Лекція №11. Функції. Основні характеристики функцій

1. Поняття функціональної залежності

Величина називається змінною (сталою), якщо в умовах даної задачі вона набуває різних (тільки одного) значень.

Розглянемо дві змінні величини $x \in D \subseteq R$ і $y \in E \subseteq R$.

Означення. *Функцією* $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна, або аргумент;

y — залежна змінна, або функція;

f — символ закону відповідності;

D — область визначення функції;

E — множина значень функції.

Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною* (*складеною*) *функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад. $y = 2^{\sin^2 x}$ — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Приклад. $y = \mathrm{tg}(3u)\cdot f(u)$, де $u = 3x+1$, $f(x) = (2x+5)^3$. Оскільки $f(u) = (2u+5)^3$, то $y = \mathrm{tg}(3(3x+1))(2(3x+1)+5)^3 = \mathrm{tg}(9x+3)(6x+7)^3$.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою до даної* $y = f(x)$; її позначають $y = f^{-1}(x)$.

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Приклад. $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ — взаємно обернені функції:

$$\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (рис.1).

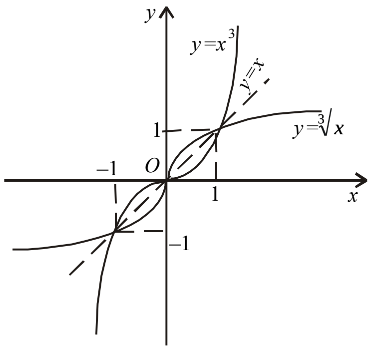

Рис.1

Означення. Функція (функціональна залежність змінної y від змінної x) називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв’язане відносно змінної y.

Приклад. Рівняння $y + x + 2^y = 0$ визначає неявну функцію y від x.

Означення. Система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

визначає параметричну залежність функції y від змінної x (t—параметр).

Вираз $y = f(x)$ самої залежності y від x можна дістати виключенням параметра t з останньої системи рівнянь.

Приклад. Параметрична залежність

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

визначає коло радіуса r з центром у початку прямокутної декартової системи координат. Справді, зводячи до квадрата параметричні рівняння і підсумовуючи результат, дістаємо: $x^2 + y^2 = r^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$, або $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Загальні властивості функцій

Означення. Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається *природною областю визначення функції*. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{1 - x^2}}{\lg(1 + x)}.$$

$$D(y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \le 1 \\ 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 1 > 0 \\ \lg(x+1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x| \le 1 \\ x > -1 \\ x + 1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \le 1 \\ x \ne 0. \end{cases}$$

$D(y) = (-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$ — природна область визначення. Якщо за умовою задачі x — відстань, а це означає, що $x \geq 0$, тоді $D(y) = (0;\ 1]$ — задана область визначення.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*), якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для $x \in D$, $f(-x) \neq \pm f(x)$.

Приклад. $y = \cos x$ — парна функція (графік функції симетричний відносно осі ординат (рис. 2)), бо $y(x) = \cos(-x) = \cos x = = y(x)$; $y = \operatorname{arctg} x$ — непарна функція (графік функції симетричний відносно початку координат (рис. 3)), бо $y(-x) = \pm\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x = -y(x)$; $y = \arccos x$ — ні парна, ні непарна (рис. 3.4), бо $y(-x) = \arccos(-x) = \pi - \arccos x \neq \pm y(x)$.

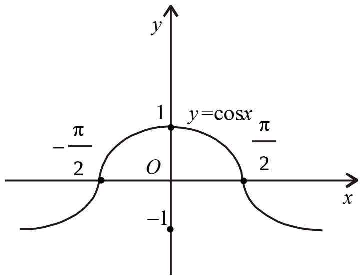

Рис. 2

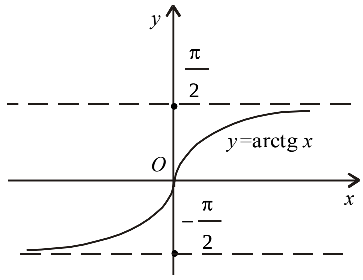

Рис. 3

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T — період функції.

Приклад. $y = \operatorname{tg} x$ — періодична функція з мінімальним періодом $T = \pi$ (див. рис.5), бо $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x-\pi) = \operatorname{tg} x$.

