Лекція №10. Криві другого порядку. Гіпербола. Парабола

1. Канонічне рівняння гіперболи

Означення. **Гіперболою** називається геометричне місце точок, для кожної із яких абсолютна величина різниці віддалей до двох заданих точок, що називаються **фокусами,** є величина стала.

Позначимо через F_1 і F_2 точки, що є фокусами, а через M— будь-яку точку, що належить гіперболі. Тоді гіпербола характеризується тим, що

$$||MF_1| — |MF_2||= \text{const}.$$

Введемо декартову систему координат так само, як і в попередньому пункті (рис. 1), і позначимо віддаль $|F_1F_2|$ через 2с, а через $2a$ — модуль різниці віддалі від точки M, що належить гіперболі, до фокусів, тобто

$$||MF_x| — |MF_2| = 2a. \qquad (1)$$

Очевидно, що повинно бути $2c > 2a$, або $c> a$.
Виразимо умову (1) в координатній формі. Маємо $F_1(—c,\ 0)$,
$F_2\ (c,\ 0)$, $M(x,y)$ і, використовуючи формулу віддалі між двома точками,
Дістанемо

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Це рівняння вже є рівнянням гіперболи. Спростимо його так само, як і рівняння еліпса. Дістанемо

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a,$$

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc,$$

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=(a^2-xc)^2.$$

Звідки

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (2)$$

За умовою $c > a$, отже, $c^2 - a^2 > 0$ і можна покласти $c^2 - a^2 = b^2$. Рівняння (2) набуває вигляду $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Поділивши обидві частини рівняння на a^2b^2, дістанемо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2=c^2-a^2.$$

Рівняння (3) називається **канонічним рівнянням** гіперболи. Еквівалентність рівнянь (2) і (3) доводиться аналогічно тому, як це зроблено для рівняння еліпса. Зауважимо, що (2) рівняння другого степеня, і гіпербола належить до кривих другого порядку.

Дослідимо рівняння (3) і зазначимо деякі властивості гіперболи, а також знайдемо вигляд кривої.

2. Дослідження канонічного рівняння гіперболи

1. Знайдемо розташування кривої відносно координатних осей. Із (3) дістаємо

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{звідки} \quad |x| \geq a \quad \text{або} \quad x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty),$$

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}, \quad \text{звідки} \quad y \in (-\infty; +\infty).$$

2.Гіпербола розташована симетрично відносно координатних осей, тобто, якщо координати точки $M_1\ (x;y)$ задовольняють рівняння (3), то його задовольняють і координати точок $M_2(-x;\ y)$, $M_3(-x;\ -y)$, $M_4\ (x;\ -y)$. Отже, гіпербола має дві осі симетрії і центр симетрії, щоє **центром гіперболи.** Для гіперболи, зображеної рівнянням (3), центр співпадає з початком координат.
3. Знайдемо точки перетину гіперболи з координатними осями. Із (3) при $y = 0$ дістаємо $x = \pm a$, тобто дві точки $A_1(-a,\ 0)$; $A_2\ (a,\ 0)$; при $x = 0$ маємо $y^2 = -b^2$, тобто перетину з віссю Oy немає. Але точки $B_1(0,\ -b)$; $S_2(0,\ b)$ також розглядаються. Точки $A_1(-a,\ 0)$; $A_2(a,\ 0)$ називаються **дійсними вершинами** гіперболи, а $B_1(0,\ -b)$; $B_2(0,\ b)$ — **уявними.** Відрізок A_1A_2, довжина якого дорівнює $2a$, називається **дійсною віссю** гіперболи, відрізок B_1B_2, довжина якого $2b$, називається **уявною віссю.** Числа a та b називаються відповідно **дійсною і уявною піввіссю.** Відрізок F_lF_2 довжиною $2c$ — **фокальна вісь** гіперболи, c — **фокальна піввісь.** Як випливає із виведення рівняння (3), має місце співвідношення $c^2 = a^2 + b^2$. Зауважимо, що фокуси F_l і F_2 розташовані на тій же прямій, що і дійсна вісь.
У випадку, коли $a = b$ рівняння (3) перетворюється у рівняння

