Лекція №8. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі.

1. Взаємне розташування площин

1.1 Перетин площин

Нехай задано дві площини, що перетинаються:

$$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (8.1)$$

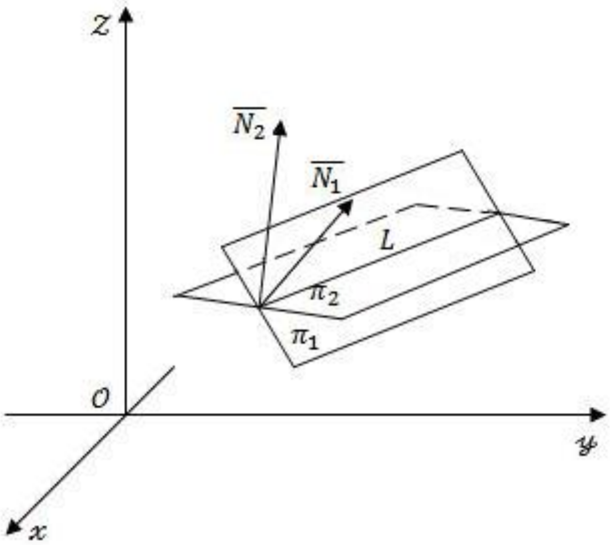

Рис.1.

Необхідно знайти кут φ між цими площинами (рис. 1).

За теоремою про кути зі взаємно перпендикулярними сторонами такий самий кут з точністю до доповняльного утворюють нормальні вектори $\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\overline{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ цих площин. Косинус кута φ між векторами знаходимо за властивостями скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (8.2)$$

Отже, кут φ між площинами обчислюється за формулою (8.2).

Приклад 8.1. Знайти кут між двома площинами $11x-8y-7z+6=0$, $4x-10y+z-5=0$.

Розв'язання. Косинус кута знайдемо за формулою (8.2), підставляючи в неї значення $A_1=11,\ B_1=-8,\ C_1=-7$, $A_2=4,\ B_2=-10,\ C_2=1$:

$$\cos\varphi=\frac{11\cdot 4+(-8)\cdot(-10)+(-7)\cdot 1}{\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}}=\frac{44+80-7}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

1.2 Перпендикулярні площини

Площини π_1 та π_2 (8.1) перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли є перпендикулярними їх нормальні вектори $\overline{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\overline{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$. Умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку:

$$\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2=0$$

або в координатній формі

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (8.3)$$

Рівність (8.3) являє собою ***умову перпендикулярності площин.***

1.3 Паралельні площини

Площини π_1 та π_2 (8.1) паралельні тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори $\overline{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\overline{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ колінеарні. Звідси, за необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів, приходимо до ***умови паралельності площин***:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (8.4)$$

Площини π_1 та π_2 співпадають, якщо

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (8.5)$$

Приклад 8.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-1;2;-3)$ паралельно площині $2x-y+5z-6=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана та задана площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні. Зокрема, за означенням вектора нормалі, вони можуть бути й рівними: $\overline{N}_1=\overline{N}_2=\{2;-1;5\}$. Отже, шукана площина проходить через точку $M_0(-1;2;-3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}_2=\{2;-1;5\}$. Складаємо її рівняння за формулою (6.4):

$$2\cdot(x+1)-1\cdot(y-2)+5\cdot(z+3)=0,$$

$$2x-y+5z+19=0.$$

2. Взаємне розташування двох прямих

Взаємне розташування двох прямих у просторі

Нехай у просторі задано дві прямі у вигляді канонічних рівнянь

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\qquad L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

тобто $M_1(x_1;y_1;z_1)\in L_1$, $M_2(x_2;y_2;z_2)\in L_2$, а вектори $\overline{a}_1=\{l_1;m_1;n_1\}$, $\overline{a}_2=\{l_2;m_2;n_2\}$ – напрямні вектори прямих L_1 та L_2.

Кутом φ між двома прямими називається кут між їх напрямними векторами, тому

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\,2}+m_1^{\,2}+n_1^{\,2}}\cdot\sqrt{l_2^{\,2}+m_2^{\,2}+n_2^{\,2}}}. \tag{8.6}$$

Прямі L_1 та L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори колінеарні:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \tag{8.7}$$

Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори перпендикулярні:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{8.8}$$

У просторі перпендикулярні прямі можуть і не перетинатися.

Для аналізу взаємного розташування двох прямих розглядають мішаний добуток трьох векторів $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ та $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ (рис.2).

1) Якщо

$$\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2\cdot\overline{M_1M_2}\neq 0,$$

то ***прямі*** L_1, L_2 не лежать в одній площині, тобто є ***мимобіжними.*** (рис.2 г)).