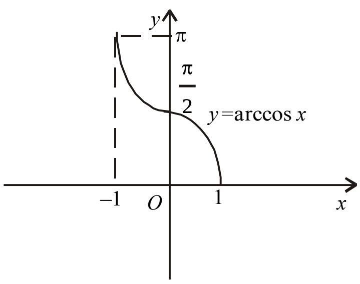

Рис. 4

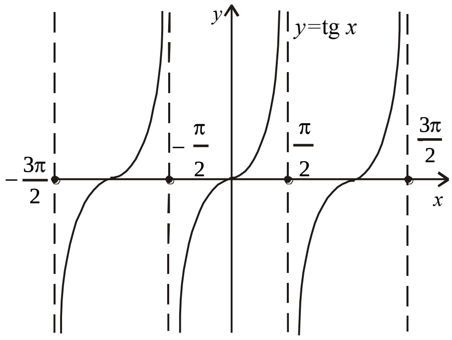

Рис. 5

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою на множині D,* якщо для всіх $x \in D$ виконується умова $|f(x)| \leq M$, де $M > 0$ — деяке скінченне число.

Приклад. $y = \arcsin x$ — обмежена функція для всіх $x \in [-1;\ 1]$ (рис. 6), бо $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

Приклад. $y=\log_a x$ — монотонно спадна функція при $0 < a < 1$, а при $a > 1$ — монотонно зростаюча (рис. 7).

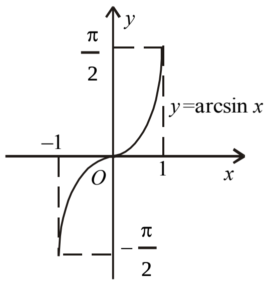

Рис. 6

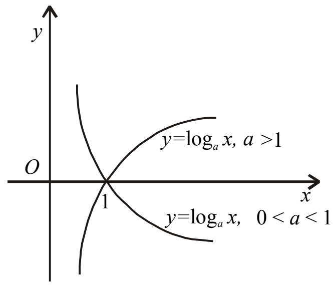

Рис. 7

3. Елементарні функції

Основні з них:

1) степенева $y=x^{\alpha}$;
2) показникова $y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$ (рис. 8);
3) логарифмічна $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ (рис. 7);
4) тригонометричні: $y=\cos x$ (рис. 2); $y=\sin x$ (рис. 9); $y=\mathrm{tg}\,x$ (рис. 5); $y=\mathrm{ctg}\,x$ (рис. 10);
5) обернені тригонометричні: $y=\arcsin x$ (рис. 6); $y=\arccos x$ (рис. 4); $y=\mathrm{arctg}\,x$ (рис. 5); $y=\mathrm{arcctg}\,x$ (рис. 11).

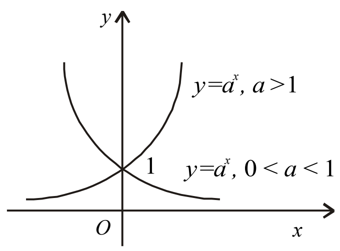

Рис. 8

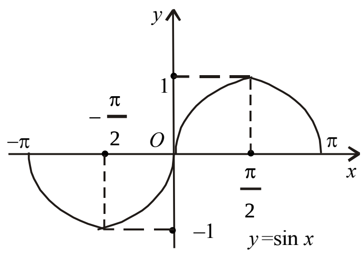

Рис. 9

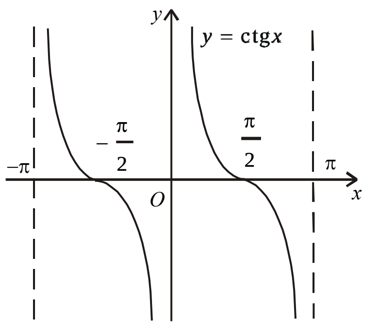

Рис. 10

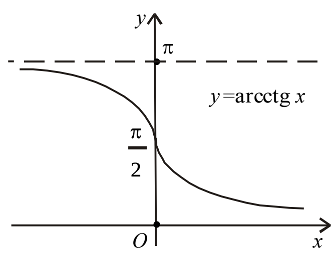

Рис. 11

Функція вважається *елементарною*, якщо вона може бути побудована з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості алгебраїчних дій та суперпозицій, наприклад:

$$y=2^{x\,\mathrm{tg}^3\left(x^2+\arcsin\sqrt{x}\right)}+\cos^2\left(\log_2\left(\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{x}\right)\right)$$ — елементарна функція.

Означення. Функція $y = y(x)$ називається *алгебраїчною*, якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

де $P_i(x),\ i = (\overline{0,n})$ — многочлени.

Приклад. Функція $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ буде алгебраїчною, бо вона є розв'язком рівняння

$$y^3(x-1) - (x^2+1) = 0.$$

Усі неалгебраїчні функції називаються *трансцендентними*.

Алгебраїчні функції поділяються на *раціональні* (цілі й дробові) та *ірраціональні*.

Цілою раціональною функцією буде упорядкований многочлен

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, a_i \in R.$$

Дробово-раціональною функцією буде відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ або } y = R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Повернутися до змісту