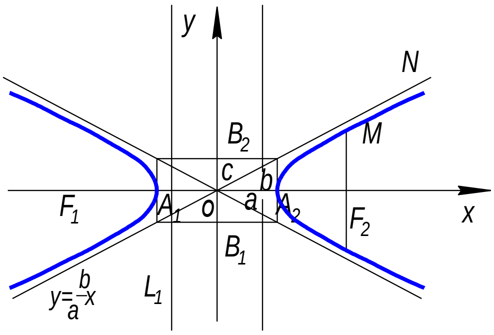

Рис 1

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (4)$$

Гіпербола у цьому випадку називається **рівнобічною.**

1.Назвемо асимптотами* гіперболи прямі

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Встановимо взаємне розташування гіперболи та її асимптот. Для цього у вибраній системі координат нарисуємо прямокутник, сторони якого паралельні координатним осям і проходять через вершини гіперболи (рис. 1).

Прямі $y = \frac{b}{a}x$ і $y = -\frac{b}{a}x$,

очевидно, проходять через початок координат і співпадають з діагоналями прямокутника.

Дійсно, наприклад, для прямої $y = \frac{b}{a}x$ кутовий коефіцієнт

$k = \frac{b}{a} = tg\varphi$ (див. рис. 1), де (φ — кут між діагоналлю L_1L_2 і відрізком A_1A_2. Розглянемо гілку гіперболи, розташовану у першій чверті, тобто, задану рівнянням $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

при $x > a$. Із цього рівняння вип-

ливає, що при збільшенні $x(x \to +\infty)$ значення y зростатиме $(y \to +\infty)$.

Покажемо, що ця гілка гіперболи знаходиться під прямою

$$y = \frac{b}{a} x$$

Для цього візьмемо дві точки:

$$M\left(x, y_{гіп} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

що лежить на гіперболі, і

$$N\left(x, y_{пр} = \frac{b}{a} x \right)$$

що лежить на асимптоті (див. рис. 1), і
доведемо, що $y_{пр.} > y_{гіп}$.

Маємо

$$y_{пр.} - y_{гіп.} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

За умовою $x \geq a$, отже, останній вираз завжди додатний, тобто $У_{пр} — У_{гіп} > 0$

Крім цього, при збільшенні $x(x \to +\infty)$ знаменник $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ одержаного дробу збільшується, а чисельник ab — сталий, і тому дріб прямує до нуля, тобто $|MN| \to 0$.

Отже, гілка гіперболи у першій чверті лежить під асимптотою і при $x \to +\infty$.наближається до неї (рис. 1).

Із симетрії гіперболи відносно координатних осей дістаємо всю криву (рис. 1).

Для рівнобічної гіперболи (4) $a = b$ і асимптотами будуть прямі $y = \pm x$.

4.Фокальною хордою гіперболи називається хорда, що проходить через фокус перпендикулярно до дійсної осі. Якщо $2p$ — довжина цієї хорди, а $H_1(c\ —p)$, $H_2(c, p)$ — точки перетину її з гіперболою, то із рівняння (3) маємо.

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}=1, \quad p^2=b^2\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}$$

Отже,

$$p=\frac{b^2}{a}$$

і має той же вигляд, що і число/? — фокальна піввісь еліпса.

6. **Ексцентриситетом** гіперболи називається число ε, що дорівнює відношенню фокальної півосі до дійсної півосі гіперболи, тобто

$$\varepsilon=\frac{c}{a}>1 \qquad (5)$$

оскільки $c > a$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи.