2) Якщо

$$\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2\cdot\overline{M_1M_2}=0 \tag{8.9}$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.10)$$

то ***прямі*** L_1***,*** L_2 ***лежать в одній площині***. Тут можливі такі три випадки:

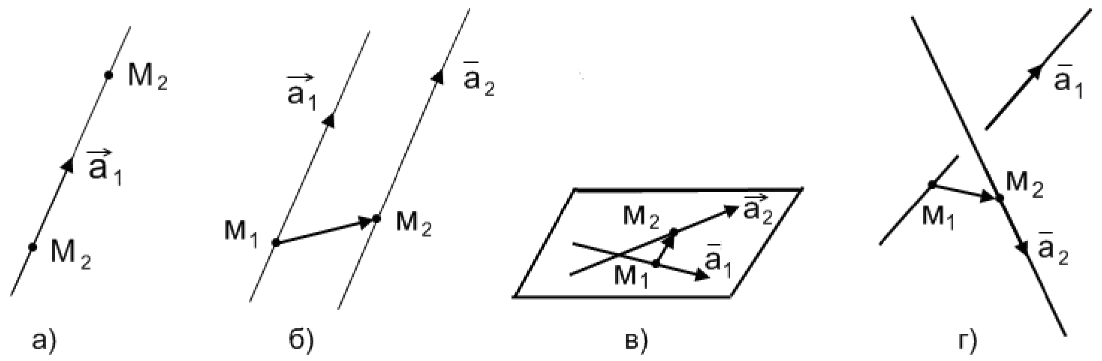

Рис.2.

а) ***прямі перетинаються,*** якщо вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ не колінеарні, тобто перші два рядки визначника (8.10) не пропорційні ((рис.2 в)):

$$\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}.$$

б) ***прямі*** L_1 ***та*** L_2 ***паралельні*** (рис.2 б)) , якщо виконується умова (8.7), але вектори $\overline{M_1M_2}$ та $\bar{a}_1$ не колінеарні.

в) ***прямі співпадають*** (рис.2 а)) , якщо вектори $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ колінеарні, тобто всі рядки визначника (8.10) пропорційні.

Приклад 8.3. При якому значенні параметра l прямі $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ перетинаються?

Розв'язання. Прямі задано канонічними рівняннями. Тому знаходимо точки на цих прямих $M_1(-2;0;1) \in L_1$, $M_2(3;1;7) \in L_2$ та їх напрямні вектори $\bar{a}_1 = \{2;-3;4\}$, $\bar{a}_2 = \{l;4;2\}$ (координата l підлягає визначенню). Оскільки прямі перетинаються, вони лежать в одній площині. За умовою компланарності векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\overline{M_1M_2} = \{5;1;6\}$ запишемо рівність

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = 0$$

або, в координатній формі,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ l & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначник, знаходимо $l = 3$.

3. Пряма та площина у просторі

Нехай задано просторову пряму $L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ та площину π: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Кутом φ ***між прямою та площиною*** називається гострий кут між прямою та її проекцією на площину. Цей кут визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{N} \cdot \overline{a}|}{|\overline{N}| \cdot |\overline{a}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (8.11)$$

Пряма L ***перпендикулярна площині*** π тоді і тільки тоді, коли напрямний вектор цієї прямої $\overline{a} = \{l; m; n\}$ колінеарний нормальному вектору площини $\overline{N} = \{A; B; C\}$:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \qquad (8.12)$$

Пряма L ***паралельна площині*** π тоді і тільки тоді, коли напрямний вектор прямої $\overline{a} = \{l; m; n\}$ перпендикулярний нормальному вектору площини $\overline{N} = \{A; B; C\}$:

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (8.13)$$

Якщо крім умови (8.13) виконується така:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad (8.14)$$

то пряма L лежить в площині π.

Приклад 8.4. При яких значеннях A та B площина $Ax + By + 3z - 5 = 0$ є перпендикулярною до прямої $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$?

Розв'язання. Згідно з (8.7) запишемо умову колінеарності нормального вектора $\overline{N} = \{A; B; 3\}$ площини та напрямного вектора $\overline{a} = \{2; -3; -2\}$ прямої:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{3}{-2}.$$

Звідси, $A = -3$, $B = 9/2$.

Контрольні запитання

1. За якою умовою площини перетинаються?
2. Як знайти кут φ між цими площинами?
3. Записати умови паралельності площин π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

4. Записати умову перпендикулярності площин
$\pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

5. Записати формулу, за якою знаходиться кут φ між двома прямими:

$$L_1:\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad L_2:\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Повернутися до змісту