)$ і проведемо вектор M_0M . Очевидно, вектори M_0M і $\boldsymbol{n}$ взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли точка M належить площині Q. Із умови перпендикулярності векторів дістаємо

$$M_0M\, n = 0 \quad \text{або} \quad (r_M - r_{Mo})\, n = 0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) є векторною формою рівняння площини з нормальним вектором. Враховуючи координатний запис векторів $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ і $r_M - r_{Mo} = \{x\text{-}x_o; y\text{-}y_o; z\text{-}z_o\}$ із (1) дістаємо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) — це **рівняння площини, яка містить задану точку M_0 (x_0, y_0, z_0) і має нормальний вектор $n = \{A;B; C\}$**. Зауважимо, що якщо $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$ — нормальний вектор площини Q, то і будь-який вектор $\{\lambda A; \lambda B; \lambda C\}$ $(\lambda \neq 0)$ також є вектором, перпендикулярним площині Q.

1.2. Загальне рівняння площини

Загальне рівняння першого ступеня (лінійне рівняння) з трьома змінними x, y, z має вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3)$$

де хоча б один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулеві.

Теорема про взаємно однозначну відповідність між площиною і рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$

1. Будь-яка площина може бути представлена рівнянням
$Ax + By+Cz + D = Q$
і, навпаки.
2. Рівняння $Ax + By+Cz + D = 0$ при будь-яких A, B, C, D (крім випадку $A = B = C = 0$) *є* рівнянням площини. Проведіть його самостійно.

Рівняння (3) називається **загальним рівнянням площини,** причому коефіцієнти A, B, C — координати нормального вектора $n=\{A;B;C\}$.

1.3. Рівняння площини у відрізках на осях.

$$\frac{z}{a}+\frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1$$

1.4. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

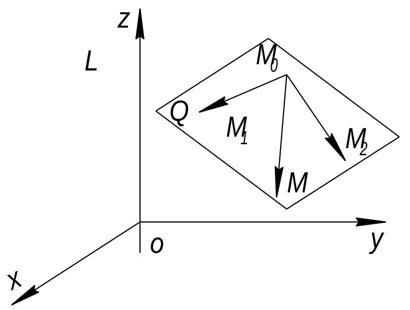

Рис 2

Нехай задано три точки M_0 (x_0, y_0, z_0), M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), Що належать площині Q і не лежать на одній прямій. Скласти рівняння площини Q.

Виберемо на площині Q будь-яку (біжучу) точку M (x, y, z) (рис. 2) і проведемо вектори M_0M, M_0M_1, M_0M_2. Ці вектори будуть компланарними тоді і тільки тоді, коли точка M лежить у площині Q. З іншої сторони, згідно з умовою компланарності, мішаний добуток цих векторів дорівнює

нулю, тобто $(M_0M \times M_0M_1)\, M_0M_2 = 0$.

Запишемо вектори M_0M, M_0M_1, M_0M_2 У координатній формі:
$M_0M = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$, $M_0M_1 = \{x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0\}$,
$M_0M_2 = \{x_2 - x_0;\ y_2 - y_0;\ z_2 - z_0\}$.

Тоді мішаний добуток цих векторів у координатній формі може бути записаний як визначник третього порядку, рядки якого — координати цих векторів. Звідси дістаємо

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 -$$

рівняння площини, що проходить через три точки.

Зауважимо, що, розкладаючи цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо рівняння площини вигляду (2). Спрощуючи його, одержимо загальне рівняння площини вигляду (3).

2. Канонічні рівняння прямої у просторі

2.1. Рівняння прямої із заданим напрямним вектором

Нехай задано точку M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, що належить прямій L, і вектор $s = \{l;\ m;\ p\}$, паралельний прямій L (або такий, що лежить на цій прямій) (рис. 3). Скласти рівняння прямої L.

Вектор s називається напрямним вектором прямої L.

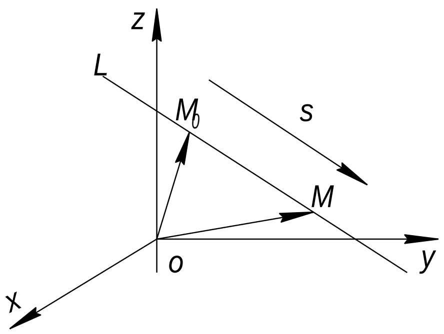

Рис 3

Візьмемо на L довільну точку M $(x,\ y,\ z)$. Тоді вектори M_0M і s будуть колінеарними, причому тоді і тільки тоді, коли точка M належить прямій L. Із умови колінеарності векторів відповідні координати векторів $M_0M = \{x - x_0\ ;\ y - y_0\ ;\ z - z_0\ \}$ і $s = \{l;\ m;\ p\}$ пропорційні. Звідси дістаємо співвідношення

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (5)$$

яке називається **канонічними рівняннями прямої** у просторі (порівняйте з (4)) або рівняннями прямої у просторі, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0,\ z_0)$ з напрямним вектором $s = \{I;\ m;\ p\}$.

Зауваження. Три рівних відношення формули (5) представляють систему двох рівнянь, наприклад,

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}, \qquad \frac{x-x_0}{l} = \frac{z-z_0}{p}$$

Кожне із цих рівнянь є рівнянням площини, але не загального положення, а паралельної координатній осі, відповідно *Oz* і *Oy*. Такі площини називаються проектуючими площинами. Отже, канонічні рівняння (5) зображають пряму у просторі як лінію перетину двох проектуючих площин. Зокрема, якщо в (5) одне із чисел l, m, p є нуль, наприклад, $l = 0$, то це означає, що вектор $s = \{0; m; p\}$ і пряма перпендикулярні до осі *Ox*. Із (5) дістаємо систему:

$x - x_0 = 0$, $\dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{p}$. Якщо ж, наприклад, $l = m = 0$, то вектор $s = \{0; 0; p\}$ і пряма перпендикулярні до площини *xOy* (чи паралельні осі *Oz*) і з рівняння (5) дістаємо рівняння цієї прямої

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

2.2. Параметричні рівняння прямої

У формулі (5) позначимо рівні відношення через параметр t. Тоді дістанемо

$$\frac{x-x_0}{l} = t, \quad \frac{y-y_0}{m} = t, \quad \frac{z-z_0}{p} = t$$

або

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + pt. \quad (-\infty < t < =+\infty) \quad (6)$$

Оскільки хоча б один із знаменників у (5) відмінний від нуля, а відповідний чисельник може приймати будь-які значення, то параметр t змінюватиметься у межах від $-\infty$ до $+\infty$.

Рівняння (6) називаються **параметричними рівняннями прямої у просторі.** При зміні параметра t в межах від $-\infty$ до $+\infty$ біжуча точка $M(x, y, z)$ пробігає пряму лінію.

2.3. Рівняння прямої що проходить через задані точки.

Нехай задано дві точки $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ і $M_1 (x_1, y_0, z_1)$, що належать прямій L. Тоді рівняння прямої L мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad (7)$$

Рівняння (7) — **рівняння прямої,** що проходить **через дві задані точки**.

2.4. Загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Від загального рівняння (8) можна перейти до канонічного рівняння (5) якщо нормальні вектори заданих площин $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$, то напрямний вектор прямої $\vec{s} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$. Точку $M_0\ (x_0; y_0; z_0\ )$ на прямій вибираємо довільну.

Повернутися до змісту