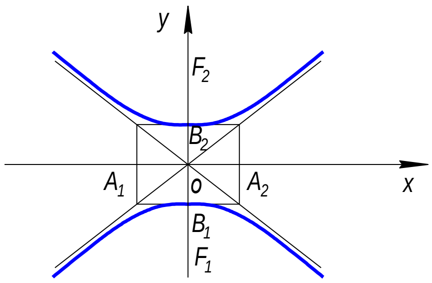

Рис 2

Перетворимо :

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

Звідки випливає, що якщо $b = a$, то гіпербола — рівнобічна. Якщо $b<a$, то $\frac{b}{a}$ < 1і ε < $\sqrt{2}$, причому, чим менше $\frac{b}{a}$, тим ближче ε до 1, і гілки гіперболи стиснуті до осі Ox. Якщо ж $b>a$, то $\frac{b}{a}>1$ і ε> $\sqrt{2}$, гілки гіперболи стиснуті до осі Oy.

7. Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

також визначає гіперболу. При цьому число b — дійсна піввісь, число a — уявна піввісь. Ця гіпербола зображена на рис. 2. Якщо ж у гіперболах

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

числа a та b одні і ті ж самі, то гіперболи називаються **спряженими.**

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і розташовані симетрично відносно центра на віддалі $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Якщо гіпербола задана канонічним рівнянням, то її директрисами будуть прямі

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{(ліва)}, \qquad\qquad x=\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{(права)}.$$

Для гіперболи ε > 1, отже, $\frac{a}{\varepsilon}$ < *a,* і директриси знаходяться між вершинами гіперболи (рис. 3).

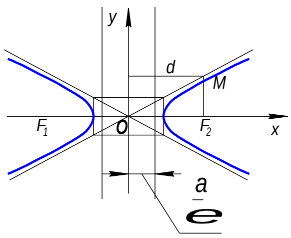

рис. 3

3. Канонічне рівняння параболи

Означення. **Параболою** називається геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної точки, що називається фокусом, і від даної прямої, що називається **директрисою** (за умови, що директриса не проходить через фокус).

Позначимо через F точку, що є фокусом, через L — пряму, що називається директрисою. Нехай M— будь-яка точка, що належить параболі, *ad* — її віддаль від директриси. Тоді, згідно з означенням, повинна використовуватись умова:

$$|MF|=d. \qquad (6)$$

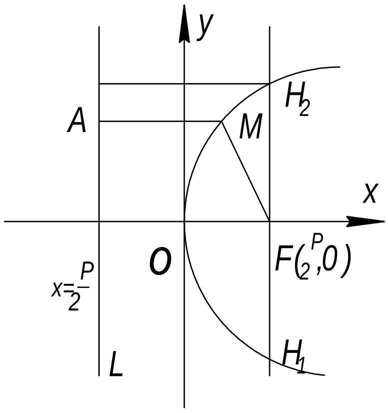

Рис 3

Виберемо систему координат так, щоб вісь *Ox* проходила через фокус *F,* перпендикулярно до директриси *L,* а початок координат поділяв навпіл віддаль між фокусом і директрисою (рис. 3. Позначимо через $p(p>0)$ віддаль між фокусом і директрисою. Тоді $x=-\frac{p}{2}$ рівняння прямої *L* і

точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ —фокус параболи.

Нехай $M(x,y)$ — будь-яка точка, що належить параболі. Опустимо із *M* перпендикуляр *MA* на пряму *L,* так що точка *A* має координати:

$$A\left(-\frac{p}{2},y\right)$$

Тоді згідно з означенням

$|MF| = |MA|$.

Маємо

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$|MA|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

Із (6) дістанемо

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \qquad (7)$$

Рівняння (7) є рівнянням параболи у вибраній системі координат. Зведемо його до більш компактного вигляду

$$\left(\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

$$y^2=2px. \qquad (8)$$

Рівняння (8) називається **канонічним рівнянням параболи.**

Переконаємося в еквівалентності рівнянь (7) і (8). З одного боку, (8) є наслідком (7). З іншого боку, підставимо (7) у ліву частину (8). Дістанемо

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

тобто рівняння (7).

Рівняння (8) є рівнянням другого степеня і парабола є кривою другого порядку.

Дослідимо рівняння (8) і встановимо вигляд кривої.

4. Дослідження канонічного рівняння гіперболи

1. Знайдемо розташування кривої відносно координатних осей. Із (8) дістаємо

$y=\pm\sqrt{2px},$ звідки $x\geq 0$ або $x\in[0,+\infty)$

$$x=\frac{y^2}{2p}, \qquad \text{звідки} \quad y\in(-\infty,+\infty)$$

2. Парабола, що задана рівнянням (8), розташована симетрично осі *Ox,* оскільки, якщо координати точки $M_1(x,y)$ задовольняють рівняння (8), то його задовольняють і координати точки $M_2(x, —y)$. Парабола має одну вісь симетрії і не має центра симетрії. Вісь симетрії для рівняння (8) співпадає з віссю *Ox.*
3. Знайдемо точки перетину параболи з координатними осями. Із (8) маємо, що якщо $x = 0$, то $y = 0$, тобто є єдина точка $O(0; 0)$ перетину параболи з координатними осями. Точка перетину параболи з її віссю симетрії називається **вершиною** параболи. Для рівняння (8) — це точка $O(0,0)$. Для побудови гілки параболи, що лежить у першій чверті, тобто заданої рівнянням $y=\sqrt{2px}$ зауважимо, що із збільшенням x збільшується y Друга гілка, розташована у четвертій чверті, будується виходячи із симетрії. Загальний вигляд параболи, що відповідає рівнянню (8), зображено на рис. 3.
4. **Фокальною хордою** параболи називається хорда, що проходить через фокус *F,* перпендикулярно до осі симетрії. На рис. 3 — це хорда H_1H_2. Довжина фокальної $|H_1H_2| = 2p$. Це очевидно із означення параболи.
5. **Ексцентриситет** параболи за означенням покладають рівним 1:

$$\varepsilon=1.$$

6. Рівняння

$$x^2 = 2py \ (p>0)$$

також визначає параболу, але з віссю симетрії, що співпадає з віссю *Oy* (рис. 4). Фокус *F* має координати $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$а директрисою є пряма

$$y=-\frac{p}{2}$$

На рис. 4 зображена парабола, рівняння якої $y^2 = —2px$, фокус

$$F\left(-\frac{p}{2},0\right),$$

директриса $x=\frac{p}{2}$ На рис. 6 зображена парабола,

рівняння якої $x^2 = —2py$, фокус

$$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$$

, директриса $y=\frac{p}{2}$.

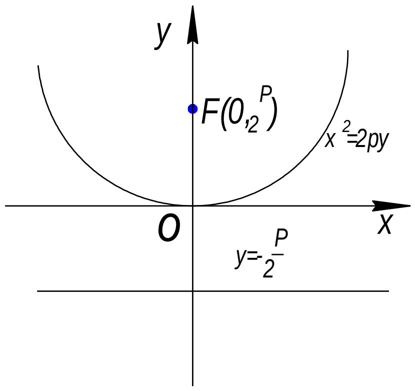

Рис 4

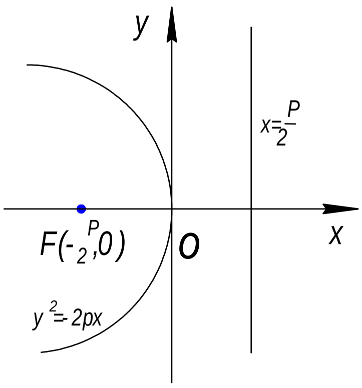

Рис 5

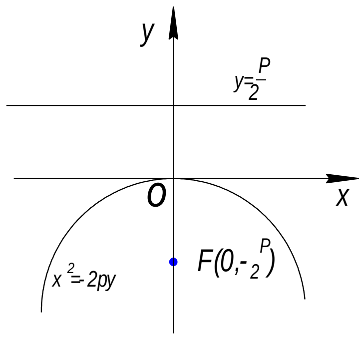

Рис 6

Повернутися до змісту